

Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung durch Vergleich derselben mit einer neuen Methode, welche zu den nämlichen Lösungen führt.

Von

B. TURKSMA in Amsterdam.

Die Beweise, welche man für die Lagrange'sche Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung gewöhnlich giebt, sind nicht entscheidend*), weil man bloss zeigt, dass die gefundenen Lösungen den Forderungen des Problems genügen, nicht aber dass sie die einzigen sind. Der Vergleich der Lagrange'schen Methode mit einer im Folgenden entwickelten neuen Methode wird aber zeigen, dass sie wirklich alle Lösungen des Problems liefert.

Die Lagrange'sche Methode.

1. Man kann bekanntlich immer voraussetzen, dass sowohl in dem gegebenen Integrale als auch in den Bedingungsgleichungen von den unbekannten Functionen keine höheren Differentialquotienten als die ersten auftreten. Kommen nämlich ursprünglich höhere Differentialquotienten vor, so braucht man nur die niederen Differentialquotienten einer jeden unbekannten Function neuen abhängigen Variabeln gleichzusetzen und dafür diese Definitionsgleichungen dem Problem als neue

*) Indessen müssen wir A. Mayer's „Begründung der Lagrange'schen Multiplicatorenmethode in der Variationsrechnung“ Math. Ann. Bd. 26, S. 74 (1886) ausnehmen. Seine völlig befriedigende Begründung war uns unbekannt als wir, von der Unzulänglichkeit der gewöhnlichen Behandlungsweise der Lagrange'schen Methode überzeugt, den auch von ihm angestrebten Zweck zu erreichen versuchten. Weil uns das nun auf so ganz verschiedenem Wege gelungen ist, halten wir es nicht für nutzlos, auch unsere Methode der Oeffentlichkeit zu übergeben. So wie wir, hat Mayer erkannt, dass es darauf ankommt, die Bedingung, dass nicht allein die $n - m$ unabhängigen Variationen, sondern auch die m übrigen an den Grenzen Null werden sollen, in Rechnung zu bringen, und er hat das wirklich mittelst seiner Gleichungen (10) und (12) gethan.

Bedingungsgleichungen hinzuzufügen. Dann erhält man wieder den früheren Fall. Wir stellen daher das Problem also:

Gegeben ist

$$(1) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') dx,$$

wo die Accente Differentiationen nach x bezeichnen und die Functionen y_1, y_2, \dots, y_n m gegebenen Gleichungen:

(2) $\Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m)$ unterworfen sind. Die Grenzen x_1 und x_2 , sowie die Anfangs- und Endwerthe der Functionen y sind entweder fest gegeben oder veränderlich. Im letzteren Falle sind in der Regel auch diesen Grössen gewisse Bedingungsgleichungen vorgeschrieben.

Es fragt sich, welche Functionen von x hat man für die y zu setzen, damit V stationär werde?

Nach der Lagrange'schen Methode bildet man:

$$(3) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} \left(F + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \Phi_i \right) dx$$

und

$$(4) \quad \delta V = \int_{x_1}^{x_2} \left(F + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \Phi_i \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \right) \delta y_k \\ + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n} \delta y_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k'} \right) \right\},$$

und sagt nun gewöhnlich: Damit V stationär sei, muss es es auch sein, wenn man die Grenzen festhält, in welchem Falle δV sich auf das letzte Integral von (4) reducirt. Man kann dann die Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ so bestimmen, dass die Coefficienten von m von den Variationen δy verschwinden. Das Integral enthält dann nur $n - m$ Variationen, und weil zwischen den n Variationen nur diejenigen m Bedingungen bestehen, welche durch Variation aus den Gleichungen (2) entspringen, kann man die $n - m$ übrigen als ganz willkürlich betrachten. Man erhält so die n Gleichungen

$$(5) \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k'} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k'} \right) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

welche mit den m Gleichungen (5) zusammen $n + m$ simultane Differentialgleichungen bilden.

