Eine neue Herleitung des Exponentialgesetzes in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

J. W. Lindeberg in Helsingfors (Finnland).

---

1. In einer Arbeit „*Über das Exponentialgesetz in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*“[1]) habe ich einige Sätze bewiesen, die sich auf die Frage beziehen, unter welchen Bedingungen die Summe einer großen Anzahl von unabhängigen Wahrscheinlichkeitsgrößen dem Gaußschen Gesetze folgt. Zur Zeit der Redaktion dieser Arbeit hielt ich einen von Herrn v. Mises angegebenen Satz[2]) für das schärfste bisher in dieser Frage gewonnene Resultat. Nunmehr finde ich, daß schon Liapounoff[3]) allgemeine Resultate dargelegt hat, die nicht nur über diejenigen des Herrn v. Mises hinausgehen, sondern aus denen auch die meisten der von mir in der oben genannten Arbeit bewiesenen Tatsachen abgeleitet werden können.

Das Studium der Arbeiten von Liapounoff hat mich veranlaßt, die von mir angewandte Methode aufs neue zu prüfen. Hierbei ist mir der Umstand, daß meine Entwickelungen nur an endliche Reihen von Wahrscheinlichkeitsgrößen knüpfen, immer deutlicher als formale Überlegenheit gegenüber der früheren Darstellungsweise hervorgetreten. Man bemerke in dieser Hinsicht, daß der Satz II der nachfolgenden Darstellung, der mir für die mathematische Statistik unbedingt notwendig scheint, aus dem allgemeinen Satze, in welchem Liapounoff seine Resultate zusammenfaßt[4]), nicht gefolgert werden kann, obgleich die Hilfsmittel Liapounoffs

---

[1]) Annales Academiae Scientiarum Fennicae **16** (1920), S. 1–23.

[2]) Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Mathematische Zeitschrift **4** (1919), (S. 1–97), S. 78.

[3]) Sur une proposition de la théorie des probabilités, Bulletin de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg **13** (1900), S. 359–386. — Nouvelle forme du théorème sur la limite de probabilité, Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg **12** (1902), S. 1–24.

[4]) Seite 3 der zweiten der soeben zitierten Arbeiten.

sehr wohl zur Ableitung desselben geeignet sind. Weiter habe ich gefunden, daß meine Methode noch erheblich vereinfacht werden kann und daß eine kleine Abänderung derselben zu einer nicht unwesentlichen sachlichen Erweiterung aller mir jetzt bekannten früheren Resultate führt.

Im folgenden wird eine Darstellung meiner Methode und der daraus herfließenden Resultate gegeben. Hierbei wird zunächst versucht, einen möglichst einfachen Beweis des oben erwähnten Satzes II zu geben, denn dies scheint mir die wichtigste Aufgabe der Theorie zu sein. Sodann wird der Beweisgang so abgeändert, daß ein möglichst umfassendes Resultat erreicht wird.

Hinsichtlich des allgemeinen Charakters der Wahrscheinlichkeitsgrößen, die wir in Betracht ziehen, machen wir von Anfang an keine andere Voraussetzung, als daß sie Verteilungsfunktionen[5]) besitzen. Demnach wird im folgenden von Integralen immer im Sinne von Stieltjes die Rede sein.

Betreffs der im folgenden benutzten Bezeichnungsweise ist zu bemerken, daß wir die obere Grenze eines Integrals nicht hinschreiben, falls dieselbe $+\infty$ ist; desgleichen wird die untere Grenze $-\infty$ weggelassen. Ferner werden wir uns durchgehend der abkürzenden Bezeichnung

$$\varphi(x, \sigma) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

bedienen, wo σ eine positive Zahl bedeutet.

2. Es seien $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$ die Verteilungsfunktionen von n voneinander unabhängigen Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Wir machen zunächst die folgenden Voraussetzungen.

