11.

Zweiter Nachtrag zu der Theorie der analytischen Facultäten (Bd. 35 und 38).

(Von Herrn Dr. *Öttinger*, Prof. ord. an der Universität zu Freiburg im Breisgau.)

(Schlufs der Abhandlung No. 2 im vorigen Hefte.)

---

§. 11.

Integrale des Binomiums $(ax+b)^n$.

Wir stellen die Integrale des Binomiums $(ax+b)^n$ hier vorerst ohne Rücksicht auf Constanten in der zur Anwendung brauchbarsten Form zusammen. Sie werden auf dem früher bezeichneten Wege gefunden und sind folgende:

$$(1.)\quad \int^r (ax+b)^n\,(\partial x)^r = \frac{(ax+b)^{n+r}}{(n+r)^{r|-1}a^r} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r},$$

$$(2.)\quad \int^r (ax+b)^{\frac{n}{m}}(\partial x)^r = \frac{m^r(ax+b)^{\frac{n}{m}+r}}{(n+m)^{r|m}a^r},$$

$$(3.)\quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n\,(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^{n|q}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n|q}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(4.)\quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{n}{m}}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(5.)\quad \int^r \frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{-n+r}}{(-1)^r(n-r)^{r|1}a^r} = \frac{1^{n-r-1|1}(ax+b)^{-n+r}}{(-1)^r\,1^{n-1|1}a^r},$$
$$= \frac{1^{-n|1}(ax+b)^{-n+r}}{1^{-n+r|1}a^r},$$

$$(6.)\quad \int^r \frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{m^r(ax+b)^{r-\frac{n}{m}}}{(m-n)^{r|m}a^r} = \frac{m^r(ax+b)^{r+\frac{n}{m}}}{(m-n)(2m-n)\dots(rm-n)a^r},$$

$$(7.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-1|q}}{(-)^{\frac{p}{q}}q^{n-1|q}a^{\frac{p}{q}}(ax+b)^{n-\frac{p}{q}}}$$
$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)(2q-p)\dots((n-1)q-p)}{(-1)^{\frac{p}{q}}q.2q\dots(n-1)q\sqrt[q]{a^p}(ax+b)^{n-\frac{p}{q}}},$$

$$(8.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{(ax+b)^{\frac{n}{m}}}}.$$

Besondere Fälle sind:

$$(9.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(10.)\quad \int^{\frac{1}{2}} (ax+b)^n (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,.\,2^{n|2}(ax+b)^n\sqrt{(ax+b)}}{1^{n+1|2}\sqrt{(a\pi)}},$$

$$(11.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{n-1|2}\sqrt{(\pi(ax+b))}}{2^{n-1|2}(ax+b)^n\sqrt{(-a)}},$$

$$(12.)\quad \int^{r+s} (ax+b)^n (\partial x)^{r+s} = \frac{(ax+b)^{n+r+s}}{(n+r+s)^{r+s|-1}a^{r+s}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+s}}{1^{n+r+s|1}a^{r+s}};$$

$$(13.)\quad \int^{r+s} (ax+b)^{\frac{n}{m}} (\partial x)^{r+s} = \frac{m^{r+s}(ax+b)^{r+s+\frac{n}{m}}}{a^{r+s}(n+m)^{r+s|m}},$$

$$(14.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}}(p+q)^{n+r|q}a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(15.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^{\frac{n}{m}} (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}+\frac{n}{m}}}{1^{\frac{p}{q}+\frac{n}{m}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}\left(1+\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}},$$

$$(16.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^n} = \frac{(ax+b)^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}(n-r-s)^{r+s|1}a^{r+s}}$$

$$= \frac{1^{n-r-s-1|1}(ax+b)^{-n+r+s}}{(-1)^{r+s}1^{n-1|1}a^{r+s}} = \frac{1^{-n|1}(ax+b)^{-n+r+s}}{1^{-n+r+s|1}a^{r+s}},$$

$$(17.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{m^{r+s}(ax+b)^{-\frac{n}{m}+r+s}}{(m-n)^{r+s|m}a^{r+s}},$$

$$(18.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^n} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}(ax+b)^{n-r-\frac{p}{q}}a^r\sqrt[q]{a^p}} \text{ für } n>r$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}1^{-\frac{p}{q}|1}q^{r-n+1}(ax+b)^{r-n+\frac{p}{q}}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{n-1|1}p^{r-n+1|q}a^r\sqrt[q]{a^p}} \text{ für } r>n,$$

$$(19.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{n}{m}}} = \frac{1^{-\frac{n}{m}|1}(ax+b)^{r-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}}}{1^{-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}|1}\left(1-\frac{n}{m}+\frac{p}{q}\right)^{r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(20.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(21.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^r}{(-1)^r p^{r|q} a^r\sqrt[q]{a^p}},$$

Alle in (§. 9. und 10.) gefundenen Bestimmungen über die Gültigkeit und Darstellbarkeit der dort entwickelten Ausdrücke und über die Ordnung im Integriren finden auch hier ohne Beschränkung Anwendung.

Die Harmonie zwischen den Differentialen (§. 5.) und den Integralen des Binomiums $(ax+b)^n$ zeigt sich auch hier ganz deutlich.

§. 12.

Fortsetzung.

Um die Constanten in die Entwicklung aufzunehmen, ist es am besten, von dem ersten Integrale zu den höhern überzugehen. Das Integral soll dabei immer von 0 bis x genommen werden. Man erhält dann

$$\int (ax+b)^n\,\partial x = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C_1 = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} - \frac{b^{n+1}}{(n+1)a},$$

$$\int^2 (ax+b)^n(\partial x)^2 = \int\left(\frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a} + C_1\right)\partial x + C_2 = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)(n+1)^2} + C_1 x + C_2$$

$$= \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)^{2|-1}a^2} - \frac{b^{n+1}x}{(n+1)a} - \frac{b^{n+2}}{(n-2)^{2|-1}a^2}.$$

Geht man auf diesem Wege weiter, so ergiebt sich folgende allgemeine Gleichung:

$$(1.)\quad \int^r (ax+b)^n(\partial x)^r = \int^r (ax+b)^n(\partial x)^r + \int^{r-1} C_1(\partial x)^{r-1}$$
$$+ \int^{r-2} C_2(\partial x)^{r-2} + \int^{r-3} C_3(\partial x)^{r-3} + \cdots$$
$$\cdots + \int^2 C_{r-2}(\partial x)^2 + \int C_{r-1}\partial x + \int^0 C_r(\partial x)^0,$$

oder nach (1. §. 9.)

$$(2.)\quad \int^r (ax+b)^n(\partial x)^r = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1}a^r} + \frac{C_1 x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{C_2 x^{r-2}}{1^{r-2|1}} + \frac{C_3 x^{r-3}}{1^{r-3|1}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{C_{r-2}x^2}{1\,.\,2} + C_{r-1}x + C_r.$$

Diese Entwicklung, obgleich nur auf eine bestimmte Function angewendet, läfst sich, wie leicht zu sehen, auf jede andere ausdehnen. Daraus ist zu entnehmen, dafs mit einem Integrale von der ersten Ordnung auch r Constanten von der in (1.) verzeichneten Form verbunden sind.

C_1 ist die Constante, welche die erste Integration (Integral der ersten Ordnung), C_2 die, welche die zweite Integration der Function (Integral der zweiten Ordnung) für sich liefert u. s. w. C_k ist daher die Constante des Integrals von der $k$ten Ordnung für sich. Es ist also nicht nöthig, alle Integrale zu durchlaufen, um die Constanten darzustellen, sondern nur das Gesetz anzugeben, wonach sie im einzelnen Falle gebildet werden. Dies geschieht, wenn man das $k$te Integral der gegebenen Function sucht und $x=0$ setzt. Demnach ist im Allgemeinen:

$$(3.)\quad C_k = \int^k f(x=0)(\partial x)^k,$$

$$(4.)\quad \int^{r-k} C_k(\partial x)^{r-k} = \frac{C_k x^{r-k}}{1^{r-k|1}} = \int^{r-k}\Big[\int^k f(x=0)(\partial x)^k\Big](\partial x)^{r-k}.$$

Für die Gleichung (1. oder 2.) ist

$$(5.)\quad \int^{r-k} C_k(\partial x)^k = \int^{r-k}\Big(\frac{1^{n|1}b^{n+k}}{1^{n+k|1}a^k}\Big)(\partial x)^{r-k} = \frac{1^{n|1}b^{n+k}x^{r-k}}{1^{n+k|1}1^{r-k|1}a^k},$$

und es ergiebt sich aus (1. oder 2.) folgender entwickelte Ausdruck:

$$(6.)\quad \int^r (ax+b)^n(\partial x)^r = \frac{1}{1.2\dots r}\Big[\Big(\frac{r}{n+r}\Big)_r \frac{(ax+b)^{n+r}}{a^r}$$
$$-\Big(\frac{r}{n+1}\Big)_1\frac{b^{n+1}x^{r-1}}{a} - \Big(\frac{r}{n+2}\Big)_2\frac{b^{n+2}x^{r-2}}{a^2} - \dots - \Big(\frac{r}{n+k}\Big)_k\frac{b^{n+k}x^{r-k}}{a^k} - \dots$$
$$\dots - \Big(\frac{r}{n+r-1}\Big)_{r-1}\frac{b^{n+r-1}x}{a^{r-1}} - \Big(\frac{r}{n+r}\Big)_r\frac{b^{n+r}}{a^r}\Big],$$

wenn der Kürze wegen

$$\Big(\frac{r}{n+k}\Big)_k = \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)} = \frac{r^{k|-1}}{(n+k)^{k|-1}}$$

gesetzt wird. Diese Erörterungen führen zu dem folgenden Satze:

(7.) ***Ein Integral von der $r$ten Ordnung hat r Constanten.***

Die Constanten der Integrale, deren Exponenten echte ***Brüche*** sind, werden auf gleiche Weise wie bei den Integralen mit ganzen Exponenten gefunden und man erhält

$$\int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}a^{\frac{p}{q}}} + C \quad\text{und}\quad C = -\frac{1^{n|1}b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{a^p}}.$$

Es ist daher

$$(8.)\quad \int^{\frac{p}{q}} (ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{a^p}} - \frac{1^{n|1}b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}\sqrt[q]{a^p}}.$$

Das vorliegende Integral hat also *nur eine* Constante. Dies rechtfertigt sich einerseits dadurch, dafs nach allen bisherigen Entwickelungen die Entwicklung eines Differentials oder Integrals, dessen Exponent ein echter Bruch ist, als eine in sich abgeschlossene, einheitliche Rechnung zu betrachten ist, welche nicht durch Wiederholung geschehen, oder in mehrere andere Rechnungen zerlegt werden soll; andrerseits aus dem in (7.) angegebenen Gesetze, welches jedenfalls den Schlufs in sich begreift, dafs ein solches Integral höchstens *eine*, wenigstens *nicht mehr als eine* Constante haben kann. Die Unterdrückung aller und jeder Constanten für (8.) steht aber offenbar mit den Elementen des Integrirens im Widerspruche. Hierdurch dürfte folgender Satz gerechtfertigt werden:

(9.) *Ein Integral, dessen Exponent ein echter Bruch ist, hat nur eine Constante.*

Da nun ein Integral, dessen Exponent ein echter Bruch ist und in dem Schema (10. §. 2.) in dem Intervall 0 und 1 liegt, nur eine Constante hat, so läfst sich mit dieser Bemerkung auf das Intervall (1 und 2) übergehen und folgern, dafs ein Integral, dessen Exponent in dasselbe fällt, nach (8. und 9.) zwei Constanten hat u. s. w. Diese Schlüsse führen zu folgendem Satze:

(10.) *Ein Integral, dessen Exponent in das Intervall r und $r+1$ fällt, hat $r+1$ Constanten.*

In den Sätzen (8 bis 10.) ist die ganze Lehre von den *Constanten* enthalten; die sich auf eine sehr einfache Weise ergiebt und wie von selbst sich feststellt. *Liouville* nennt sie „fonctions complémentaires" und behandelt sie sehr weitläufig (Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 94—106).

