
ANCORA SULLE FUNZIONI AD INFINITI VALORI.

Nota del dott. **Giulio Vivanti**, a Mantova.

Adunanza del 12 agosto 1888.

TEOREMA. — *Qualunque funzione analitica monogena (nel senso dato a questa parola da Weierstrass) prende per ogni valore della variabile un insieme enumerabile di valori, ossia è della prima classe (*).*

La dimostrazione di questo teorema si basa sulle seguenti due osservazioni.

a) Sia R la riemanniana d'una funzione analitica monogena $y=f(x)$. Un punto di diramazione P di essa dà luogo al passaggio, per mezzo di un moto elicoidale, da un foglio a più altri *successivamente*. Se ora si considerano i fogli che si congiungono nel punto P come disposti nell'ordine in cui li incontriamo nel moto elicoidale, si vede che essi formano una serie semplice, la quale corrisponde elemento ad elemento alla serie finita od infinita: $1, 2, \dots, n, \dots$. Cioè:

I fogli della R che si congiungono in un punto di diramazione costituiscono un insieme enumerabile.

b) Prendasi a considerare un foglio A della R . Ciascuno dei punti di diramazione che si trovano in questo foglio deve ammettere un in-

(*) Questo teorema, di cui io sospettava l'esistenza, mi fu comunicato recentemente dal ch.^{mo} prof. Giorgio Cantor, il quale nello stesso tempo mi esortava a tentarne dal mio canto la dimostrazione.

torno piccolo a piacere ma finito, entro il quale non v'ha alcun altro punto di diramazione; cioè i punti di diramazione del foglio A costituiscono un insieme *isolato*. Ma un tale insieme è, come si sa (*), sempre della 1^a classe, dunque:

I punti di diramazione posti in un foglio qualunque della R costituiscono un insieme enumerabile.

Dalle due osservazioni precedenti risulta che ciascun foglio della R è in comunicazione immediata con un insieme enumerabile di fogli. Ciascuno di questi alla sua volta è in comunicazione immediata con un sistema enumerabile di fogli; e così di seguito. Da qui si deduce facilmente, in base ai principi della teoria degli aggregati, che ciascun foglio della R è in comunicazione, immediata o no, con un insieme enumerabile di fogli. Ma, poichè y è funzione monogena, ciascun foglio della R dev'essere in comunicazione, immediata o no, con tutti gli altri fogli; dunque:

I fogli della R costituiscono un insieme enumerabile; o, in altre parole: La y è una funzione di prima classe.

È da notarsi che, ogni qualvolta si è parlato di un insieme enumerabile, si è inteso comprendere tacitamente il caso particolare d'un insieme finito. Così, per esempio, se y è un integrale abeliano, l'insieme dell'osservazione b) è finito; lo è invece quello dell'osservazione a), se y è la funzione inversa d'un integrale abeliano.

Mantova, 30 luglio 1888.

G. VIVANTI.

(*) Vedi Cantor nei *Mathematische Annalen*, t. XXI, p. 52 (o negli *Acta Mathematica*, t. II, p. 373), Teorema I.