Die Mittelwerte der Größen u_μ sind sämtlich Null, d. h. es ist für $\mu = 1, 2, \ldots, n$

$$\int x\, dU_\mu(x) = 0.$$

Wenn die Streuungen der Größen u_μ mit σ_μ bezeichnet werden, d. h. wenn

$$\int x^2\, dU_\mu(x) = \sigma_\mu^2$$

gesetzt wird, so ist

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = 1.$$

Es sei $U(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = u$, also die durch die Gleichung

$$(1) \quad U(x) = \int\int\ldots\int U_n(x - t_1 - t_2 - \ldots - t_{n-1})\, dU_{n-1}(t_{n-1}) \ldots dU_1(t_1)$$

[5]) Wegen des Begriffes der Verteilungsfunktion verweise ich auf die schon zitierte Arbeit des Herrn v. Mises und die Fortsetzung derselben in Bd. 5.

gegebene Funktion, wo gemäß der oben gemachten Bemerkung über unsere Bezeichnungsweise in bezug auf sämtliche Veränderlichen $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ von $-\infty$ bis $+\infty$ zu integrieren ist. Zufolge der gemachten Voraussetzungen ist der Mittelwert der Größe u Null und ihre Streuung gleich 1. Wir stellen uns zunächst die Aufgabe zu untersuchen, was von der Funktion $U(x)$ hinsichtlich ihres Zusammenhanges mit der Funktion $\varphi(x, 1)$ geschlossen werden kann.

3. Es bezeichne $f(x)$ eine für alle reellen Werte von x erklärte Funktion, die den folgenden Bedingungen genügt.

Sie ist nebst ihren zwei ersten Ableitungen stetig und $|f(x)|$ hat eine endliche obere Grenze.

Die dritte Ableitung von $f(x)$ kann in einer endlichen Anzahl von Punkten endliche Sprünge machen, sonst aber ist sie stetig.

Der absolute Betrag dieser dritten Ableitung ist überall kleiner oder gleich einer gegebenen positiven Zahl k.

Mit $V(x)$ bezeichnen wir die Verteilungsfunktion einer beliebigen Wahrscheinlichkeitsgröße v mit dem Mittelwerte Null und der Streuung σ. Schließlich werde gesetzt

$$F(x) = \int f(x-t)\,dV(t).$$

Nach dem Taylorschen Satze ist

$$f(x-t) = f(x) - f'(x)t + f''(x)\frac{t^2}{2} + \zeta(x, t)\frac{t^3}{6},$$

wo $|\zeta(x, t)| \leqq k$. Führen wir diese Summe in den Ausdruck für $F(x)$ ein, so wird mit Rücksicht auf die Definition von $V(x)$

$$F(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{2}\sigma^2 + R,$$

wo

$$R = \int \frac{\zeta(x, t)}{6} t^3\,dV(t) \tag{2}$$

und somit

$$|R| < \frac{k}{6}\int |x|^3\,dV(x).$$

Es wird also

$$\left|F(x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2}\sigma^2\right| < \frac{k}{6}\int |x|^3\,dV(x). \tag{3}$$

Machen wir die spezielle Annahme, daß v die Größe bedeutet, deren Wahrscheinlichkeitsdichte für jedes x gleich $\varphi(x, \sigma)$ ist, und setzen wir

$$\Phi(x) = \int f(x-t)\,\varphi(t, \sigma)\,dt,$$

so erhalten wir aus (3), indem wir die Gleichung

$$\int |x|^3 \varphi(x, \sigma)\, dx = \frac{4\sigma^3}{\sqrt{2\pi}}$$

berücksichtigen,

$$\left| \Phi(x) - f(x) - \frac{f''(x)}{2} \sigma^2 \right| < \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Mit (3) kombiniert gibt diese Ungleichung

$$|F(x) - \Phi(x)| < \frac{k}{6} \int |x|^3 \, dV(x) + \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}. \tag{4}$$