Wir setzen die Stelle her, in welcher er die Resultate seiner Untersuchung über die Constanten (p. 94) niederlègt.

„Relativement aux différentielles à indices quelconques, j'ai très-long-„temps regardé la question des fonctions complémentaires comme la plus diffi-„cile de toutes les questions primordiales qui se présentent dans le nouveau „calcul. Je crois être pourtant parvenu à la résoudre enfin d'une manière „fort simple, après avoir découvert la singulière analogie des fonctions algé-„briques entières et des fonctions exponentielles à exposans infiniments petits, „telle que je l'ai établie dans le paragraphe précédent. Je rappelle en con-„séquence que cette analogie consiste en ce que toute fonction exponentielle, „à exposans infiniments petits, peut-être transformée en une fonctions algé-

„brique entière, et vice versâ. Voici le théorème auquel je suis arrivé: *La „fonction complémentaire qu'il faut ajouter à la différentielle d'un ordre „quelconque μ, est une fonction algébrique entière d'un nombre limité de „termes dont les coëfficiens sont arbitraires. Cette fonction se réduit à „zéro quand μ est entier positif, et a:*

$$C_0 + C_1 x + C_1 x^2 + \cdots + C_{n-1} x^{n-1}$$

„quand μ est un nombre entier négatif $-n$. Mais en général, le nombre „des termes qu'elle renferme est indéterminé, quoiqu'il ne puisse pas être „infini. Le sens précis qu'il faut attacher au théorème énoncé, sera nettement „fixé par la démonstration que je vais en donner en exposant la suite des „idées qui me l'ont fait connaître."

Man wird in der That überrascht, ihn von schwierigen Fragen bei einer so einfachen Sache reden zu hören. Dergleichen ist allerdings möglich, wenn man künstliche und verwickelte Wege statt einfacher und elementarer betritt. Bei allen seinen Erörterungen entwickelt *Liouville* nur den Satz (8.), und diesen nicht concis. Die beiden andern, von gebrochenen Exponenten, (9 und 10) hat er übersehen. Die Behauptung, dafs ein *Differential keine Constante* habe, versteht sich von selbst. Aus gleichem Grunde kennt er auch den Satz (29. §. 4.) nicht, worauf der Calcul führt und der als ein Analogon der hier gegebenen zu betrachten ist.

Wir nehmen jetzt unsere Untersuchung wieder auf.

Nach den in (3 bis 5.) entwickelten Gesetzen lassen sich die Constanten für jede besondere Form des Binomiums $(ax+b)^n$ finden. Für $(ax+b)^{\frac{n}{m}}$, $(ax+b)^{-n}$ u. s. w. sind sie

$$(11.)\quad \int^{r-k} C_k(\partial x)^{r-k} = \frac{b^{\frac{n}{m}+k}\, x^{r-k}}{\left(\frac{n}{m}+k\right)^{k|-1} 1^{r-k|1}\, a^k}$$

$$= \frac{1}{1^{r|1}} \left(\frac{r}{\frac{n}{m}+k}\right)_k \frac{b^{\frac{n}{m}+k}\, x^{r-k}}{a^k},$$

$$(12.)\quad \int^{r-k} C_k(\partial x)^{r-k} = \frac{b^{-n+k}\, x^{r-k}}{(-n+k)^{k|-1} 1^{r-k|1}\, a^k} = \frac{1}{1^{r|1}} \left(\frac{r}{-n+k}\right)_k \frac{b^{-n+k}\, x^{r-k}}{a^k}$$

u. s. w.; woraus sich die besondern Formen für (1. und 2.) leicht ergeben.

Es ist noch zu untersuchen, welchen Einflufs die verschiedene Ordnung der Ausführung des Integrirens auf die Resultate hat. Aus (1.) folgt unmittelbar

$$(13.)\quad \int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}$$
$$=\int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}+\int^{r+s-1}C_1(\partial x)^{r+s-1}+\int^{r+s-2}C_2(\partial x)^{r+s-2}+\cdots$$
$$\cdots+\int^{r+s-k}C_k(\partial x)^{r+s-k}+\cdots+\int C_{r+s-1}\partial x+C_{r+s}.$$

Hier gilt die Bedingung, dafs k nicht gröfser als $r+s$ sein darf. Wäre es gröfser, so entständen Integrale mit negativen Exponenten; d. h. sie gingen in Differentiale über, und dies widerspräche der Aufgabe.

Zur Bestimmung der Constanten in (13.) dient

$$(14.)\quad \int^{r+s-k}C_k(\partial x)^{r+s-k}$$
$$=\int^{r+s-k}\Big[\int^k f(x=0)(\partial x)^k\Big](\partial x)^{r+s-k} = \frac{1^{n|1}b^{n+k}x^{r+s-k}}{1^{n+k|1}1^{r+s-k|1}a^k}.$$

Integrirt man $(ax+b)^n$ zuerst nach r und dann nach s, so erhält man (13.). Integrirt man zuerst nach s und dann nach r, so ergiebt sich

$$(15.)\quad \int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r}$$
$$=\int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r}+\int^{s+r-1}C_1(\partial x)^{s+r-1}+\int^{s+r-2}C_2(\partial x)^{s+r-2}+\cdots$$
$$\cdots+\int^{s+r-k}C_k(\partial x)^{s+r-k}+\cdots+\int C_{s+r-1}\partial x+C_{s+r},$$

und man sieht die Identität von (13. und 15.). Die Gleichung (14.) bleibt in Kraft und man hat in Rücksicht auf die Constanten:

$$(16.)\quad \int^{r+s}(ax+b)^n(\partial x)^{r+s}=\int^{s+r}(ax+b)^n(\partial x)^{s+r};$$

d. h. die Ordnung im Integriren ist bei ganzem r und s gleichgültig und es findet sich bei verschiedener Ordnung das gleiche Resultat. Dieser Satz behält seine Gültigkeit für jedes beliebige n, unter den für letzteres bekannten Restrictionen. Anders wird sich der Fall gestalten, wenn s ein *echter* **Bruch** ist.

Hält man sich zuerst an die Formeln (13. und 14.), betrachtet $r+\frac{p}{q}$ als zusammengehörig und setzt allmälig $1, 2, 3, \ldots r, r+\frac{p}{q}$, so ergiebt sich

$$(17.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$
$$=1^{n|1}\Bigg[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}}-\frac{b^{n+1}x^{r-1}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+1|1}1^{r+\frac{p}{q}-1|1}a}-\frac{b^{n+2}x^{r-2}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+2|1}1^{r+\frac{p}{q}-2|1}a^2}-\cdots$$
$$\cdots-\frac{b^{n+k}x^{r-k}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+k|1}1^{r+\frac{p}{q}-k|1}a^k}-\cdots-\frac{b^{n+r}\sqrt[q]{x^p}}{1^{n+r|1}1^{\frac{p}{q}|1}a^r}-\frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}}\Bigg].$$

Setzt man aber allmälig die Werthe $\frac{p}{q}$, $1+\frac{p}{q}$, $\dots r+\frac{p}{q}$ statt k, so wird:

$$(18.) \quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= 1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1} a^{r+\frac{p}{q}}} - \frac{b^{n+\frac{p}{q}} x^r}{1^{n+\frac{p}{q}|1} 1^{r|1} \sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}} x^{r-1}}{1^{n+\frac{p}{q}+1|1} 1^{r-1|1} a \sqrt[q]{a^p}} - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \frac{b^{n+k+\frac{p}{q}} x^{r-k}}{1^{n+\frac{p}{q}+k|1} 1^{r-k|1} a^k \sqrt[q]{a^p}} - \dots - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}} x}{1^{n+\frac{p}{q}+r-1|1} a^{r-1} \sqrt[q]{a^p}} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}+r|1} a^{r+\frac{p}{q}}}\right].$$

Die Verschiedenheit von (17. und 18.) liegt deutlich vor. Sie ist durch die verschiedene Ordnung im Integriren bedingt.

Man kann auch zu $\int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$ gelangen, wenn man zuerst nach r und dann nach $\frac{p}{q}$ integrirt. Dies giebt

$$\int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = 1^{n|1} \int^{\frac{p}{q}} \left[\frac{(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1} a^r} - \frac{b^{n+1} x^{r-1}}{1^{n+1|1} 1^{r-1|1}} - \frac{b^{n+2} x^{r-2}}{1^{n+2|1} 1^{r-2|1} a^2} - \dots \right.$$

$$\left. \dots - \frac{b^{n+k} x^{r-k}}{1^{n+k|1} 1^{r-k|1} a^k} - \dots - \frac{b^{n+r-1} x}{1^{n+r-1|1} a^{r-1}} - \frac{b^{n+r}}{1^{n+r|1} a^r}\right] (\partial x)^{\frac{p}{q}}.$$

Wird nach $\frac{p}{q}$ integrirt und die Constante für

$$\int^{\frac{p}{q}} \frac{(ax+b)^{n+r}}{1^{n+r|1} a^r} (\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

zugezählt, so ist

$$(19.) \quad \int^{r+\frac{p}{q}} (ax+b)^n (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= 1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1} a^{r+\frac{p}{q}}} - \frac{b^{n+1} x^{r-1+\frac{p}{q}}}{1^{n+1|1} 1^{r-1+\frac{p}{q}|1} a} - \frac{b^{n+2} x^{r-2+\frac{p}{q}}}{1^{n+2|1} 1^{r-2+\frac{p}{q}|1} a^2} - \dots \right.$$

$$\dots - \frac{b^{n+k} x^{r-k+\frac{p}{q}}}{1^{n+k|1} 1^{r-k+\frac{p}{q}|1} a^k} - \dots - \frac{b^{n+r-1} x^{1+\frac{p}{q}}}{1^{n+r-1|1} 1^{1+\frac{p}{q}|1} a^{r-1}}$$

$$\left. - \frac{b^{n+r} x^{\frac{p}{q}}}{1^{n+r|1} 1^{\frac{p}{q}|1} a^r} - \frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1} a^{r+\frac{p}{q}}}\right].$$

Eben so läfst sich $(ax+b)^n$ zuerst nach $\frac{p}{q}$ und dann nach r integriren.