2. Die also gefundenen Lösungen werden gewiss den Forderungen des Problems genügen, weil man dafür gesorgt hat, dass sie δV zum Verschwinden bringen, so dass die durch die Lagrange'sche Methode erhaltenen Lösungen ohne Zweifel richtig sind. Die Beweisführung giebt aber keine Sicherheit, dass sie die einzig möglichen Lösungen sind. Denn, wenn man die Grenzen festhalten will, hat man kein Recht zu sagen, dass die $n - m$ übrigen Variationen ganz willkürlich genommen werden können, da nicht bloss diese Variationen selbst an den Grenzen Null werden müssen, sondern auch die m übrigen Variationen, welche mit ihnen durch die, aus der Variation von (2) entspringenden Gleichungen verbunden sind, von dem Werthe Null an der einen Grenze zum Werthe Null an der zweiten Grenze gehen müssen. Es ist klar, dass dies im Allgemeinen nicht erreicht werden kann, wenn die $n - m$ Variationen vollkommen willkürlich gewählt sind; denn die variirten Gleichungen (2) sind bei gegebenen Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \dots, \delta y_{n-m}$ Differentialgleichungen erster Ordnung für $\delta y_{n-m+1}, \dots, \delta y_n$. Ihre Lösung enthält also nur m Constanten, welche Zahl nicht hinreichend ist, den $2m$ Bedingungen (dass die Anfangs- und Endwerthe der Variationen $\delta y_{n-m+1}, \dots, \delta y_n$ Null sein sollen) zu genügen.

Da also diese Variationen nicht ganz willkürlich genommen werden können, so hat man auch keine Sicherheit, dass ihre Coefficienten einzeln Null sein müssen. Es wäre ja möglich, dass es Functionen y_1, y_2, \dots, y_n gäbe, für welche

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{n-m} \delta y_k \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y'_k} \right) \right\}$$

Null wäre, wenn man diese zwischen den Variationen $\delta y_1, \dots, \delta y_n$ bestehende Abhängigkeit berücksichtigt, aber nicht Null, wenn dieselbe ausser Acht gelassen wird, und diese Lösungen wären mit der Lagrange'schen Methode nicht zu finden.

3. Bevor wir an eine genauere Behandlung des Problems gehen, aus der erhellen wird, dass solche Lösungen nicht existiren, wollen wir im einfachsten Falle, d. h. bei zwei unbekannten Functionen mit einer Bedingungsgleichung

$$(6) \quad \Phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0,$$

zeigen, wie wenig Freiheit man in der Wahl der Variation δy_1 hat, wenn die Anfangs- und Endwerthe von δy_1 und δy_2 Null sein sollen. Nehmen wir nämlich an, dass nur zwischen zwei nahe an einander liegenden Werthen ξ_1 und ξ_2 von x variirt wird, indem der übrige Theil des Integrals ungeändert bleibt, so darf man bekanntlich in der variirten Gleichung (6)

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial \Phi}{\partial y_2'} \delta y_2' \\ \equiv A_1 \delta y_1 + A_2 \delta y_2 + B_1 \delta y_1' + B_2 \delta y_2' = 0$$

in erster Annäherung δy_1 und δy_2 vernachlässigen gegen $\delta y_1'$ und $\delta y_2'$, und A_1, A_2, B_1 und B_2 als Constanten betrachten. Man hat dann in erster Annäherung

$$\delta y_2' = - \frac{B_1}{B_2} \delta y_1',$$

also

$$\delta y_2' = - \frac{B_1}{B_2} \delta y_1 + \eta$$

(wobei η eine kleine Grösse zweiter Ordnung ist). Durch Substitution dieses Werthes von δy_1 in (7) erhält man zur Bestimmung von η , weil auch der Anfangs- und Endwerth von η Null sein muss und also η wieder klein ist gegen η' ,

$$B_2 \eta' + \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1 - B_2 \frac{d}{dx} \frac{B_1}{B_2}}{B_2} \delta y_1 = 0, \\ \text{oder}$$

$$\eta = - \int_{\xi_1}^x \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1 - B_2 \frac{d}{dx} \frac{B_1}{B_2}}{B_2^2} \delta y_1 dx,$$

also ist für $\xi_1 < x \leq \xi_2$ angenähert:

$$(8) \quad \delta y_2 = - \frac{B_1}{B_2} \delta y_1 - \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1 - B_2 \frac{d}{dx} \frac{B_1}{B_2}}{B_2^2} \int_{\xi_1}^x \delta y_1 dx.$$