Diese letzte Ungleichung kann noch vereinfacht werden. In der Gleichung

$$\int^{-\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) + \int_{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x) = \sigma^2$$

ist das mittlere Integral kleiner als $\frac{\sigma^2}{4}$, und also ist die Summe der beiden übrigen Integrale größer als $\frac{3}{4}\sigma^2$. Andererseits ist

$$\int^{-\frac{\sigma}{2}} |x|^3 dV(x) \geqq \frac{\sigma}{2} \int^{-\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x)$$

und

$$\int_{+\frac{\sigma}{2}} |x|^3 dV(x) > \frac{\sigma}{2} \int_{+\frac{\sigma}{2}} x^2 dV(x),$$

was uns zeigt, daß

$$\int |x|^3 dV(x) > \frac{3}{8}\sigma^3.$$

Mit Rücksicht hierauf gibt (4)

$$|F(x) - \Phi(x)| < k \int |x|^3 dV(x). \tag{5}$$

4. Wir betrachten jetzt zwei Systeme von Funktionen

$$F_1(x), F_2(x), \ldots, F_n(x) \quad \text{und} \quad \Phi_1(x), \Phi_2(x), \ldots, \Phi_n(x),$$

die wir in folgender Weise definieren:

$$\begin{aligned}
F_1(x) &= \int f(x-t)\, dU_1(t), & \Phi_1(x) &= \int f(x-t)\, \varphi(t, \sigma_1)\, dt, \\
F_2(x) &= \int F_1(x-t)\, dU_2(t), & \Phi_2(x) &= \int \Phi_1(x-t)\, \varphi(t, \sigma_2)\, dt, \\
&\ldots\ldots & &\ldots\ldots \\
F_n(x) &= \int F_{n-1}(x-t)\, dU_n(t), & \Phi_n(x) &= \int \Phi_{n-1}(x-t)\, \varphi(t, \sigma_n)\, dt.
\end{aligned}$$

Wegen der über die Funktion $f(x)$ gemachten Voraussetzungen können die drei ersten Ableitungen der Funktion $\Phi_1(x)$ durch Differentiieren nach x unter dem Integralzeichen gebildet werden. Wenn berücksichtigt wird, daß

$$\int \varphi(t, \sigma_1)\, dt = 1,$$

so folgt hieraus, daß die Funktion $\Phi_1(x)$ nebst ihren drei ersten Ableitungen stetig ist, daß $|\Phi_1(x)|$ eine endliche obere Grenze besitzt, und daß die dritte Ableitung von $\Phi_1(x)$ dem absoluten Betrage nach kleiner als k ist. Hieraus folgt aber weiter, daß dieselben Eigenschaften auch der Funktion $\Phi_2(x)$ und allen folgenden Funktionen $\Phi_\mu(x)$ zukommen, und somit erfüllen diese Funktionen insbesondere alle der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen.

Setzen wir nun

$$F_1(x) = \Phi_1(x) + \Delta_1(x),$$

so ist nach (5)

$$|\Delta_1(x)| < k \int |x^3|\, dU_1(x)$$

für jedes x. Führen wir ferner die Summe $\Phi_1(x) + \Delta_1(x)$ in das die Funktion $F_2(x)$ darstellende Integral ein, so ergibt sich

$$F_2(x) = \int \Phi_1(x-t)\, dU_2(t) + \int \Delta_1(x-t)\, dU_2(t).$$

Das erste Integral rechts unterscheidet sich nach (5) für jedes x von $\Phi_2(x)$ um weniger als

$$k \int |x|^3\, dU_2(x),$$

denn wie schon bemerkt wurde, erfüllt $\Phi_1(x)$ alle der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen, und das zweite Integral wird, da es ja für jedes x einen Mittelwert der Werte von $\Delta_1(x)$ mit gewissen durch $U_2(x)$ bestimmten Gewichten darstellt, seinem absoluten Betrage nach sicher nicht größer als das Maximum von $|\Delta_1(x)|$. Wenn

$$F_2(x) = \Phi_2(x) + \Delta_2(x)$$

gesetzt wird, erhalten wir deshalb

$$|\Delta_2(x)| < k\left(\int |x|^3\, dU_1(x) + \int |x|^3\, dU_2(x)\right).$$

In dieser Weise können wir weiter gehen. Bei jedem Schritte gelten dieselben Überlegungen, und wir erhalten schließlich

$$(6) \qquad |F_n(x) - \Phi_n(x)| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(x).$$