Dies giebt

$$\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}=\int^r\left(\int^{\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}}\right)\partial x^r$$

$$=\int^r\left(\frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}a^{\frac{p}{q}}}-\frac{1^{n|1}b^{n+\frac{p}{q}}}{1^{n+\frac{p}{q}|1}a^{\frac{p}{q}}}\right)(\partial x)^r.$$

Wird nun für die eingeklammerten Ausdrücke allmälig das $r$te Integral durch wiederholtes Integriren entwickelt, so erhält man

$$(20.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$=\frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}}+\int^r C_{\frac{p}{q}}(\partial x)^r+\int^{r-1}C_{1+\frac{p}{q}}(\partial x)^{r-1}+\cdots$$

$$+\int^{r-k}C_{k+\frac{p}{q}}(\partial x)^{r-k}+\cdots+\int C_{r-1+\frac{p}{q}}\partial x+C_{r+\frac{p}{q}}$$

$$=1^{n|1}\left[\frac{(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^{r+\frac{p}{q}}}-\frac{b^{n+\frac{p}{q}}x^r}{1^{n+\frac{p}{q}|1}1^{r|1}\sqrt[q]{a^p}}-\frac{b^{n+r+\frac{p}{q}}x^{r-1}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}1^{r-1|1}a\sqrt[q]{a^p}}-\cdots\right.$$

$$\left.\cdots-\frac{b^{n+k+\frac{p}{q}}x^{r-k}}{1^{n+k+\frac{p}{q}|1}1^{r-k|1}a^k\sqrt[q]{a^p}}-\cdots-\frac{b^{n+\frac{p}{q}+r-1}x}{1^{n+\frac{p}{q}+r-1|1}a^{r-1}\sqrt[q]{a^p}}-\frac{b^{n+r}\sqrt[q]{b^p}}{1^{n+\frac{p}{q}+r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}}\right].$$

Auch dieser Ausdruck ist von (19.) verschieden. Dagegen stimmen (19. und 17.) und (20. und 18.) überein.

Aufser den genannten Entwicklungsarten lassen sich auch folgende benutzen:

$$(21.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}=\frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}\left(\int^{r+1}(ax+b)^n(\partial x)^{r-1}\right)$$

$$=\frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^p}}+\frac{C_1x^{r-1+\frac{p}{q}}}{1^{r-1+\frac{p}{q}|1}}+\frac{C_2x^{r-2+\frac{p}{q}}}{1^{r-2+\frac{p}{q}|1}}+\cdots+\frac{C_rx^{\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}}+C_{r+\frac{p}{q}},$$

$$(22.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}=\int^{r+1}\left(\frac{\partial^{1-\frac{p}{q}}}{(\partial x)^{1-\frac{p}{q}}}(ax+b)^n\right)(\partial x)^{r+1}$$

$$=\frac{1^{n|1}(ax+b)^{n+r+\frac{p}{q}}}{1^{n+r+\frac{p}{q}|1}a^r\sqrt[q]{a^q}}+\frac{C_1x^r}{1^{r|1}}+\frac{C_2x^{r-1}}{1^{r-1|1}}+\cdots+\frac{C_{r-1}x^2}{1.2}+C_rx+C_{r+\frac{p}{q}}.$$

Auch diese Ausdrücke fallen mit (17 bis 20.) zusammen und man sieht die oben ausgesprochene Behauptung auf drei unter sich verschiedenen Wegen bestätigt. Die in (17 bis 22.) gegebenen Entwicklungen gelten nicht blofs für ein ganzes positives, sondern für jedes beliebige n. Dies giebt den Satz:

(23.) Die verschiedene Ordnung bei Darstellung des $\left(r+\frac{p}{q}\right)$ten Integrals von $(ax+b)^n$ ist nicht gleichgültig und man wird durch

$$\int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} \quad \text{und} \quad \int^{r+\frac{p}{q}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{p}{q}+r}$$

auf verschiedene Formen bei Berücksichtigung der Constanten geführt. Bei der Darstellung *bestimmter* Integrale darf man das Gesagte nicht übersehen. Specielle Fälle lassen sich leicht entwickeln. Es ist z. B.

$$(24.)\quad \int^{\frac{1}{2}}(ax+b)^n(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,.\,2^{n|2}}{1^{n+1|2}\sqrt{(a\pi)}}\left((ax+b)^n\sqrt{(ax+b)}-b^n\sqrt{b}\right)$$

u. s. w.

§. 13.

Integrale der Logarithmen.

Auf die in (§. 9.) angegebene Weise erhält man:

$$(1.)\quad \int^r\frac{(\partial x)^r}{x^r} = \frac{\log x}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}}.$$

r unterliegt hier keiner Beschränkung. Man hat daher für ein gebrochenes r:

$$(2.)\quad \int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{\log x}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}p\log x}{q\,1^{\frac{p}{q}|1}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}\log x^{\frac{p}{q}}}{1^{\frac{p}{q}|1}}.$$

Ferner hat man für jedes ganze und gebrochene r folgende Formen:

$$(3.)\quad \int^r\frac{(\partial x)^r}{x^r} = \frac{\log x^n}{(-1)^{r-1}n\,1^{r-1|1}} = \frac{\log x^r}{(-1)^{r-1}1^{r|1}} = \frac{\log\frac{1}{x}}{(-1)^r1^{r-1|1}} = \frac{\log\frac{1}{x^r}}{(-1)^r1^{r|1}}$$

$$= \frac{\log ax}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}} = \frac{\log(ax)^r}{(-1)^{r-1}1^{r|1}}.$$

Eben so ist.

$$(4.)\quad \int^r\frac{(\partial x)^r}{(ax+b)^r} = \frac{\log(ax+b)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}a^r} = \frac{\log(ax+b)^n}{(-1)^{r-1}n1^{r-1|1}a^r} = \frac{\log\frac{1}{ax+b}}{(-1)^r1^{r-1|1}a^r},$$

$$(5.)\quad \int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\log(ax+b)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\log(ax+b)^n}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}n1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\log\frac{1}{ax+b}}{(-1)^{\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}},$$

$$(6.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{x^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{q^r \log x}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p^{r|q}} = \frac{q^r \log x^{r+\frac{p}{q}}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}\, 1^{\frac{p}{q}|1}\, (p+q)^{r|q}}$$

$$= \frac{\log \frac{1}{x}\cdot q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p^{r|q}},$$

$$(7.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{q^r \log (ax+b)}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p^{r|q}\, a^r \sqrt[q]{a^p}}$$

$$= \frac{q^r \log (ax+b)^{r+\frac{p}{q}}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}}\, 1^{\frac{p}{q}|1}\, (p+q)^{r|q}\, a^r \sqrt[q]{a^p}} = \frac{q^r \log \frac{1}{ax+b}}{(-1)^{r+\frac{p}{q}}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}\, p^{r|q}\, a^r \sqrt[q]{a^p}}.$$

Sodann ergiebt sich aus (1. und 4.)

$$(8.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{x^r} = \int^s \frac{\log x\, (\partial x)^s}{(-1)^{r-1}\, 1^{r-1|1}},$$

$$(9.)\quad \int^{r+s} \frac{(\partial x)^{r+s}}{(ax+b)^r} = \int^s \frac{\log (ax+b)\, (\partial x)^s}{(-1)^{r-1}\, 1^{r-1|1}\, a^r},$$

$$(10.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{t+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \int^r \frac{\log x\, (\partial x)^r}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}},$$

$$(11.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \int^r \frac{\log (ax+b)\, (\partial x)^r}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\, 1^{\frac{p}{q}-1|1}\, \sqrt[q]{a^p}}.$$

Diese Gleichungen weisen auf die höhern Integrale von $\log x$ und $\log (ax+b)$ hin.

Stellt man den hier gefundenen Resultaten alle schon in den frühern Paragraphen erhaltenen zur Seite, so ergiebt sich

$$(12.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = 1^{-\frac{p}{q}|1} \quad (10.\ \S.\ 9.),$$

$$(13.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\, x^r}{1.2.3\ldots r} \quad (14.\ \S.\ 10.),$$

$$(14.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{x^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\, q^r}{(-1)^r p^{r|q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}\, q^r}{(-1)^r p(p+q)\ldots(p+(r-1)q)} \quad (15.\ \S.10.),$$

$$(15.)\quad \int^{\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{\sqrt[q]{a^p}} \quad (9.\ \S.11.),$$

$$(16.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r\sqrt[q]{a^p}} \quad (20.\ \S.11.),$$

$$(17.)\quad \int^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^r}{(-1)^r p^{r|q} a^r \sqrt[q]{a^p}}$$

$$= \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}q^r}{(-1)^r p(p+q)\dots(p+(r-1)q)a^r\sqrt[q]{a^p}} \quad (21.\ \S.11.).$$

Man sieht leicht, dafs die hier gegebenen Integrale zwei verschiedene Werthe haben. Bei *Liouville* findet man sie nirgend erwähnt.

In allen diesen Darstellungen sind die Constanten aufser Acht gelassen. Sie folgen den in (§. 12.) aufgestellten Gesetzen.

§. 14.

Höhere Integrale von $\log x$ und $\log(ax+b)$.

Die höhern Integrale von $\log x$ ergeben sich auf folgende Weise:

$$\int \log x\ \partial x = x\log x - x,$$

$$\int^2 \log x(\partial x)^2 = \frac{x^2\log x}{1.2} - \frac{3x^2}{1.2.1.2},$$

$$\int^3 \log x(\partial x)^3 = \frac{x^3\log x}{1.2.3} - \frac{11x^3}{1.2.3.1.2.3},$$

$$\int^4 \log x(\partial x)^4 = \frac{x^4\log x}{1.2.3.4} - \frac{50x^4}{1.2.3.4.1.2.3.4},$$

u. s. w., wie sich Dies leicht durch Differentiation zeigt. Dies führt auf die allgemeine Form

$$(1.)\quad \int^r \log x(\partial x)^r = \frac{x^r\log x}{1^{r|1}} - \frac{A_r x^r}{1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Die Darstellung dieses Integrals beruht auf der Angabe des Zahlen-Ausdrucks A_r. Die nähere Untersuchung zeigt, dafs derselbe auf folgende Weise zusammengesetzt ist:

$$A_1 = 1,$$

$$\frac{A_2}{1.2.1.2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{A_1}{1}\right) = \frac{1+2}{1.2.1.2} = \frac{C(1,\ 2)^1}{1.2.1.2},$$

$$\frac{A_3}{1.2.3.1.2.3} = \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{1.2.3} + \frac{A_2}{1.2.1.2}\right) = \tfrac{1}{3}\left(\frac{1.2+3A_2}{1.2.3.1.2}\right) = \tfrac{1}{3}\,\frac{1.2+1.3+2.3}{1.2.3.1.2}$$

$$= \frac{C(1,\,2,\,3)^2}{1.2.3.1.2.3},$$

$$\frac{A_4}{1.2.3.4.1.2.3.4} = \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{1.2.3.4} + \frac{A_3}{1.1.3.1.2.3}\right) = \tfrac{1}{4}\,\frac{1.2.3+4A_3}{1.2.3.4.1.2.3}$$

$$= \frac{1.2.3+1.2.4+1.3.4+2.3.4}{1.2.3.4.1.2.3.4} = \frac{C(1,\,2,\,3,\,4)^3}{1.2.3.4.1.2.3.4},$$

$$\frac{A_5}{1.2\ldots5.1.2\ldots5} = \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{A_4}{1.2.3.4.1.2.3.4}\right) = \tfrac{1}{5}\,\frac{1.2.3.4+5.A_4}{1.2\ldots5.1.2.3.4}$$

$$= \frac{1.2.3.4+5.C(1,\,2,\,3,\,4)^3}{1.2\ldots5.1.2\ldots5} = \frac{C(1,\,2,\,3,\,4,\,5)^4}{1.2\ldots5.1.2\ldots5}.$$