Damit daher δy_2 ebenso wie δy_1 Null sei für $x = \xi_2$, muss δy_1 so genommen werden, dass annähernd $\int_{\xi_1}^{\xi_2} \delta y_1 dx = 0$, d. h. dass der Inhalt des Stückchens über der ursprünglichen Curve PQR gleich demjenigen wird, welches darunter liegt*). (Siehe Figur.)

*) Diese Bedingung zeigt zugleich den Fehler in der folgenden Entwicklung, welche beim ersten Anblick richtig erscheint.

Man soll die Functionen y_1 und y_2 bestimmen, für welche, bei festen Grenzwerten,

$$(1) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$$

stationär wird unter der Bedingung

$$(2) \quad \Psi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0.$$

Man bringt in der üblichen Weise δV auf die Form:

Die neue Methode und die Identität ihrer Resultate mit denen der Lagrange'schen Methode.

4. Anstatt dass wir nun, wie es Herrn A. Mayer gelungen ist, auf directem Wege die Richtigkeit der Lagrange'schen Methode zu beweisen versuchen, gehen wir dazu über, eine neue von der Lagrange'schen unabhängigen Methode zu entwickeln, die uns zu Lösungen desselben Problems führt. Indem man bei der Lagrange'schen Methode, wie wir zeigten, freier variirt als eigentlich erlaubt ist, sodass richtige Lösungen entslüpfen können, schränken wir bei der neuen Methode die Variationen mehr als nöthig ein (wenigstens fehlt der Beweis, dass alle erlaubten Arten von Variationen auf diese Weise erhalten werden können) wodurch à priori die Möglichkeit entsteht, dass man Lösungen erhalten könnte, welche wegfallen würden, wenn man die Variationen

$$\delta V = \int_{x_1}^{x_2} (P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2) dx = 0$$

oder, wenn man die Variationen beschränkt auf ein kleines Stückchen zwischen x und $x + \Delta x$, annähernd

$$(3) \quad \delta V = P_1 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_1 dx + P_2 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_2 dx = 0.$$

Man erhält weiter aus (2) durch Variation und Integration

$$\int_x^{x+\Delta x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2} \delta y_2 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1'} \delta y_1' + \frac{\partial \Psi}{\partial y_2'} \delta y_2' \right) dx = 0$$

und bringt durch partielle Integration auch dieses Integral auf die Form

$$\int_x^{x+\Delta x} (Q_1 \delta y_1 + Q_2 \delta y_2) dx = 0$$

oder annähernd

$$(4) \quad Q_1 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_1 dx + Q_2 \int_x^{x+\Delta x} \delta y_2 dx = 0.$$

Damit (3) und (4) gleichzeitig erfüllt seien, muss nothwendig

$$\frac{P_1}{Q_1} = \frac{P_2}{Q_2}$$

sein, woraus zusammen mit (2) y_1 und y_2 zu bestimmen wären.

Dieses Resultat ist nicht richtig, eben weil in diesem Falle $\int \delta y_1 dx$ und $\int \delta y_2 dx$ in erster Annäherung Null sein müssen.

Man sieht hieraus, dass die Auffassung, die $n - m$ Variationen könnten ganz willkürlich genommen werden, zu falschen Resultaten führen kann, wenn dies auch bei der Ableitung der Lagrange'schen Methode nicht der Fall ist.

nicht so sehr einschränkte. Unter den erhaltenen Lösungen müssen aber die richtigen gewiss vorkommen. Aus dem nachträglichen Beweise, dass die durch die neue Methode erhaltenen Lösungen dieselben sind, welche die Lagrange'sche uns giebt, ergibt sich dann schliesslich die Richtigkeit von beiden.