Wir wollen die Funktionen $F_n(x)$ und $\Phi_n(x)$ näher in Betracht ziehen. Man findet durch sukzessives Einsetzen

$$(7)\left\{\begin{aligned} F_n(x) &= \int\int\ldots\int f(x-t_1-t_2-\ldots-t_n)\,dU_1(t_1)\,dU_2(t_2)\ldots dU_n(t_n),\\ \Phi_n(x) &= \int\int\ldots\int f(x-t_1-t_2-\ldots-t_n)\,\varphi(t_1,\sigma_1)\,\varphi(t_2,\sigma_2)\ldots\varphi(t_n,\sigma_n)\,dt_1\,dt_2\ldots d\end{aligned}\right.$$

Führen wir die durch (1) gegebene Funktion $U(x)$ ein, so können wir die erste Gleichung offenbar kurz schreiben

$$F_n(x) = \int f(x-t)\,dU(t).$$

Andererseits ist bekanntlich der Wert des Integrals

$$\int\int\ldots\int\varphi(x-t_1-t_2-\ldots-t_{n-1},\sigma_n)\,\varphi(t_{n-1},\sigma_{n-1})\ldots\varphi(t_1,\sigma_1)\,dt_{n-1}\ldots dt_1$$

gleich $\varphi(x,\sigma)$, wo $\sigma^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2$ und also, wegen unserer Voraussetzungen, $\sigma = 1$. Somit wird die zweite der Gleichungen (7) einfach

$$\Phi_n(x) = \int f(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt,$$

und die Ungleichung (6) kann geschrieben werden

$$(8)\qquad \left|\int f(x-t)\,dU(t) - \int f(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt\right| < k\sum_{\mu=1}^{n}\int |x|^3\,dU_\mu(x).$$

5. Aus dieser Ungleichung erhellt schon ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen den Funktionen $U(x)$ und $\varphi(x,1)$. Wir wollen aber ein präziseres Resultat formulieren, indem wir eine obere Grenze für den absoluten Wert der Differenz

$$U(x) - \int^{x}\varphi(t,1)\,dt$$

aufstellen.

Wir setzen zur Abkürzung

$$(9)\qquad l = \frac{4}{\sqrt[3]{2k}}$$

und definieren eine von k abhängige Funktion $g(x)$ in folgender Weise. Für $x<0$ ist $g(x)=0$, für $x>l$ $g(x)=1$. Zwischen dem Nullpunkte und der Stelle $x=l$ ist die Funktion $g(x)$ dadurch bestimmt, daß sie nebst ihren zwei ersten Ableitungen stetig ist, während ihre dritte Ableitung in den Intervallen $\left(0,\frac{l}{4}\right)$ und $\left(\frac{3l}{4},l\right)$ den Wert k, im Intervalle $\left(\frac{l}{4},\frac{3l}{4}\right)$ den Wert $-k$ hat. Diese Bedingungen sind wegen (9) miteinander verträglich und bestimmen eindeutig die Funktion $g(x)$.[6])

[6]) Diese Funktion wächst im Intervalle $(0,l)$ stetig von 0 bis 1.

Setzen wir in (8) einmal $f(x) = g(x)$ und sodann $f(x) = g(x+l)$, was zulässig ist, weil $g(x)$ die der Funktion $f(x)$ auferlegten Bedingungen erfüllt, so erhalten wir die beiden Ungleichungen

$$\left| \int g(x-t)\,dU(t) - \int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt \right| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\,dU_\mu(x)$$

und

$$\left| \int g(x-t+l)\,dU(t) - \int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt \right| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\,dU_\mu(x).$$

Weiter bestehen aber offenbar die Ungleichungen

$$\int g(x-t)\,dU(t) \leqq \int^{x} dU(t) \leqq \int g(x-t+l)\,dU(t),$$

$$\int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt < \int^{x} \varphi(t,1)\,dt < \int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt$$

und

$$\left| \int g(x-t+l)\,\varphi(t,1)\,dt - \int g(x-t)\,\varphi(t,1)\,dt \right| < \frac{l}{\sqrt{2\pi}}.$$

Durch Kombination aller dieser Ungleichungen ergibt sich

$$\left| U(x) - \int^{x} \varphi(t,1)\,dt \right| < k \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\,dU_\mu(x) + \frac{l}{\sqrt{2\pi}}.$$