Das Fortgangsgesetz liegt deutlich vor Augen und hat folgende Form:

$$(2.)\qquad \frac{A_r}{1^{r|1}1^{r|1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{1.2\ldots r} + \frac{A_{r-1}}{1.2\ldots(r-1)1.2\ldots(r-1)}\right) = \frac{1.2.3\ldots(r-1)+rA_{r-1}}{1.2\ldots r.1.2\ldots r}$$

$$= \frac{1.2\ldots(r-1)+rC(1,\,2,\ldots r-1)^{r-2}}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r}.$$

Nach der Combinationslehre ist

$$(3.)\qquad 1.2.3\ldots(r-1)+rC(1,\,2,\ldots r-1)^{r-2} = C(1,\,2,\,3,\ldots r)^{r-1},$$

denn es ist

$$C(a_1,\,a_2,\ldots a_r)^{r-1} = \begin{array}{l} a_1a_2\ldots\ldots a_{r-1} \\ a_1a_2\ldots\ldots a_{r-2}a_r \\ a_1a_2\ldots\ldots a_{r-3}a_{r-1}a_r \\ a_1a_2\ldots\ldots a_{r-4}a_{r-2}a_{r-1}a_r \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_1a_2a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \\ a_1a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \\ a_2a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1}a_r \end{array} \quad = \begin{array}{l} a_1a_2\ldots\ldots\ldots a_{r-1} \\ a_r\left|\begin{array}{l} a_1a_2\ldots\ldots a_{r-2} \\ a_1a_2\ldots\ldots a_{r-3}a_{r-1} \\ a_1a_2\ldots\ldots a_{r-4}a_{r-2}a_{r-1} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_1a_2a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1} \\ a_1a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1} \\ a_2a_3a_4\ldots a_{r-2}a_{r-1} \end{array}\right. \end{array}$$

$$= a_1a_2a_3\ldots a_{r-1} + a_rC(a_1,\,a_2,\,a_3,\ldots a_{r-1})^{r-2}.$$

Man erhält daher für das $r$te Integral von $\log x$:

$$(4.)\qquad \int^r \log x(\partial x)^r = \frac{x^r\log x}{1^{r|1}} - \frac{C(1,\,2,\,3,\ldots r)^{r-1}x^r}{1.2.3\ldots r.1.2.3\ldots r}.$$

Hier bedeutet $C(1,\,2,\,3,\ldots r)^{r-1}$ den Summen-Ausdruck für die Verbindungen ohne Wiederholungen aus den Elementen $1,\,2,\,3,\ldots r$ in der $r$ten Classe. Er findet sich wie folgt. Es ist

$$C(1, 2, 3, \dots r)^{r-1} = 1.2.3\dots r\left(\tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}\dots\frac{1}{r}\right)$$

und ferner, nach (S. 260, No. 556) meiner Lehre von den aufsteigenden Functionen:

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\dots\frac{1}{r} = \log r+\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\frac{1}{252r^6}\dots+C,$$

wenn $C = 0{,}5572156\dots$ ist. Hierdurch erhält man

$$(5.)\quad \int^r \log x(\partial x)^r = \frac{x^r\log x}{1^{r|1}}-\frac{x^r}{1^{r|1}}\left(\log r+\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\dots+C\right)$$

$$= \frac{x^r}{1.2.3\dots r}\cdot\log\frac{x}{r}-\frac{x^r}{1.2.3\dots r}\left(\frac{1}{2r}-\frac{1}{12r^2}+\frac{1}{120r^4}-\dots+C\right).$$

Für nicht sehr grofse r sind die Zahlen-Ausdrücke von $C(1, 2, 3, \dots r)^{r-1}$ am zweckmäfsigsten. Sie sind

$$(6.)\quad A_1=1,\ A_2=3,\ A_3=11,\ A_4=50,\ A_5=274,\ A_6=1764.$$

Die höhern Integrale von $\log(ax+b)$ ergeben sich nun leicht. Man erhält, *ohne **Rücksicht*** auf die Constanten:

$$(7.)\quad \begin{cases} \int \log(ax+b)\,\partial x = \dfrac{ax+b}{a}\log(ax+b)-\dfrac{ax+b}{a}, \\ \int^2 \log(ax+b)(\partial x)^2 = \dfrac{(ax+b)^2}{1.2.a^2}\log(ax+b)-\dfrac{3(ax+b)^2}{1.2.1.2.a^2}, \\ \int^3 \log(ax+b)(\partial x)^3 = \dfrac{(ax+b)^3}{1.2.3.a^3}\log(ax+b)-\dfrac{11(ax+b)^3}{1.2.3.1.2.3a^3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \int^r \log(ax+b)(\partial x)^r = \dfrac{(ax+b)^r}{1^{r|1}a^r}\log(ax+b)-\dfrac{C(1, 2, \dots r)^{r-1}(ax+b)^r}{1.2\dots r.1.2\dots ra^r}. \end{cases}$$

Mit Rücksicht auf die Constanten ist nach (§. 12.)

$$(8.)\quad \int^r \log(ax+b)(\partial x)^r = \frac{(ax+b)^r\log(ax+b}{1^{r|1}a^r}-\frac{C(1, 2, 3\dots r)^{r-1}(ax+b)^r}{1^{r|1}1^{r|1}a^r}$$

$$+\frac{C_1x^{r-1}}{1^{r-1|1}}+\frac{C_2x^{r-2}}{1^{r-2|1}}+\frac{C_3x^{r-3}}{1^{r-3|1}}+\dots+C_{r-1}x+C_r.$$

Hier ist

$$(9.)\quad C_{r-k} = -\frac{b^{r-k}}{1^{r-k|1}a^{r-k}}\left(\log b-\frac{C(1, 2, 3, \dots r-k)^{r-k-1}}{1^{r-k|1}}\right).$$

Benutzt man die hier gefundenen Werthe, so ergeben sich aus (10. und 12. §. 13.) folgende Ausdrücke:

$$
(10.)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{\log x}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\,1^{\frac{p}{q}-1|1}} = \frac{1}{M}\log x,\\
&\int^{1+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{1+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1}{M}(x\log x - x),\\
&\int^{2+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{2+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{x^3}{1.2M}\Big(\log x - \frac{3}{1.2}\Big),\\
&\int^{3+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{3+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{x^3}{1.2.3M}\Big(\log x - \frac{11}{1.2.3}\Big),\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int^{r+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{x^r}{1^{r|1}M}\Big(\log x - \frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1.2.3\dots r}\Big),
\end{aligned}\right.
$$

$$
(11.)\quad\left\{\begin{aligned}
&\int^{\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{\log(ax+b)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\,1^{\frac{p}{q}-1|1}\sqrt[q]{a^p}} = \frac{1}{N}\log(ax+b) + C_1,\\
&\int^{1+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{1+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{ax+b}{N.a}(\log(ax+b) - 1) + C_1 x + C_2,\\
&\int^{2+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{2+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{(ax+b)^2}{1.2.N.a^2}\Big(\log(ax+b) - \frac{3}{1.2}\Big)\\
&\qquad\qquad + \frac{C_1 x^2}{1.2} + C_2 x + C_3,\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\int^{r+\frac{p}{q}}\frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{(ax+b)^{\frac{p}{q}}} = \frac{(ax+b)^r}{1^{r|1}Na^r}\Big(\log(ax+b) - \frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1.2.3\dots r}\Big)\\
&\qquad\qquad + \frac{C_1 x^r}{1^{r|1}} + \frac{C_2 x^{r-1}}{1^{r-1|1}} + \frac{C_3 x^{r-2}}{1^{r-2|1}} + \dots
\end{aligned}\right.
$$

Die Constanten finden sich aus (9.) und nehmen noch den Factor $\frac{1}{N}$ in sich auf. Geht man auf specielle Fälle zurück, so erhält man:

$$(12.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}\log x}{\sqrt{\pi}}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}\,.\,x}{\sqrt{\pi}}(\log x - 1), \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}\,.\,x^2}{1.2\sqrt{\pi}}\left(\log x - \frac{3}{1.2}\right), \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{-1}\,.\,x^3}{1.2.3\sqrt{\pi}}\left(\log x - \frac{11}{1.2.3}\right), \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

$$(13.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(\pi a)}}\log(ax+b) - \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{(\pi a)}}\log b, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)\sqrt{-1}}{a.\sqrt{(\pi a)}}(\log(ax+b) - 1) \\ \qquad\qquad - \frac{x\sqrt{-1})\log b}{\sqrt{(\pi a)}} - \frac{b\sqrt{-1}}{a\sqrt{(\pi a)}}(\log b - 1), \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^2\sqrt{-1}}{1.2.a^2\sqrt{(\pi a)}}(\log(ax+b) - \tfrac{3}{2}) - \frac{C_1 x^2}{1.2} - C_2 x - C_3, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Den in (12.) gegebenen Ausdrücken stehen aus (13. §. 13.) folgende

$$(14.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} = x\sqrt{\pi}, \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^2\sqrt{\pi}}{1.2}, \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{x^3\sqrt{\pi}}{1.2.3}, \end{cases}$$

und den in (13.) gegebenen aus (16. §. 13.) folgende

$$(15.)\quad \begin{cases} \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}, \\ \int^{\frac{3}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)\sqrt{\pi}}{a\sqrt{a}} + C_1, \\ \int^{\frac{5}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^2\sqrt{\pi}}{1.2.3.a^2\sqrt{a}} + C_1 x + C_2, \\ \int^{\frac{7}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{7}{2}}}{\sqrt{(ax+b)}} = \frac{(ax+b)^3\sqrt{\pi}}{1.2.3.a^3\sqrt{a}} + \frac{C_1 x^2}{1.2} + C_2 x + C_3, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

zur Seite.

Von den in diesem und dem vorhergehenden Paragraphen gegebenen Darstellungen hat *Liouville* die zwei ersten Integrale von (No. 12. im Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 161 et 162) entwickelt. Das allgemeine Gesetz, welches hier vorgelegt ist, fand er aber nicht. Eben so wenig kennt er die zweite Art von Ausdrücken für die nämlichen Integrale, die in (No. 14. und 15.) zusammengestellt sind; denn er sagt nur, dafs die Integrale der vorstehenden Art auf Logarithmen führen.