Der Grundgedanke der neuen Methode besteht darin, die Variationen $\delta y_1, \delta y_2, \dots \delta y_n$ durch Hilfsfunctionen so auszudrücken dass den variirten Bedingungsdifferentialgleichungen genügt und zugleich die Variation des gegebenen Integrals zum Verschwinden gebracht wird.

Bevor wir die Methode für den allgemeinen Fall von n Functionen und m Bedingungsgleichungen auseinandersetzen, erscheint es uns wünschenswerth, zuerst einige besondere Fälle zu behandeln.

Einfachster Fall, zwei unbekannte Functionen und eine Bedingungsgleichung.

5. Wir haben in diesem Falle die Functionen y_1 und y_2 so zu bestimmen, dass

$$(9) \quad V = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y_1, y_2, y_1', y_2') dx$$

stationär wird unter der Bedingung

$$(10) \quad \Phi(x, y_1, y_2, y_1', y_2') = 0.$$

Schreibt man hier und im Folgenden zu Abkürzung

$$\frac{\partial F}{\partial y_k} = Q_k, \quad \frac{\partial F}{\partial y_k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y_k'} = P_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k} = A_k, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_k'} = B_k,$$

so hat man

$$(11) \quad \delta V = \int_{x_1}^{x_2} F dx + \int_{x_1}^{x_2} (Q_1 \delta y_1 + Q_2 \delta y_2) + \int_{x_1}^{x_2} (P_1 \delta y_1 + P_2 \delta y_2) dx,$$

während die Variation der Gleichung (13) giebt

$$(12) \quad A_1 \delta y_1 + A_2 \delta y_2 + B_1 \delta y_1' + B_2 \delta y_2' \\ \equiv (A_1 - B_1') \delta y_1 + (A_2 - B_2') \delta y_2 + \frac{dB_1 \delta y_1}{dx} + \frac{dB_2 \delta y_2}{dx} = 0.$$

Wir setzen jetzt

$$(13) \quad \delta y_1 = \alpha_1 z + \frac{d\beta_1 z}{dx}, \quad \delta y_2 = \alpha_2 z + \frac{d\beta_2 z}{dx}$$

und versuchen die Grössen α und β so zu bestimmen, dass die Gleichung (12) durch die Werthe (13) identisch erfüllt werde.

Durch Substitution dieser Werthe von δy_1 und δy_2 in (12) findet man nach einfachen Reductionen

$$(14) \quad \left\{ (A_1 - B_1') \alpha_1 - (A_1' - B_1'') \beta_1 + (A_2 - B_2') \alpha_2 - (A_2' - B_2'') \beta_2 \right\} z \\ + \frac{d \{ B_1 \alpha_1 + (A_1 - 2B_1') \beta_1 + B_2 \alpha_2 + (A_2 - 2B_2') \beta_2 \} z}{dx} \\ + \frac{d^2 (B_1 \beta_1 + B_2 \beta_2) z}{dx^2} = 0.$$

Welchen Werth daher z auch habe, wir werden (14) und damit (12) genügen, wenn gleichzeitig

$$(15) \quad (A_1 - B_1') \alpha_1 - (A_1' - B_1'') \beta_1 + (A_2 - B_2') \alpha_2 - (A_2' - B_2'') \beta_2 = 0,$$

$$(16) \quad B_1 \alpha_1 + (A_1 - 2B_1') \beta_1 + B_2 \alpha_2 + (A_2 - 2B_2') \beta_2 = 0,$$

und

$$(17) \quad B_1 \beta_1 + B_2 \beta_2 = 0$$

ist. Durch dieselbe Substitution (13) nimmt aber (11) die folgende Gestalt an

$$(18) \quad \delta V = \left| F dx + \right|_{x_1}^{x_2} \left\{ Q_1 \left(\alpha_1 z + \frac{d\beta_1 z}{dx} \right) + Q_2 \left(\alpha_2 z + \frac{d\beta_2 z}{dx} \right) \right\} \\ + \int_{x_1}^{x_2} z (P_1 \beta_1 + P_2 \beta_2) \\ + \int_{x_1}^{x_2} z (P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 - P_1' \beta_1 - P_2' \beta_2) dx.$$