Bisher ist keine Voraussetzung über die Größe von k gemacht worden. Um zu erreichen, daß die beiden Glieder der rechten Seite der soeben erhaltenen Ungleichung in bezug auf die dort auftretende Integralsumme von derselben Ordnung werden, bestimmen wir k gemäß der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2k}} = \left(\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\,dU_\mu(x) \right)^{\frac{1}{4}}$$

und erhalten dann mit Rücksicht auf (9), indem wir uns mit einer groben Abschätzung des numerischen Faktors begnügen,

$$\left| U(x) - \int^{x} \varphi(t,1)\,dt \right| < 3 \left(\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\,dU_\mu(x) \right)^{\frac{1}{4}}.$$

Auf Grund dieser Ungleichung können wir den folgenden Satz aussprechen:

Satz I. *Wenn die positive Zahl ε noch so klein gewählt ist, ist es möglich, die positive Zahl η so zu wählen, daß für alle x*

$$\left| U(x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,dt \right| < \varepsilon,$$

sobald nur

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3 U_\mu(x) < \eta.$$

6. Wir lassen jetzt die im § 2 gemachte Annahme $\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = 1$ fallen, führen dagegen die Voraussetzung ein, daß die sämtlichen Größen u_μ nur solcher Werte fähig sind, deren absolute Beträge unterhalb einer gewissen endlichen oberen Grenze d_n liegen. Ferner setzen wir

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = r_n^2.$$

Es ist für jedes μ von 1 bis n

$$\int x\, dU_\mu(r_n x) = 0,$$

und da

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int x^2\, dU_\mu(r_n x) = \frac{1}{r_n^2} \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_n^2 = 1,$$

erfüllen also die zu den Verteilungsfunktionen $U_\mu(r_n x)$ gehörigen Wahrscheinlichkeitsgrößen alle Voraussetzungen des § 2. Weiter ist offenbar die Verteilungsfunktion der Summe dieser neuen Größen gleich $U(r_n x)$. Wenn ε beliebig klein gewählt ist, kann man also nach Satz I η so klein wählen, daß

$$\left| U(r_n x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt \right| < \varepsilon, \tag{10}$$

sobald

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(r_n x) < \eta.$$

Nun ist aber

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(r_n x) = \frac{1}{r_n^3} \sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(x)$$

und weiter nach der oben gemachten Voraussetzung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(x) < d_n \sum_{\mu=1}^{n} \int x^2\, dU_\mu(x) = d_n r_n^2,$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int |x|^3\, dU_\mu(r_n x) < \frac{d_n}{r_n}.$$

Somit besteht (10), sobald $\frac{d_n}{r_n} < \eta$. Denken wir uns in (10) $\frac{x}{r_n}$ und $\frac{t}{r_n}$ anstatt x und t eingeführt, so können wir das erhaltene Resultat in der folgenden Form aussprechen:

Satz II. *Es seien $u_1, u_2, \ldots, u_n$ Wahrscheinlichkeitsgrößen, deren mögliche Absolutwerte sämtlich unterhalb der Grenze d_n bleiben, und deren Mittelwerte sämtlich gleich Null sind. Die Streuungen dieser Größen seien $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$, und die Summe der Quadrate derselben sei gleich r_n^2.*

Wenn dann $U(x)$ die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ bezeichnet, so kann zu jeder positiven Zahl ε eine andere positive Zahl η gefunden werden, derart, daß

$$\left| U(x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2 r_n^2}}}{r_n \sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

sobald

$$\frac{d_n}{r_n} < \eta.$$

Wir denken uns noch die Größen u_n sowohl hinsichtlich ihrer Anzahl als in bezug auf die Form ihrer Verteilungsfunktionen in der Weise veränderlich, daß gleichzeitig d_n gegen Null geht und r_n einem von Null verschiedenen Werte r zustrebt. Dann ist nach dem soeben bewiesenen Satze *gleichmäßig für alle x*

$$\lim U(x) = \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2 r^2}}}{r \sqrt{2\pi}}.$$

Im Satze II und in der zuletzt gemachten Aussage dürfte der präzise Inhalt der klassischen Behauptung zu sehen sein, daß die Summe einer großen Anzahl voneinander unabhängiger kleiner Fehler dem Gaußschen Gesetze folgt.