Dafs die obigen Schlüsse richtig sind, soll nun auch noch durch Anwendung der in (20. und 21. §. 2.) angegebenen Verfahren nachgewiesen werden. Es ist

$$(16.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \int\Big(\frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\frac{1}{\sqrt{x}}\Big) = \int\Big(\frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{x}\Big)\partial x \,(11.\ §.\ 3.)$$
$$= \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{\pi}}\log x.$$

Ferner ist

$$(17.)\quad \int^{\frac{1}{2}} \frac{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\int\Big(\frac{\partial x}{\sqrt{x}}\Big) = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}2\sqrt{x} = 2.\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\,(6.\ §.3.),$$

(No. 16. und 17.) sind die in (12. und 4.) auf anderem Wege gefundenen Werthe. Aus den in diesem und in (§. 13 und §. 6.) gefundenen Resultaten geht hervor, dafs man bei Logarithmen nicht direct von den Differentialen auf die Integrale, und umgekehrt, übergehen kann. Hier gilt also der Satz

$$\int^{r} = \partial^{-r}$$

nicht.

§. 15.

Integrale von a^x, $\sin x$ und $\cos x$.

Folgende Ausdrücke finden sich leicht aus (§. 7. und 8.):

$$(1.)\quad \int^{r} a^x\,(\partial x)^r = \frac{a^x}{(\log a)^r},\qquad (4.)\quad \int^{r} e^{bx}\,(\partial x)^r = \frac{e^{bx}}{b^r},$$

$$(2.)\quad \int^{r} e^x\,(\partial x)^r = e^x,\qquad (5.)\quad \int^{r} a^{-x}\,(\partial x)^r = \frac{a^{-x}}{(-1)^r(\log a)^r},$$

$$(3.)\quad \int^{r} a^{bx}(\partial x)^r = \frac{a^{bx}}{b^r(\log a)^r},\qquad (6.)\quad \int^{r} a^{-bx}(\partial x)^r = \frac{a^{-bx}}{(-1)\,b^r(\log a)^r},$$

$$(7.)\quad \int^{r+s} a^{bx}(\partial x)^{r+s} = \frac{a^{bx}}{b^{r+s}(\log a)^{r+s}},$$

$$(8.)\quad \int^{r} \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{\sin(mx - r.\frac{1}{2}\pi)}{m^r},$$

$$(9.)\quad \int^{r} \cos mx\,(\partial x)^r = \frac{\cos(mx - r.\frac{1}{2}\pi)}{m^r},$$

$$(10.)\quad \int^{r+s} \sin mx (\partial x)^{r+s} = \frac{\sin(mx-(r+s)\frac{1}{2}\pi)}{m^{r+s}},$$

$$(11.)\quad \int^{r+s} \cos mx (\partial x)^{r+s} = \frac{\cos(mx-(r+s)\frac{1}{2}\pi)}{m^{r+s}}.$$

Die Gleichungen gelten für ganze und gebrochene r und s, und ohne Rücksicht auf Constanten, welche sich leicht finden lassen. Der Zusammenhang zwischen den Differentialen und Integralen dieser Functionen liegt deutlich vor.

Anwendungen.

§. 16.

Ohne Schwierigkeit lassen sich nun auch die Differentiale und Integrale höherer Ordnungen und mit *gebrochenen* Exponenten von *gebrochenen Functionen* geben, die sich in Partialbrüche zerlegen lassen. Wie letzteres geschehen kann, ist im 9ten, 10ten und 22ten Bande dieses Journals nachzusehen.

Soll beispielsweise

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{fx}{(x+b)^p x^n}$$

ausgedrückt werden, so erhält man, nach erfolgter Zerlegung der vorstehenden Function in Partialbrüche:

$$(1.)\quad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{fx}{(x+b)^p x^n} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\Big(\frac{B_1}{(x+b)^p}+\frac{B_2}{(x+b)^{p-1}}+\frac{B_3}{(x+b)^{p-2}}+\dots+\frac{B_p}{x+b}$$
$$+\frac{A_1}{x^n}+\frac{A_2}{x^{n-1}}+\frac{A_3}{x^{n-1}}+\dots+\frac{A_n}{x}\Big).$$

Das Gleiche gilt für die Integration, und es sind nur die bisher entwickelten Gesetze anzuwenden. Danach wird

$$(2.)\quad \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\frac{x^2+1}{x^3-x} = \frac{\partial^{\frac{1}{2}}}{(\partial x)^{\frac{1}{2}}}\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\Big)$$
$$=\tfrac{1}{2}\sqrt{-\pi}\Big(-\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{((x+1)^3)}}+\frac{1}{\sqrt{((x-1)^3)}}\Big).$$

$$(3.)\quad \int^{\frac{1}{2}}\frac{(x^2+1}{x^3-x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \int^{\frac{1}{2}}\Big(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-1}\Big)(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}\Big(-\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{(x+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(x-1)}}\Big).$$

Eben so ist

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\tfrac{1}{2}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}+\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^r\,.\,1^{r|1}}{2}\Big(\frac{1}{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}}+\frac{1}{(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^r\,.\,1^{r|1}}{2}\frac{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}+(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}{(x^2+a^2)^{r+1}}.$$

Hieraus folgt durch Entwicklung der Binomien

$$(4.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1^{r|1}}{(x^2+a^2)^{r+1}}(x^{r+1}-(r+1)_2 x^{r-1}a^2+(r+1)_4 x^{r-3}a^4\cdots).$$

Setzt man

$$x+a\sqrt{-1} = R(\cos z+\sin z\sqrt{-1}),$$
$$x-a\sqrt{-1} = R(\cos z-\sin z\sqrt{-1}),$$

so ist bekanntlich

$$R=\sqrt{(x^2+a^2)},\qquad \cos z=\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}},\qquad \sin z=\frac{a}{\sqrt{(x^2+a^2)}},$$

$$z=\arccos\frac{x}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\arcsin\frac{a}{\sqrt{(x^2+a^2)}}=\operatorname{arctang}\frac{a}{x},$$

und man erhält

$$(x+a\sqrt{-1})^{r+1}=R^{r+1}(\cos z+\sin z\sqrt{-1})^{r+1}=R^{r+1}(\cos(r+1)z+\sin(r+1)z\sqrt{-1}),$$
$$(x-a\sqrt{-1})^{r+1}=R^{r+1}(\cos z-\sin z\sqrt{-1})^{r+1}=R^{r+1}(\cos(r+1)z-\sin(r+1)z\sqrt{-1}).$$

Werden diese Werthe eingeführt, so ergiebt sich unter den genannten Bedingungen:

$$(5.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{x}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r\cos(r+1)z}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}} = \frac{1^{r|1}\cos((r+1)z+r\pi)}{(x^2+x^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Eben so erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^3} = \frac{-1}{2\sqrt{-1}}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}1^{r|1}}{2\sqrt{-1}}\Big(\frac{1}{(x+a\sqrt{-1})^{r+1}}-\frac{1}{(x-a\sqrt{-1})^{r+1}}\Big)$$

und hieraus durch Anwendung der oben gezeigten Entwicklungen:

$$(6.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r.a}{(x^2+a^2)^{r+1}}[(r+1)x^r-(r+1)_3 x^{r-2}a^2 +(r+1)_5 x^{r-4}a^4-\cdots],$$

$$(7.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}\frac{a}{x^2+a^2} = \frac{(-1)^r 1.2.3\ldots r\sin(r+1)z}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}} = \frac{1^{r|1}\sin((r+1)z+r\pi)}{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}(r+1)}}.$$

Die Gleichungen (4 bis 7.) gelten für jedes ganze und gebrochene r.

Um $\int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2} (\partial x)^{r+1}$ zu finden, hat man

$$\int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2} (\partial x)^{r+1} = \tfrac{1}{2} \int^{r+1} \Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}} + \frac{1}{x-a\sqrt{-1}} \Big) (\partial x)^{r+1}$$
$$= \tfrac{1}{2} \int^{r} (\log(x+a\sqrt{-1}) + \log(x-a\sqrt{-1})$$
$$= \frac{(x+a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}} \log(x+a\sqrt{-1}) - \frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x+a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}1^{r|1}}$$
$$+ \frac{(x-a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}} \log(x-a\sqrt{-1}) - \frac{C(1,2,3,\dots r)^{r-1}(x-a\sqrt{-1})^r}{2.1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$(x+a\sqrt{-1})^r + (x-a\sqrt{-1})^r = M+N = 2(x^r - (r)_2 a^2 x^{r-2} + (r)_4 x^{r-4} a^4 - \cdots),$$
$$(x+a\sqrt{-1})^r - (x-a\sqrt{-1})^r = M+N$$
$$= 2a\sqrt{-1}\,(rx^{r-1} - (r)_3 a^2 x^{r-3} + (r)_5 x^{r-5} a^5 - \cdots),$$
$$\log(x \pm a\sqrt{-1}) = \log x \pm \frac{a\sqrt{-1}}{x} - \frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} \pm \frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \frac{(a\sqrt{-1})^4}{4x^4} \pm \cdots,$$

so ergiebt sich

$$(x+a\sqrt{-1})^r \log(x+a\sqrt{-1}) = M\log x + M\frac{a\sqrt{-1}}{x} - M\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} + M\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \cdots$$
$$(x-a\sqrt{-1})^r \log(x-a\sqrt{-1}) = N\log x - N\frac{a\sqrt{-1}}{x} - N\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2} - N\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3} - \cdots$$

folglich

$$(x+a\sqrt{-1})^r \log(x+a\sqrt{-1}) + (x-a\sqrt{-1})^r \log(x-a\sqrt{-1})$$
$$= (M+N)\Big[\log x + \frac{a^2}{2x^2} - \frac{a^4}{4x^4} + \frac{a^6}{6x^6} - \cdots\Big]$$
$$+ (M+N)\sqrt{-1}\Big[\frac{a}{x} - \frac{a^3}{3x^3} + \frac{a^5}{5x^5} - \frac{a^7}{7x^7} + \cdots\Big]$$
$$= \tfrac{1}{2}(M+N)\Big[\log x^2 + \frac{2a^2}{2x^2} - \frac{2a^4}{4x^4} + \frac{2a^6}{6x^6} - \cdots\Big]$$
$$+ \tfrac{1}{2}(M-N)2\sqrt{-1}\Big[\frac{a}{x} - \frac{a^3}{3x^3} + \frac{a^5}{5x^5} - \frac{a^7}{7x^7} + \cdots\Big]$$
$$= \tfrac{1}{2}(M+N)\log(x^2+a^2) - \tfrac{1}{2}(M-N)\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Durch Einführung dieser Werthe erhält man

$$(8.)\quad \int^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1} = \frac{\log(x^2+a^2)}{2.1^{r|1}}\Big[x^r - (r)_2 x^{r-2} a^2 + (r)_4 x^{r-4} a^4 - \cdots\Big]$$
$$- \frac{a\sqrt{-1}}{2.1^{r|1}} \log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}\Big[rx^{r-1} - (r)_3 x^{r-3} a^2 + (r)_5 x^{r-5} a^4 - \cdots\Big]$$
$$- \frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\Big[x^r - (r)_2 x^{r-2} a^2 + (r)_4 x^{r-4} a^4 - \cdots\Big],$$

ohne Rücksicht auf Constanten, und wobei zu bemerken ist, dafs der zweite Ausdruck reell ist.