Damit nun δV verschwinde für alle Variationen (13), deren Coefficienten den Bedingungen (15), (16) und (17) genügen, muss es auch verschwinden, wenn wir die Grenzwerte fest halten, in welchem Falle δV sich reducirt auf

$$\int_{x_1}^{x_2} z (P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 - P_1' \beta_1 - P_2' \beta_2) dx.$$

Da z über den ganzen Integrationsweg willkürlich genommen werden kann, ausgenommen, dass es an den beiden Grenzen zugleich mit seiner ersten Ableitung Null werden muss, so muss also, damit V stationär sei,

$$(19) \quad P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 - P_1' \beta_1 - P_2' \beta_2 = 0$$

sein. Sind (15), (16) und (17) erfüllt, so muss (19) es von selbst sein, dies führt zu der Gleichung:

$$(20) \quad \begin{vmatrix} P_1, & P_2, & -P_1', & -P_2', \\ A_1 - B_1', & A_2 - B_2', & -(A_1' - B_1''), & -(A_2' - B_2''), \\ B_1, & B_2, & A_1 - 2B_1', & A_2 - 2B_2', \\ 0, & 0, & B_1, & B_2, \end{vmatrix} = 0$$

welche mit (10) verbunden y_1 und y_2 bestimmt.

Diese Bedingung (20) kommt nun aber darauf hinaus, dass es 3 Functionen λ , λ_1 und λ_2 giebt, welche den 4 Gleichungen

$$(21) \quad P_1 + (A_1 - B_1')\lambda + B_1\lambda_1 = 0,$$

$$(22) \quad P_2 + (A_2 - B_2')\lambda + B_2\lambda_1 = 0,$$

$$(23) \quad -P_1' - (A_1' - B_1'')\lambda + (A_1 - 2B_1')\lambda_1 + B_1\lambda_2 = 0,$$

$$(24) \quad -P_2' - (A_2' - B_2'')\lambda + (A_2 - 2B_2')\lambda_1 + B_2\lambda_2 = 0$$

genügen. Differenzirt man (21), so erhält man

$$P_1' + (A_1' - B_1'')\lambda + (A_1 - B_1')\lambda' + B_1'\lambda_1 + B_1\lambda_1' = 0$$

und hieraus durch Addition von (23)

$$(A_1 - B_1')(\lambda' + \lambda_1) + B_1'(\lambda_1' + \lambda_2) = 0,$$

ebenso ergibt sich aus (22) und (24)

$$(A_2 - B_2')(\lambda' + \lambda_1) + B_2'(\lambda_1' + \lambda_2) = 0,$$

also folgt, ausser in ganz besonderen Ausnahmefällen,

$$\lambda_1 = -\lambda', \quad \lambda_2 = -\lambda_1' = \lambda'',$$

d. h. die Gleichungen (21) und (22) sind die nämlichen wie die, welche die Lagrange'sche Methode liefert, während aus ihrer Differentiation die Gleichungen (23) und (24) hervorgehen*).

Der Fall von n unbekannten Functionen und einer Bedingungsgleichung.

6. Man hat

$$(25) \quad \delta V = \int_{x_1}^{x_2} F dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta y_k + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n} P_k \delta y_k,$$

und die Bedingungsgleichung

$$(26) \quad \Phi(x, y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n') = 0$$

ergiebt:

$$(27) \quad \sum_{k=1}^{k=n} A_k \delta y_k + \sum_{k=1}^{k=n} B_k \delta y_k' = 0.$$

Wiederum setzen wir

$$(28) \quad \delta y_k = \alpha_k z + \frac{d\beta_k}{dx} z \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

und versuchen wieder die Grössen α und β so zu bestimmen, dass der Gleichung (27) genügt werde, welchen Werth z auch habe. Dies fordert