7. Bisher ist es unser Ziel gewesen, in möglichst einfacher Weise zu dem Satze II zu gelangen. Wir stellen uns jetzt wieder auf den Boden der Voraussetzungen des § 2 und wollen zeigen, daß die im Satze I ausgesprochene Bedingung durch eine weniger fordernde ersetzt werden kann.

Es bezeichne $s(x)$ die Funktion von x, die für $|x| < 1$ gleich x^3 und für alle anderen Werte des Argumentes gleich x^2 ist. Eine kleine Abänderung des vorigen Beweisganges wird uns zu dem folgenden Satze führen:

Satz III. *Wenn die positive Zahl ε noch so klein genommen ist, kann die positive Zahl η so gewählt werden, daß*

$$\left| U(x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

sobald nur

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, dU_\mu(x) < \eta.$$

Indem wir zu den Entwickelungen des § 3 zurückkehren, nehmen wir jetzt an, daß die Funktion $f(x)$ außer den dort angegebenen Bedingungen noch der Forderung genügt, daß die Funktionen $|f(x)|$, $|f'(x)|$ und $\left|\frac{f''(x)}{2}\right|$ für alle x kleiner als $\frac{k}{24}$ verbleiben. Ferner nehmen wir an, daß $\sigma < 1$. Mit diesen verstärkten Annahmen läßt sich der Inhalt des § 3 wie folgt modifizieren.

Da das Produkt $\frac{\zeta(x,t)}{6} t^3$ in der Gleichung (2) den Ausdruck

$$f(x-t) - f(x) + f'(x)t - \frac{f''(x)}{2} t^2$$

repräsentiert, und diese zufolge der über $f(x)$ gemachten Voraussetzungen für $|t| \geqq 1$ absolut kleiner als $\frac{kt^3}{6}$ ist, so kann man bei der Abschätzung des Integrals (2) für Werte von t außerhalb des Intervalles $-1 < t < 1$ diese letzte obere Grenze benutzen, und es ergibt sich dann

$$|R| < \frac{k}{6} \int s(x)\, dV(x),$$

woraus folgt

$$|F(x) - \Phi(x)| < \frac{k}{6} \int s(x)\, dV(x) + \frac{2k\sigma^3}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Entweder ist nun

$$\int^{-1} x^2 dV(x) + \int_{+1} x^2 dV(x) \geqq \frac{\sigma^2}{4}$$

oder diese Ungleichung besteht nicht. Im ersteren Falle ist die Summe links, und also auch das Integral

$$\int s(x)\, dV(x),$$

größer als $\frac{\sigma^3}{4}$, da ja $\sigma < 1$ vorausgesetzt wurde. Im zweiten Falle zeigt uns die dann bestehende Ungleichung

$$\int_{-1}^{-\frac{\sigma}{2}} x^2\, dV(x) + \int_{-\frac{\sigma}{2}}^{+\frac{\sigma}{2}} x^2\, dV(x) + \int_{+\frac{\sigma}{2}}^{+1} x^2\, dV(x) > \frac{3}{4}\sigma^2,$$

wie im § 3, daß

$$\int_{-1}^{+1} |x|^3 dV(x) > \frac{\sigma^3}{4}$$

und also

$$\int s(x) dV(x) > \frac{\sigma^3}{4}.$$

Diese letzte Ungleichung besteht also in jedem Falle, und wir erhalten somit

$$|F(x) - \Phi(x)| < c k \int s(x) dV(x),$$

wo $c = \frac{1}{6} + \frac{8}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < \frac{3}{2}$.