Führt man aber die oben angegebenen Ausdrücke des Sinus und Cosinus ein, so erhält man

$$\int^{r+1}\frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}=\tfrac{1}{2}\frac{R^r}{1^{r|1}}(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\cdot R^r(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})$$
$$+\frac{R^r}{2.1^{r|1}}(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}\cdot R(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})$$

und es ergiebt sich

$$R^r(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})+R^r(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$
$$=R^r\Big(\cos rz\log x+\cos rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}+\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}-\ldots\Big)$$
$$+R^r\Big(\sin rz\log x\sqrt{-1}+\sin rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}\sqrt{-1}-\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}\sqrt{-1}$$
$$+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{2x^3}\sqrt{-1}-\ldots\Big)$$
$$+R^r\Big(\cos rz\log x-\cos rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}-\cos rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}-\ldots\Big)$$
$$+R^r\Big(-\sin rz\log x\sqrt{-1}+\sin rz\frac{a\sqrt{-1}}{x}\sqrt{-1}+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^2}{2x^2}\sqrt{-1}$$
$$+\sin rz\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}\sqrt{-1}+\ldots\Big)$$
$$=R^r\cos rz\Big(\log x^2+\frac{2a^2}{2x^2}-\frac{2a^4}{4x^4}+\frac{2a^6}{6x^6}-\ldots\Big)$$
$$+R^r\sin rz\sqrt{-1}\Big(2\frac{a}{x}\sqrt{-1}+2\frac{(a\sqrt{-1})^3}{3x^3}+2\frac{(a\sqrt{-1})^5}{5x^5}+\ldots\Big)$$
$$=R^r\cos rz\log(x^2+a^2)+R^r\sin rz\sqrt{-1}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Werden diese Werthe eingeführt, so findet sich

$$(9.)\quad\int^{r+1}\frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}=\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{2.1^{r|1}}\cos rz\log(x^2+a^2)$$
$$+\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}\sin rz\sqrt{-1}}{2.1^{r|1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}-\frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}\cos rz}{1^{r|1}1^{r|1}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}=\frac{-1}{2\sqrt{-1}}\int^{r+1}\Big(\frac{1}{x+a\sqrt{-1}}-\frac{1}{x-a\sqrt{-1}}\Big)(\partial x)^{r+1}$$
$$=\frac{-1}{2\sqrt{-1}}\int^{r}(\log(x+a\sqrt{-1})-\log(x-a\sqrt{-1}))(\partial x)^{r}$$
$$=\frac{-1}{2\sqrt{-1}}\Big[\frac{(x+a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}}\log(x+a\sqrt{-1})-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x+a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}1^{r|1}}$$
$$-\frac{(x-a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}}\log(x-a\sqrt{-1})+\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}(x-a\sqrt{-1})^r}{1^{r|1}1^{r|1}}\Big].$$

Werden die nöthigen Entwicklungen gemacht, so erhält man

$$(x+a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1})-(x-a\sqrt{-1})^r\log(x+a\sqrt{-1})$$
$$=(M-N)\Big(\log x+\frac{a^2}{2x^2}-\frac{a^4}{4x^4}+\frac{a^6}{6x^6}\dots\Big)$$
$$+(M+N)\sqrt{-1}\Big(\frac{a}{x}-\frac{a^3}{3x^3}+\frac{a^5}{5x^5}-\frac{a^7}{7x^7}\dots\Big)$$
$$=\tfrac{1}{2}(M-N)\log(x^2+a^2)+\tfrac{1}{2}(M+N)\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}.$$

Werden die Werthe von M und N eingeführt, so ergiebt sich

$$(10.)\quad \int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}=\frac{-a\log(x^2+a^2)}{2.1.2.3\dots r}(rx^{r-1}-(r)_3x^{r-3}a^2+(r)_5x^{r-5}a^4-\dots)$$
$$-\frac{1}{2.1^{r|1}\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}(x^r-(r)_2x^{r-2}a^2+(r)_4x^{r-4}a^4-\dots)$$
$$+\frac{aC(1,2,\dots r)^{r-1}}{1^{r|1}1^{r|1}}(rx^{r-1}-(r)_3x^{r-3}a^2+(r)_4x^{r-5}a^4-\dots).$$

Ferner erhält man

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}=\frac{-R^r}{2\sqrt{-1}\,1^{r|r}}\Big[(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})\log(x+a\sqrt{-1})$$
$$-\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1.2\dots r}(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})$$
$$-(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\log(x-a\sqrt{-1})$$
$$+\frac{C(1,2,\dots r)^{r-1}}{1.2\dots r}(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})\Big],$$

und hieraus, wenn die nöthigen Entwicklungen gemacht werden:

$$(11.)\quad \int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$
$$=\frac{-(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{2.1^{r|1}}\Big(\sin rz\log(x^2+a^2)+\frac{\cos rz}{\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}-\frac{2C(1,2,\dots r)^{r-1}\sin rz}{1^{r|1}}\Big).$$

Erwägt man, dafs

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}=\text{arc tang}\,\frac{a}{x}\quad\text{und}\quad \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\log\frac{x+a\sqrt{-1}}{x-a\sqrt{-1}}=-\text{arc tang}\,\frac{a}{x}$$

ist, so hat man aus (8 bis 11.) folgende Formen:

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$=\frac{(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{1.2\ldots r}\left[\tfrac{1}{2}\cos rz\log(x^2+a^2)-\sin rz.\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{x}-\frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\cos rz}{1.2.3\ldots r}\right],$$

$$\int^{r+1}\frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$=\frac{-(x^2+a^2)^{\frac{1}{2}r}}{1.2\ldots r}\left[\tfrac{1}{2}\sin rz\log(x^2+a^2)+\cos rz.\operatorname{arc\,tang}\frac{a}{x}-\frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\sin rz}{1.2.3\ldots r}\right],$$

u. s. w.

Die Integrale (8 bis 11.) führen immer auf reelle Werthe. Ein ähnlicher Weg führt zur Darstellung von $\partial^r e^{nx}\cos mx$. Es ist nämlich

$$\cos mx=\tfrac{1}{2}(e^{mx\sqrt{-1}}+e^{-mx\sqrt{-1}})\quad\text{und}\quad\sin mx=\frac{e^{mx\sqrt{-1}}-e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\cos mx+\sin mx\sqrt{-1}=e^{mx\sqrt{-1}}\quad\text{und}\quad\cos mx-\sin mx\sqrt{-1}=e^{-mx\sqrt{-1}},$$

also

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{nx}\cos mx=\tfrac{1}{2}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(n+m\sqrt{-1})x}+e^{(n-m\sqrt{-1})x})$$

$$=\tfrac{1}{2}(n+m\sqrt{-1})^r e^{(n+m\sqrt{-1})x}+\tfrac{1}{2}(n-m\sqrt{-1})^r e^{(n-m\sqrt{-1})x}.$$

Wird nun, unter den nämlichen Beziehungen wie oben für $x\pm a\sqrt{-1}$,

$$(n\pm m\sqrt{-1})^r=R^r(\cos z\pm\sin z\sqrt{-1})^r=R^r(\cos rz\pm\sin rz\sqrt{-1})$$

gesetzt, so erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{nx}\cos mx$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{nx}R^r[(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})e^{mx\sqrt{-1}}+(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})e^{-mx\sqrt{-1}}$$

$$=\tfrac{1}{2}e^{nx}R^r[(\cos rz+\sin rz\sqrt{-1})(\cos mx+\sin mx\sqrt{-1})$$

$$+(\cos rz-\sin rz\sqrt{-1})(\cos mx-\sin mx\sqrt{-1})]$$

$$=e^{nx}R^r(\cos rz\cos mz-\sin rz\sin mz),$$

wenn die angezeigten Entwicklungen gemacht werden. Es ist daher

$$\text{(12.)}\qquad\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{nx}\cos mx=e^{nx}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}\cos(rz+mx).$$

Auf ähnliche Weise findet sich

$$\text{(13.)}\qquad\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{nx}\sin mx=e^{nx}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}\sin(rz+mx).$$

Für die Integrale dieser Functionen erhält man

$$\int^r e^{nx}\cos mx=\tfrac{1}{2}\int^r(e^{(n+m\sqrt{-1})x}+e^{(n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r$$

$$=\frac{e^{nx}}{2(n+m\sqrt{-1})^r}e^{mx\sqrt{-1}}+\frac{e^{nx}}{2(n-m\sqrt{-1})^r}e^{-mx\sqrt{-1}}.$$

Werden die oben angegebenen Gleichungen eingeführt und die Gleichungen

$$\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r} = \frac{1}{R^r(\cos rz + \sin rz\sqrt{-1})} = \frac{\cos rz - \sin rz\sqrt{-1}}{R^r},$$

$$\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} = \frac{1}{R^r(\cos rz - \sin rz\sqrt{-1})} = \frac{\cos rz + \sin rz\sqrt{-1}}{R^r},$$

benutzt, so erhält man

$$(14.)\qquad \int^r e^{nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{nx}}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\cos(mx-rz).$$

Eben so:

$$(15.)\qquad \int^r e^{nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{nx}}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\sin(mx-rz).$$

Ferner ist eben so:

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\cos mx = \tfrac{1}{2}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}+e^{(-n-m\sqrt{-1})x})$$
$$= (-1)^r\tfrac{1}{2}e^{-nx}((n+m\sqrt{-1})e^{-mx\sqrt{-1}}+(n-m\sqrt{-1})^r e^{mx\sqrt{-1}}).$$

Werden die oben angegebenen Werthe eingeführt und die nöthigen Reductionen gemacht, so erhält man

$$(16.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\cos mx = (-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}e^{-nx}\cos(mx-rz).$$

Ferner erhält man

$$\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nx}\sin mx = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\frac{\partial^r}{(\partial x)^r}(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}-e^{(-n-m\sqrt{-1})x})$$
$$= \frac{(-1)^r e^{-nx}}{2\sqrt{-1}}((n-m\sqrt{-1})^r e^{mx\sqrt{-1}}-(n+m\sqrt{-1})^r e^{-mx\sqrt{-1}}).$$

Auch hier findet sich auf gleiche Weise:

$$(17.)\qquad \frac{\partial^r}{(\partial x)^r}e^{-nk}\sin mx = (-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}e^{-nx}\sin(mx-rz).$$

Die Integrale findet man auf folgende Weise:

$$\int^r e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \tfrac{1}{2}\int^r(e^{(-n+m\sqrt{-1})x}+e^{(-n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r.$$
$$= \frac{e^{-nx}}{2(-1)^r}\left(\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(n-m\sqrt{-1})^r}+\frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Werden auch hier die entsprechenden Werthe eingeführt und die nöthigen Reductionen gemacht, so ergiebt sich

$$(18.)\qquad \int^r e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{e^{-nx}}{(-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\cos(rz+mx).$$

Ferner ist

$$\int^r e^{-nx}\sin mx(\partial x)^r = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\int^r (e^{(-n+m\sqrt{-1})x} - e^{(-n-m\sqrt{-1})x})(\partial x)^r$$
$$= \frac{e^{-nx}}{(-1)^r 2\sqrt{-1}}\left(\frac{e^{mx\sqrt{-1}}}{(n-m\sqrt{-1})^r} - \frac{e^{-mx\sqrt{-1}}}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Hieraus ergiebt sich durch Einführung der entsprechenden Werthe und nach den nöthigen Reductionen:

$$(19.)\quad \int^r e^{-nx}\sin mx(\partial x)^r = \frac{e^{-nx}}{(-1)^r(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}\sin(rz+mx).$$

Die Harmonie in den Darstellungen (12 bis 19.) liegt deutlich vor. Von den hier entwickelten Differentialen und Integralen hat *Liouville* im Journ. de l'éc. polyt. T. XIII, p. 156 et 157, 134 et 135 (No. 5, 7, 12, 13, 16 et 17) gegeben.