*) Der Gedanke auf diese Weise die Identität der beiden Lösungen zu beweisen, verdanken wir Herrn A. Mayer. Ursprünglich hatten wir einen anderen Weg dazu eingeschlagen.

$$(29) \quad \sum_{k=1}^{k=n} (A_k - B'_k) \alpha_k - \sum_{k=1}^{k=n} (A'_k - 2B'_k) = 0,$$

$$(30) \quad \sum_{k=1}^{k=n} B_k \alpha_k + \sum_{k=1}^{k=n} (A_k - 2B'_k) \beta_k = 0$$

und

$$(31) \quad \sum_{k=1}^{k=n} B_k \beta_k = 0$$

während die Forderung, dass δV gleich Null sei, verlangt

$$(32) \quad \sum_{k=1}^{k=n} P_k \alpha_k - \sum_{k=1}^{k=n} P'_k \beta_k = 0.$$

Sind also (29), (30) und (31) erfüllt, so muss, nach den Bedingungen des Problems, (32) es von selbst sein; dies führt zur Matrixbedingung

$$(32) \quad \left\| \begin{array}{cccccc} P_1, & P_2, & \dots, & -P'_1, & \dots, & -P'_n, \\ A_1 - B'_1, & A_2 - B'_2, & \dots, & -(A'_1 - B''_1), & \dots, & -(A'_n - B''_n), \\ B_1, & B_2, & \dots, & A_1 - 2B'_1, & \dots, & A_n - 2B'_n, \\ 0, & 0, & \dots, & B_1, & \dots, & B_n, \end{array} \right\| = 0$$

welche wieder mit (26) zur Bestimmung von y_1, \dots, y_n genügt.

Um die Identität mit der Lagrange'schen Lösung zu beweisen, bemerken wir wieder, dass diese Matrixbedingung aussagt, dass es 3 Functionen λ , λ_1 und λ_2 giebt, welche den $2n$ Gleichungen

$$(34) \quad P_k + \lambda(A_k - B'_k) + \lambda_1 B_k = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

$$(35) \quad -P'_k - \lambda(A'_k - B''_k) + \lambda_1(A_k - 2B'_k) + \lambda_2 B_k = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

genügen. Differenzirt man (38) und addirt (39) so ergibt sich

$$(A_k - B'_k)(\lambda' + \lambda_1) + B_k(\lambda'_1 + \lambda_2) = 0 \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

woraus wieder im Allgemeinen folgt:

$$\lambda_1 = -\lambda', \quad \lambda_2 = -\lambda'_1 = \lambda'',$$

d. h. aber nichts anderes als dass die Gleichungen (34) mit denen von Lagrange übereinstimmen.

Der Fall von n unbekannten Functionen und m Bedingungsgleichungen.

7. Man hat wieder

$$(36) \quad \delta V = \int_{x_1}^{x_2} F dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1}^{k=n} Q_k \delta y_k + \int_{x_1}^{x_2} dx \sum_{k=1}^{k=n} P_k \delta y_k.$$

während die Variation der m Bedingungsgleichungen giebt

$$(37) \quad \sum_{k=1}^{k=n} A_{ki} \delta y_k + \sum_{k=1}^{k=n} B_{ki} \delta y'_k = 0. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Man setze nun für $k=1, 2, \dots, n$

$$(38) \quad \delta y_k = \alpha_{k0} z + \frac{d\alpha_{k1} z}{dx} + \frac{d^2 \alpha_{k2} z}{dx^2} + \dots + \frac{d^s \alpha_{ks} z}{dx^s}$$

und versuche wieder durch Substitution dieser Werthe der δy in (37) die Grössen α so zu bestimmen, dass die Gleichungen (37) von selbst erfüllt werden, welche Function auch für z genommen werden möge.