Auf Grund dieser Ungleichung können nun dieselben Schlüsse gezogen werden wie im Vorigen. Da die sämtlichen Größen σ_μ kleiner als 1 sind, bleiben die Entwickelungen des § 4 in allen Hinsichten gültig, wenn wir überall

$$\frac{3}{2} \int s(x) d U_\mu(x)$$

anstatt

$$\int |x|^3 d U_\mu(x)$$

schreiben. Was die Entwickelungen des § 5 betrifft, gilt dasselbe, wobei jedoch zu beachten ist, daß wir diesmal k hinreichend groß annehmen müssen, damit die Funktion $g(x)$ die der Funktion $f(x)$ auferlegten neuen Bedingungen erfülle. Mit Hinsicht auf die am Ende des § 5 getroffene Wahl des Wertes von k bedeutet aber dies nur, daß die Summe

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x) d U_\mu(x) \tag{11}$$

hinreichend klein sein soll, was wir offenbar annehmen dürfen. Hiermit ist die Richtigkeit des Satzes III dargelegt[7]).

Es ist zu bemerken, daß die Summe (11) immer einen bestimmten endlichen Wert hat, sobald die Streuungen der Größen u_μ endliche Werte haben. Hinsichtlich des allgemeinen Verhaltens der Verteilungsfunktionen $U_\mu(x)$ im Unendlichen kann also nicht weniger gefordert werden, als in der Bedingung des Satzes III enthalten ist.

---

[7]) Es verdient vielleicht hervorgehoben zu werden, daß dieser Satz, wie man leicht findet, noch gültig bleibt, wenn die Funktion $s(x)$ wie folgt definiert wird:

$$\begin{aligned} s(x) &= |x|^3 \quad \text{für} \quad |x| < \varrho \\ s(x) &= \varrho x^2 \quad\;\; „ \quad\;\; |x| > \varrho, \end{aligned}$$

wo ϱ eine positive Zahl bedeutet, die beliebig klein gewählt sein kann.

8. Der Inhalt des Satzes III kann in verschiedenen Formen ausgesprochen werden. Um eine zweite Formulierung desselben zu erhalten, wollen wir zeigen, daß zwischen der Integralsumme (11) und der Differenz

$$1-\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) \tag{12}$$

ein solcher Zusammenhang besteht, daß sie immer gleichzeitig unendlich klein werden.

Indem wir mit ε eine kleine positive Zahl bezeichnen, nehmen wir an, daß

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, dU_\mu(x) < \varepsilon .$$

Wenn τ eine positive Zahl, kleiner als 1, bedeutet, ist offenbar

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} s(x)\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} s(x)\, dU_\mu(x) > \tau\left(\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} x^2\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} x^2\, dU_\mu(x)\right),$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\tau} x^2\, dU_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int_{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < \frac{\varepsilon}{\tau},$$

und weiter, wenn wir die Gleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int x^2\, dU_\mu(x) = 1 \tag{13}$$

berücksichtigen,

$$1-\sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < \frac{\varepsilon}{\tau}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist also für $\tau > \sqrt{\varepsilon}$ kleiner als $\sqrt{\varepsilon}$; für $\tau < \sqrt{\varepsilon}$ ist sie offenbar jedenfalls kleiner als 1. Nun ist die Größe (12) nichts anderes als das zwischen den Grenzen 0 und 1 gebildete Integral dieser linken Seite in bezug auf τ. Indem wir das Integrationsintervall in die zwei Teile $(0, \sqrt{\varepsilon})$ und $(\sqrt{\varepsilon}, 1)$ zerlegen, erhalten wir deshalb

$$1-\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, dU_\mu(x) < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Also wird die Größe (12) immer unendlich klein, wenn (11) unendlich klein wird.

Umgekehrt sei angenommen, daß

$$1-\int\limits_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} x^2\, d\, U_\mu(x) < \varepsilon.$$

Indem wir mit λ eine Zahl zwischen 0 und 1 bezeichnen, können wir diese Ungleichung in der Form

$$\int\limits_0^\lambda d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} x^2\, d\, U_\mu(x) + \int\limits_\lambda^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\tau}^{+\tau} x^2\, d\, U_\mu(x) > 1-\varepsilon$$

schreiben. Wenn wir im ersten Gliede links die zu integrierende Summe durch ihren Wert für $\tau=\lambda$ ersetzen und im zweiten Gliede statt der Summe den Wert 1 setzen, wodurch die linke Seite nur vergrößert wird, entsteht eine Ungleichung, die durch Division mit λ