§. 17.

Bestimmte Integrale höherer Ordnung und mit gebrochenen Exponenten.

Auch auf die Darstellung *bestimmter* Integrale lassen sich die obigen Formeln anwenden. Wir wollen Einiges davon hersetzen. Bezeichnet man das $r$te Integral einer Function, zwischen den Grenzen a und b, durch $\int\limits_{a,b}^r fx$, so ist aus (14. und 5. §. 10.)

$$(1.)\quad \int\limits_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \frac{(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\sqrt[q]{x^p}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}}{1^{r|1}},$$

$$(2.)\quad \int\limits_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{n|1}q^{n+r}}{1^{\frac{p}{q}|1}(p+q)^{n+r|q}}.$$

Aus (1. und 2.) findet man, in Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$(3.)\quad \frac{\int\limits_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^{-\frac{p}{q}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}}{\int\limits_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} x^n(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}} = \frac{p^{n+r+1|q}}{q^{n+r+1}}\,\frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Eben so ist aus (11. und 6. §. 10.)

$$(4.)\quad \int\limits_{1,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{1}{x^n}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{-\frac{p}{q}|1}(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}}1^{n-1|1}q^{n-r-1}},$$

$$(5.)\quad \int\limits_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \sqrt[q]{x^p}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{p}{q}|1}q^r}{1^{\frac{2p}{q}|1}(q+2p)^{r|q}}.$$

Hieraus ist, in Rücksicht auf (21. §. 26.):

$$(6.)\quad \int_{0,1}^{r+\frac{p}{q}} \sqrt[q]{x^p}\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} \int_{1,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{1}{x^n}\,(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{p(q-p)^{n-r-1|q}}{(-1)^{r-1+\frac{p}{q}} 1^{n-1|1} 1^{\frac{2p}{q}|1} q^{n-2r}(q+2p)^{r|q}} \cdot \frac{\pi}{\sin\frac{p}{q}\pi}.$$

Ferner ist aus (18. und 19. §. 16.)

$$(7.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{\sin r\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}.$$

$$(8.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{\cos r\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}r}}.$$

Für $m=0$ ist aus (8.); wie auch aus (6. §. 15.) folgt:

$$(9.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}n^r}.$$

Aus der zweiten Gleichung, woraus (19. §. 16.) gefolgert wurde, ist

$$(10.)\quad \int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}2\sqrt{-1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} - \frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Wird das $k$te Differential nach n unter dem Integralzeichen genommen, so ist

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} e^{-nx} = (-1)^k x^k e^{-nx},$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} \frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r} = (-1)^k \cdot \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1}(n-m\sqrt{-1})^{k+r}},$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} \frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r} = (-1)^k \cdot \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1}(n+m\sqrt{-1})^{k+r}}.$$

Werden diese Werthe in (10.) eingeführt, so erhält man

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}2\sqrt{-1}.1^{r-1|1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^{k+r}} - \frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^{k+r}}\right)$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2\sqrt{-1}} \cdot \frac{(n+m\sqrt{-1})^{k+r}-(n-m\sqrt{-1})^{k+r}}{(n^2+m^2)^{k+r}}.$$

Hieraus ergiebt sich, nach Ausführung der nöthigen Entwicklungen:

$$(11.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\, (\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{r+k}}((k+r)n^{r+k-1}m-(r+k)_3 n^{r+k-3}m^3+(r+k)_5 n^{r+k-5}m^5-\dots),$$

$$(12.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx\, (\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)z}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}} = \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)\left(\operatorname{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Setzt man $k-1$ statt k und $r=1$, so wird, wie bekannt,

$$(13.)\quad \int_0^\infty x^{k-1}e^{-nx}\sin mx\,\partial x = \frac{1^{k-1|1}\sin kz}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}} = \frac{1^{k-1|1}\sin k\left(\operatorname{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}}.$$

Für $n=0$ wird aus (12.)

$$(14.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}\sin(r+k)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}m^{k+r}}.$$

Setzt man $k-1$ statt k und $r=1$, so ergiebt sich, wie bekannt,

$$(15.)\quad \int_0^\infty x^{k-1}\sin mx\,(\partial x) = \frac{1^{k-1|1}\sin k.\frac{1}{2}\pi}{m^k}.$$

Aus der zweiten Gleichung, aus welcher (18. §. 16.) gefolgert wurde, ist

$$\int_{0,\infty}^{r} e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1}2}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^r}+\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^r}\right).$$

Wird, wie vorhin, das $k$te Differential nach n eingeführt, so ergiebt sich

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}2.1^{r-1|1}}\left(\frac{1}{(n-m\sqrt{-1})^{k+r}}+\frac{1}{(n+m\sqrt{-1})^{r+k}}\right)$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}2}.\frac{(n+m\sqrt{-1})^{r+k}+(n-m\sqrt{-1})^{r+k}}{(n^2+m^2)^{r+k}},$$

und hieraus

$$(16.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{k+r}}(n^{r+k}-(r+k)_2 n^{r+k-2}m^2+(r+k)_4 n^{r+k-4}m^4-\dots),$$

$$(17.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\cos(r+k)z}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}} = \frac{1^{r+k-1|1}\cos(r+k)\left(\operatorname{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-1}1^{r-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Für $m = 0$ wird hieraus

$$(18.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} (\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{k+r}}.$$

Setzt man hierin $x = (bz)^q$, so wird $\partial x = b^q q z^{q-1} \partial z$ und man erhält

$$(19.)\quad \int_{0,\infty}^{r} z^{kq+qr-r} e^{-n(bz)^q} (\partial z)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{k+r} b^{kq+qr} q^r}.$$

Wird hierin $pq + qr - r = m$ also $k = \frac{m+r-qr}{q}$ und ferner x statt z gesetzt, so erhält man

$$(20.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^m e^{-n(bx)^q} (\partial x)^r = \frac{1^{\frac{m+r}{q}-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{\frac{m+r}{q}} b^{m+r} q^r}.$$

Diese Gleichung kann auch auf folgende Weise auf eine allgemeinere Form gebracht werden. Aus (5. §. 15.) ist

$$\int_{0,\infty}^{r} a^{-nx} (\partial x)^r = \frac{1}{(-1)^{r-1} n^r (\log a)^r}.$$

Wird hier das $k$te Differential nach n genommen, so ergiebt sich

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} a^{-nx} = (-1)^k a^{-nx} x^k (\log a)^k,$$

$$\frac{\partial^k}{(\partial n)^k} \frac{1}{n^r} = (-1)^k \frac{1^{r+k-1|1}}{1^{r-1|1} n^{r+k}},$$

und hieraus, durch Benutzung dieser Werthe:

$$(21.)\quad \int_{0,\infty}^{r} a^{-nx} x^k (\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{r+k} (\log a)^{r+k}}.$$

Wird auch hierin $x = (bz)^q$ gesetzt und werden die oben zu (19. und 20.) gemachten Entwicklungen eingeführt, so ist

$$(22.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^m a^{-n(bx)^q} (\partial x)^r = \frac{1^{\frac{m+r}{q}-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} n^{\frac{m+r}{q}} b^{m+r} (\log a)^{\frac{m+r}{q}} q^r}.$$

Die Gleichungen (11. und 12., 16. und 17., 22.) sind sehr allgemein und gelten, wie man leicht sieht, für jedes ganze und gebrochene r und für jedes ganze und gebrochene positive und negative k und m; wobei aber die Eigenthümlichkeiten, mit welchen die Formen überhaupt darstellbare Resultate liefern, nicht aufser Acht gelassen werden dürfen.

Man kann nun mit diesen Gleichungen viele und alle die Anwendungen machen, wozu die ersten Integrale dieser Functionen (in §. 33. u. ff.) benutzt wurden. Daraus würden sich sehr mannichfaltige Entwicklungen ziehen lassen, die wir jedoch, da die Methoden dazu in dem Frühern gezeigt wurden, nicht weiter verfolgen wollen.

Nur einiges Wenige soll hier noch stehen. Setzt man $m-1$ statt m, $n=b=1$, $r=1$ und $a=e$, so ist aus (22.), wie bekannt, (11. §. 33.):

$$(23.)\quad \int_0^\infty x^{m-1} e^{-x^q}\partial x = \frac{1^{\frac{m}{q}-1|1}}{q} = \frac{1^{\frac{m}{q}|1}}{m}.$$

Setzt man $r=\frac{p}{q}$, $k-\frac{p}{q}$ statt k, so wird $r+k=k$ und man hat aus (11., 12., 16. und 17.):

$$(24.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{k-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^k}(kn^{k-1}m-(k)_3n^{k-3}m^3+(k)_5n^{k-5}m^5-\cdots)$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{k-1|1}\sin k\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}},$$

$$(25.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx}\cos mx\,(\partial x)^{\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{k-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^k}(n^k-(k)_2n^{k-2}m^2+(k)_4n^{k-4}m^4-\cdots)$$

$$= \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{k-1|1}\cos k\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}}.$$

Für $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$ ist

$$(26.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^k}{\sqrt{x}} e^{-nx}\sin mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}}{(n^2+m^2)^k\sqrt{\pi}}(kn^{k-1}m-(k)_3n^{k-3}m^3+(k)_5n^{k-5}m^5-\cdots)$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}\sin k\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}\sqrt{\pi}},$$

$$(27.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^k}{\sqrt{x}} e^{-nx} \cos mx (\partial x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}}{(n^2+m^2)^k\sqrt{\pi}} (n^k - (k)_2 n^{k-2} m^2 + (k)_4 n^{k-4} m^4 - \cdots)$$

$$= \frac{1^{k-1|1}\sqrt{-1}\cos k\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}k}\sqrt{\pi}}.$$