Nun ist

$$\begin{aligned} A_k \frac{d\alpha_{k1} z}{dx} &= \frac{d}{dx} [A_k \alpha_{k1} z] - A'_k \alpha_{k1} z, \\ A_k \frac{d^2 \alpha_{k2} z}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left[A_k \frac{d\alpha_{k2} z}{dx} \right] - A'_k \frac{d\alpha_{k2} z}{dx} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} [A_k \alpha_{k2} z] - \frac{d}{dx} [A'_k \alpha_{k2} z] - \frac{d}{dx} [A'_k \alpha_{k2} z] + A''_k \alpha_{k2} z \\ &= \frac{d^2}{dx^2} [A_k \alpha_{k2} z] - 2 \frac{d}{dx} [A'_k \alpha_{k2} z] + A''_k \alpha_{k2} z, \end{aligned}$$

und, wie man leicht ersieht, allgemein

$$\begin{aligned} A_k \frac{d^p \alpha_{kp} z}{dx^p} &= \frac{d^p}{dx^p} [A_k \alpha_{kp} z] + (-1)^1 \frac{p}{1} \frac{d^{p-1}}{dx^{p-1}} [A_k \alpha_{kp} z] \\ &\quad + (-1)^2 \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} \frac{d^{p-2}}{dx^{p-2}} [A'_k \alpha_{kp} z] + \dots \\ &\quad + (-1)^q \frac{p(p-1) \dots (p-q+1)}{q!} \frac{d^{p-q}}{dx^{p-q}} [A_k^{(q)} \alpha_{kp} z] + \dots \end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} A_k \delta y_k &= z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^p A_k^{(p)} \alpha_{kp} \\ &\quad + \frac{d}{dx} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=1}^{p=s} (-1)^{p-1} \cdot \frac{p}{1} \cdot A_k^{(p-1)} \alpha_{kp} \right] \\ &\quad + \frac{d^2}{dx^2} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=2}^{p=s} (-1)^{p-2} \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} A_k^{(p-2)} \alpha_{kp} \right] + \dots \\ &\quad + \frac{d^q}{dx^q} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=q}^{p=s} (-1)^{p-q} \frac{p(p-1) \dots (p-q+1)}{q!} A_k^{(p-q)} \alpha_{kp} \right] + \dots \end{aligned}$$

oder, weil wir die Summation nach p auch von $p=0$ bis $p=s$ nehmen können, da für $p < q$ der Binomialcoefficient

$$\frac{p(p-1)\dots(p-q+1)}{q!}$$

verschwindet,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} A_k \delta y_k &= z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^p A_k^{(p)} \alpha_{kp} \\ &+ \frac{d}{dx} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p-1} \frac{p}{1} A_k^{(p-1)} \alpha_{kp} \right] \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p-2} \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} A_k^{(p-2)} \alpha_{kp} \right] + \dots \end{aligned}$$

Ebenso findet man

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{k=n} B_k \delta y'_k &= z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p+1} B_k^{(p+1)} \alpha_{kp} \\ &+ \frac{d}{dx} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^p \frac{p+1}{1} B_k^{(p)} \alpha_{kp} \right] \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p-1} \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} B_k^{(p-1)} \alpha_{kp} \right] + \dots, \end{aligned}$$

sodass die Gleichungen (37) übergehen in

$$\begin{aligned} (39) \quad 0 &= z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^p (A_{ki}^{(p)} - B_{ki}^{(p+1)}) \alpha_{kp} \\ &+ \frac{d}{dx} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p-1} \left(\frac{p}{1} A_{ki}^{(p-1)} - \frac{p+1}{1} B_{ki}^{(p)} \right) \alpha_{kp} \right] \\ &+ \frac{d^2}{dx^2} \left[z \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{p=0}^{p=s} (-1)^{p-2} \left(\frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} A_{ki}^{(p-2)} - \frac{(p+1)p}{1 \cdot 2} B_{ki}^{(p-1)} \right) \alpha_{kp} \right] + \dots, \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{aligned}$$

Welchen Werth z auch habe, wir werden diesen Gleichungen genügen, wenn für $i = 1, 2, \dots, m$

$$(-1)^s P_k^{(s)} + \sum_{i=1}^{i=m} (-1)^s (A_{ki}^{(s)} - B_{ki}^{(s+1)}) \lambda_{i0} + \sum_{q=1}^{q=s+1} \sum_{i=1}^{i=m} [C_{kipq} \lambda_{iq}]_{p=s} = 0.$$