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\lambda}^{+\lambda} x^2\, d\, U_\mu(x) > 1-\frac{\varepsilon}{\lambda}$$

gibt. Setzen wir hier $\lambda=\sqrt{\varepsilon}$, so ergibt sich

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}} x^2\, d\, U_\mu(x) > 1-\sqrt{\varepsilon}$$

und weiter mit Rücksicht auf (13)

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\sqrt{\varepsilon}} x^2\, d\, U_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{+\sqrt{\varepsilon}} x^2\, d\, U_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon},$$

woraus folgt

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int^{-\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, d\, U_\mu(x) + \sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{+\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, d\, U_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon}.$$

Fügen wir hierzu die wegen (13) offenbar richtige Ungleichung

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int\limits_{-\sqrt{\varepsilon}}^{+\sqrt{\varepsilon}} s(x)\, d\, U_\mu(x) < \sqrt{\varepsilon},$$

so erhalten wir schließlich

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int s(x)\, d\, U_\mu(x) < 2\sqrt{\varepsilon}.$$

Der Zusammenhang zwischen den Größen (11) und (12), der aus dem Obigen erhellt, zeigt uns, daß wir im Satze III (12) anstatt (11) einführen können, und wir erhalten somit den folgenden Satz:

Satz IV. *Wenn die positive Zahl ε beliebig klein gegeben ist, kann die positive Zahl η so bestimmt werden, daß für jedes x*

$$\left| U(x) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

sobald nur

$$\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2 \, dU_\mu(x) > 1 - \eta.$$

9. Die Ausdehnung des obigen Satzes auf die Summe von Wahrscheinlichkeitsgrößen mit beliebigen endlichen Mittelwerten und Streuungen ist unmittelbar. Es ergibt sich der folgende allgemeine Satz:

Satz V. *Es seien $U_1(x), U_2(x), \ldots, U_n(x)$ die Verteilungsfunktionen der Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots, u_n$, die endliche Mittelwerte und Streuungen besitzen. $U(x)$ sei die Verteilungsfunktion der Summe $u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, und es werde gesetzt*

$$\int x \, dU_\mu(x) = b_\mu, \qquad \sum_{\mu=1}^{n} b_\mu = B_n$$

$$\int x^2 \, dU_\mu(x + b_\mu) = \sigma_\mu^2, \quad \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_\mu^2 = r_n^2.$$

Wenn die positive Zahl ε beliebig klein gegeben ist, ist es möglich, eine positive Zahl η so zu bestimmen, daß für jedes x

$$\left| U(r_n x + B_n) - \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} dt \right| < \varepsilon,$$

sobald nur

$$\int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{\tau} x^2 \, dU_\mu(r_n x + b_\mu) > 1 - \eta.$$

Um die Richtigkeit des Satzes einzusehen, bemerke man, daß die Wahrscheinlichkeitsgrößen, deren Verteilungsfunktionen $U_\mu(r_n x + b_\mu)$ sind, alle Bedingungen des § 2 erfüllen, und daß $U(r_n x + B_n)$ die Verteilungsfunktion ihrer Summe ist. Wenn man den Satz IV auf diese neuen Größen anwendet, ergibt sich unmittelbar das obige Resultat.

10. Wenden wir den erhaltenen Satz auf eine gegebene unendliche Reihe von Wahrscheinlichkeitsgrößen $u_1, u_2, \ldots$ mit den Verteilungsfunktionen $U_1(x), U_2(x), \ldots$ an, so ergibt sich mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungen und der Annahme der Endlichkeit der Mittelwerte und Streuungen das Resultat, daß *gleichmäßig für alle* x

$$\lim_{n=\infty} U(r_n x + B_n) = \int^{x} \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\, dt$$

wenn

$$\lim_{n=\infty} \int_0^1 d\tau \sum_{\mu=1}^{n} \int_{-\tau}^{+\tau} x^2\, d\, U_\mu(r_n x + b_\mu) = 1\,.$$

Man erkennt ohne Schwierigkeit, daß dieses Resultat eine Erweiterung des im Eingange dieser Arbeit erwähnten Satzes von Liapounoff bildet.

(Eingegangen am 20. November 1921.)