Wird $r+\frac{p}{q}$ statt r, $k-\frac{p}{q}$ statt k gesetzt, so ist aus (11. und 12., 16. und 17.):

$$(28.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx} \sin mx (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1} q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{k+r}} [(r+k) n^{r+k-1} m - (r+k)_3 n^{r+k-3} m^3 + \cdots]$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1} q^r \sin (r+k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(k+r)}},$$

$$(29.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^k}{\sqrt[q]{x^p}} e^{-nx} \cos mx (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1} q^r}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{r+k}} [n^{r+k} - (r+k)_2 n^{r+k-2} m^2 + (r+k)_4 n^{r+k-4} m^4 - \cdots]$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1} q^r \cos (r+k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r+k)}}.$$

Wird aber $r+\frac{p}{q}$ statt r und $-k-\frac{p}{q}$ statt k, also $r-k$ statt $r+k$ gesetzt, so erhält man

$$(30.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx} \sin mx}{x^p \sqrt[q]{x^p}} (\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1} q^r}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1|1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{r-k}} [(r-k] n^{r-k-1} m - (r-k)_3 n^{r-k-3} m^3 + \cdots]$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1} q^r \sin (r-k)\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}} 1^{\frac{p}{q}-1} p^{r|q} (n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r-k)}},$$

$$(31.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\cos mx}{x^k\sqrt[q]{x^p}}(\partial x)^{r+\frac{p}{q}}$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1}q^r}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{r-k}}[n^{r-k}-(r-k)_2 n^{r-k-2}m^2+(r-k)_4 n^{r-k-4}m^4-\dots]$$

$$= \frac{1^{r-k-1|1}q^{r-k}\cos(r-k)\left(\operatorname{arc tang}\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{r-k-1+\frac{p}{q}}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}(n^2+m^2)^{\frac{1}{2}(r-k)}}.$$

Hierdurch eröffnet sich, wie man sieht, ein weites Feld für die Entwicklung besonderer Fälle, von welchen wir einige andeuten wollen.

Für $n=0$ wird aus (24., 25.) u. s. w.

$$(32.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}}\sin mx(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{\pm k-1|1}\sin\pm k.\frac{1}{2}\pi}{1^{\frac{p}{q}-1|1}m^{\pm k}},$$

$$(33.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}}\cos mx(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{\pm k-1|1}\cos k.\frac{1}{2}\pi}{1^{\frac{p}{q}-1|1}m^{\pm k}},$$

$$(34.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}}\sin mx(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{r\pm k-1|1}q^r\sin(r\pm k).\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}m^{r\pm k}},$$

$$(35.)\quad \int_{0,\infty}^{r+\frac{p}{q}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt[q]{x^p}}\cos mx(\partial x)^{r+\frac{p}{q}} = \frac{1^{r\pm k-1|1}q^r\cos(r\pm k).\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{r+\frac{p}{q}-1}1^{\frac{p}{q}-1|1}p^{r|q}m^{r\pm k}};$$

wo r und k selbst wieder gebrochene Zahlen sein können. Ist $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, so ist

$$(36.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt{x}}\sin mx(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\pm k-1|}\sin k.\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}{m^k\sqrt{\pi}},$$

$$(37.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\pm k}}{\sqrt{x}}\cos mx(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{1^{\pm k-1|}\cos k.\frac{1}{2}\pi\sqrt{-1}}{m^k\sqrt{\pi}}.$$

Hier führt ein positives ganzes und gebrochenes k, so wie ein negatives gebrochenes k immer auf darstellbare Werthe. Für $+k=\frac{1}{2}$ wird aus (36. und 37.)

$$(38.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sin mx(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-2}}{2\sqrt{m}},$$

$$(39.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \cos mx(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-2}}{2\sqrt{m}}.$$

Wird (11.) durch (16.) und umgekehrt getheilt, so ergeben sich folgende

Relationen:

$$(40.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx (\partial x)^r = \text{tang}(r+k) z \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx (\partial x)^r,$$

$$(41.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx (\partial x)^r = \cot(r+k) z \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx (\partial x)^r,$$

und

$$(42.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx (\partial x)^r = \text{tang}(r+k) \tfrac{1}{2}\pi \int_{0,\infty}^{r} x^k \cos mx (\partial x)^r,$$

$$(43.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k \cos mx (\partial x)^r = \cot(r+k) \tfrac{1}{2}\pi \int_{0,\infty}^{r} x^k \sin mx (\partial x)^r.$$

Setzt man hierin $k=0$, $r=\frac{1}{2}$, so erhält man

$$(44.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sin mx (\partial x)^{\frac{1}{2}} = \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \cos mx (\partial x)^{\frac{1}{2}};$$

was die Richtigkeit von (38. und 39.) bestätigt.

Für (11. und 16.) ergiebt sich noch eine dritte Form. Es ist

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx (\partial x)^r = \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} 2 (n^2+m^2)^{r+k}} \cdot \frac{(n+m\sqrt{-1})^{r+k} - (n-m\sqrt{-1})^{r+k}}{\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} 2 (n^3+m^2)^{r+k}} \sqrt{\frac{[(n+m\sqrt{-1})^{r+k} - (n-m\sqrt{-1})^{r+k}]^2}{-1}}.$$

Quadrirt man und entwickelt, so ergiebt sich:

$$(45.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \sin mx (\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sqrt{2}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} 2 (n^2+m^2)^{r+k}} \sqrt{[(n^2+m^2)^{r+k} - n^{2r+2k} - (2r+2k)_2 n^{2r+2k-2} m^2 + (2r+2k)_4 n^{2r+2k-4} m^4 - \dots]}.$$

Ferner ist

$$\int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx (\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} 2 (n^2+m^2)^{r+k}} [(n+m\sqrt{-1})^{r+k} + (n-m\sqrt{-1})^{r+k}].$$

Quadrirt man auch hier und zieht die Wurzel aus, so findet sich, nach den nöthigen Rechnungen:

$$(46.)\quad \int_{0,\infty}^{r} x^k e^{-nx} \cos mx (\partial x)^r$$

$$= \frac{1^{r+k-1|1}\sqrt{2}}{(-1)^{r-1} 1^{r-1|1} 2 (n^2+m^2)^{r+k}} \sqrt{[(n^2+m^2)^{r+k} + n^{2r+2k} - (2r+2k)_2 n^{2r+2k-2} m^2 + (2r+2k)_4 n^{2r+2k-4} m^4 - \dots]}.$$

Auch hier können r, k und n die oben bezeichneten Werthe haben, und es lassen sich von diesen Darstellungen ähnliche Anwendungen machen, wie sie schon hier und dort gemacht wurden, und wobei die im Frühern schon ausgesprochenen Bemerkungen ihre Geltung behalten.

Aus (12. und 17.) läfst sich, nach den gehörigen Reductionen, folgende besondere Form entwickeln, wenn $-k$ statt $+k$ und $r=\frac{p}{q}$ gesetzt wird:

$$(47.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\sin mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{1^{\frac{p}{q}-1-k|1}\sin\left(\frac{p}{q}-k\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{\frac{p}{q}-1}\,1^{\frac{p}{q}-1|1}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}}$$

$$= \frac{q^k\sin\left(k-\frac{p}{q}\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{k+\frac{p}{q}}(q-p)^{k|q}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}},$$

und hieraus für $n=0$, und ferner für $\frac{p}{q}=\frac{1}{2}$, $k=1$:

$$(48.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{\sin mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k\sin\left(k-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{k+\frac{p}{q}}(q-k)^{k|q}m^{\frac{p}{q}-k}},$$

$$(49.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin mx}{x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}\,.\sqrt{2m}.$$

Auf gleiche Weise erhält man

$$(50.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{e^{-nx}\cos mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k\cos\left(k-\frac{p}{q}\right)\left(\text{arc tang}\,\frac{m}{n}\right)}{(-1)^{k+\frac{p}{q}-1}(q-p)^{k|q}(n^2+m^2)^{\frac{p}{2q}-\frac{1}{2}k}},$$

$$(51.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{\cos mx}{x^k}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{q^k\cos\left(k-\frac{p}{q}\right)\frac{1}{2}\pi}{(-1)^{k+\frac{p}{q}-1}(q-p)^{k|q}m^{\frac{p}{q}-k}},$$

$$(52.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos mx}{x}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{-1}}.$$

Aus (45. und 46.) wird für $r=\frac{1}{2}$, $k=-\frac{1}{2}$ und $n=0$:

$$(53.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\sin mx}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi},\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,.\sin mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{m\sqrt{\pi}}.$$

$$(54.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{\cos mx}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi},\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,.\cos mx\,(\partial x)^{\frac{1}{2}} = 0,$$

wenn man berücksichtigt, dafs nach (86. erster Nachtrag)

$$\frac{1^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}|1}}{1^{\frac{1}{2}-1|1}} = (\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}|1} = (-1)^{-\frac{1}{2}}1^{-\frac{1}{2}|1} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{-1}}$$

ist. Aus (20.) erhält man, nach den gehörigen Reductionen und unter Beiziehung von (Nr. 86. erster Nachtrag), folgende Ausdrücke:

$$(55.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,.\,e^{-n(bx)^2}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{b\sqrt{2n}},$$

$$(56.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-n(bx)^2}}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}},$$

$$(57.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \sqrt{x}\,.\,e^{-bx}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{-1}}{b\sqrt{\pi}},$$

$$(58.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-bx}}{\sqrt{x}}(\partial x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi},$$

$$(59.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{p}{q}} \frac{x^m}{\sqrt{x^p}}\,e^{-bx}(\partial x)^{\frac{p}{q}} = \frac{(-1)^{1-\frac{p}{q}}1^{m-1|1}}{1^{\frac{p}{q}-1|1}b^m},$$

$$(60.)\quad \int_{0,\infty}^{\frac{1}{2}} \frac{x^m}{\sqrt{x}}\,e^{-bx}(\partial x)^{\frac{1}{2}p} = \frac{1.2.3\ldots(m-1)\sqrt{-1}}{b^m\sqrt{\pi}}.$$

Setzt man in die zweiten Formen von (9. und 11. §. 16.) den Werth von $z = \operatorname{arc\,tang}\frac{a}{x}$ und nimmt das Integral zwischen 0 und ∞, so erhält man

$$(61.)\quad \int_{0,\infty}^{r+1} \frac{x}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= -\frac{a^r}{1.2\ldots r}\left[\log a\cos r.\tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2}\pi\sin r.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\cos r.\frac{1}{2}\pi}{1,2,3\ldots r}\right],$$

$$(62.)\quad \int_{0,\infty}^{r+1} \frac{a}{x^2+a^2}(\partial x)^{r+1}$$

$$= \frac{a^r}{1.2\ldots r}\left[\log a\sin r.\tfrac{1}{2}\pi + \tfrac{1}{2}\pi\cos r.\tfrac{1}{2}\pi - \frac{C(1,2,\ldots r)^{r-1}\sin r.\frac{1}{2}\pi}{1.2.3\ldots r}\right].$$

Freiburg im Breisgau, im Mai 1848.