Differenzirt man aber für $r = 0, 1, \dots, s-1$ die $(r+1)^{\text{te}}$ Gleichung und addirt die $(r+2)^{\text{te}}$, so erhält man nach einigen Reductionen die n Systeme von s Gleichungen:

$$(43) \quad \sum_{i=1}^{i=m} (A_{ki} - B_{ki}) (\lambda'_{i0} + \lambda_{i1}) + \sum_{q=1}^{q=s} \sum_{i=1}^{i=m} [C_{kipq} (\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1})]_{p=0} = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} (-1)^{s-1} (A_{ki}^{(s-1)} - B_{ki}^{(s)}) (\lambda'_{i0} + \lambda_{i1}) + \sum_{q=1}^{q=s} \sum_{i=1}^{i=m} [C_{kipq} (\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1})]_{p=s-1} = 0$$

$$(k = 1, 2, \dots, n).$$

Wir wollen nun die Zahl s so wählen, dass man den Gleichungen (43) im Allgemeinen nicht genügen kann ohne die $m(s+1)$ Grössen $\lambda'_{iq} + \lambda_{i,q+1}$ gleich Null zu setzen. Hierzu ist nothwendig

$$ns \geq m(s+1),$$

oder

$$(44) \quad (n-m)(s+1) \geq n. *$$

Durch die Formeln $\lambda_{i,q+1} = -\lambda'_{iq}$ gehen aber die n ersten Gleichungen von (42) über in:

$$(45) \quad P_k + \sum_{i=1}^{i=m} (A_{ki} - B_{ki}) \lambda_{i0} - \sum_{i=1}^{i=m} B_{ki} \lambda'_{i0} = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

und das sind eben gerade die Gleichungen von Lagrange, während man, wenn man diese differenzirt, die übrigen Gleichungen (42) erhält.

8. Bisher haben wir uns nur mit der Herleitung der Differentialgleichungen beschäftigt, welche die Functionen y_1, y_2, \dots, y_n bestimmen. Dazu konnten wir x_1, x_2 und die Grenzwerte von y_1, y_2, \dots, y_n als fest betrachten. Die Functionen, welche den gefundenen Differentialgleichungen genügen, enthalten dann im Allgemeinen noch $2n$ Integrationsconstanten und es handelt sich, wenn diese Grenzwerte veränderlich sind, nur noch um Variationen der Grenzen x_1, x_2 und der $2n$ Integrationsconstanten. Lassen wir nur diese Grenzen und Constanten variiren, während wir uns für die Functionen y und λ ihre Werthe, wie sie sich aus den Differentialgleichungen ergeben, eingesetzt denken, so reducirt sich δV auf die Glieder

*) Man kommt folglich wie früher mit $s=1$ aus, solange $n \geq 2m$ ist.

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(F + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \Phi_i \right) dx + \int_{x_1}^{x_2} \sum_{k=1, \dots}^{k=n} \left(\frac{\partial F}{\partial y_k} + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial y_k} \right) \delta y_k$$

und es ist hinreichend und auch nothwendig, dass diese Glieder für alle durch die Grenzbedingungen erlaubten Aenderungen der Grenzen von x_1 , x_2 und der Grenzwerte von y_1 , y_2 , \dots , y_n verschwinden. Hiermit ist die Methode von Lagrange auch für veränderliche Grenzen begründet.

Ich erwähne zum Schluss, dass dieser Aufsatz ein Abschnitt ist aus meiner Dissertation, die der Anregung meines hochverehrten Lehrers Prof. Dr. D. J. Korteweg ihre Entstehung verdankt. Ich darf nicht unterlassen, ihm hier meinen besten Dank ganz besonders für die Hülfe auszusprechen, die er mir bei der Bearbeitung dieses Abschnittes bereitwilligst zu Theil werden liess, dessen Hauptidee ich ihm verdanke.