

RICERCHE SUI FASCI DI QUADRICHE NELLO SPAZIO ORDINARIO.

Memoria di **Luigi Brusotti** (Sondrio).

Adunanza del 14 giugno 1908.

Fra le proprietà di un fascio di quadriche in uno spazio ad n dimensioni, quelle più strettamente legate alla geometria nel campo binario del fascio traggono un valido sussidio dall'uso metodico dei *combinanti binari elementari* e delle loro forme invariantive, come ho avuto occasione di porre in evidenza in un mio precedente lavoro ¹⁾.

Ma l'utilità di questo indirizzo può esplicarsi per intero solo quando si particolarizzi il valore di n , perchè in tal modo, accanto alle proprietà generali delle forme binarie, intervengono quelle più numerose dipendenti dall'*ordine* delle singole forme considerate. Ho quindi creduto opportuno dedicare al caso $n = 3$ le presenti ricerche, le quali però e per l'estensione dei risultati e per l'uso costante del calcolo simbolico si staccano dagli ordinari sviluppi dei trattati di geometria analitica.

Per comodità del lettore ho mantenuto l'esposizione indipendente dalla conoscenza della memoria sopra citata, pur rilevando il nesso fra i due lavori mediante frequenti richiami.

Nel § 1, per la migliore intelligenza di quanto segue, premetto un cenno sui fasci di coniche nel piano, introducendovi per uniformità di trattazione anche proposizioni sostanzialmente note ²⁾. Ne prendo occasione per interpretare geometricamente tutte le forme del sistema completo simultaneo dei combinanti binari elementari cubico e quadratico, segnalando infine lo stretto legame fra la *schiera associata* al fascio di coniche ³⁾ ed il *quadrilatero associato* al quadrangolo base nel senso di KOHN.

Al § 2, rappresentata la quadrica f_λ corrente di un fascio $[f]$, nello spazio ordi-

¹⁾ *Ricerche sui fasci di quadriche in uno spazio ad n dimensioni* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo XXIII (1° semestre 1907), pp. 265-299]: memoria richiamata nelle successive citazioni colla lettera R. seguita dall'indicazione del § o del n°.

²⁾ Per citazioni in proposito si confronti l'articolo *Kegelschnitte und Kegelschnittssysteme* del DINGELDEY in *Encyclopädie der Mathematischen Wissenschaften* (Leipzig), Bd. III, 2, Heft 1. Si tenga inoltre presente la classica memoria di BATTAGLINI: *Sulle forme ternarie quadratiche* [Giornale di Matematiche, vol. VIII (1870), pp. 38-59, 129-156].

³⁾ Cfr. R., n° 13.

nario, coll'equazione:

$$a_{\lambda x}^2 \equiv a_{\lambda x}'^2 \equiv \dots \equiv \lambda_1 b_x^2 + \lambda_2 c_x^2 = 0,$$

introduco i combinanti binari elementari:

$$\alpha_\lambda^4 = \alpha_\lambda'^4 = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda a'''_\lambda a''''_\lambda)^2,$$

$$\beta_\lambda^3 = \beta_\lambda'^3 = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda a'''_\lambda u)^2,$$

$$\tau_\lambda^2 = \tau_\lambda'^2 = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda u' u'')^2,$$

$$\omega_\lambda = (a_\lambda u' u'' u''')^2,$$

dei quali è ovvio il significato. Stabilisco quindi, mediante forme invariantive degli stessi combinanti, le condizioni caratteristiche per ciascuno dei tipi di fasci proiettivamente distinti e termino il § assegnando il significato geometrico delle forme appartenenti al sistema completo del *discriminante* α_λ^4 .

Nel § 3 studio il sistema $(\Phi \beta)^3 = 0$, di involuppi di seconda classe, sistema lineare (in generale ∞^3) al quale appartiene $[f]$ come varietà di involuppi, fatta astrazione da quelli indeterminati. Per i fasci non dotati di tetraedro polare l'analisi dei vari tipi esige però caso per caso una scelta particolare degli elementi di riferimento.

Nel § 4, supposto $[f]$ privo di quadriche degeneri e premessa una breve trattazione sulle schiere ed i tessuti subordinati a $(\Phi \beta)^3 = 0$, passo ad interpretare il sistema completo del combinante β_λ^3 , studiando specialmente gli involuppi $(F\Delta)^2 = 0$, $(\Phi Q)^3 = 0$, ove Δ_λ^2 e Q_λ^3 sono l'Hessiano ed il covariante cubico del combinante.

Il § 5 è dedicato all'interpretazione delle forme appartenenti al sistema completo simultaneo di α_λ^4 e β_λ^3 , pel quale mi attengo ai risultati di GUNDELFINGER, modificati da SYLVESTER. Uno studio speciale delle forme più notevoli è oggetto dei §§ successivi fino al § 11 incluso.

Il § 6, di interesse prevalentemente algebrico, è destinato a stabilire le sizigie indipendenti che sussistono fra le forme, del sistema di GUNDELFINGER-SYLVESTER, lineari nei coefficienti di β_λ^3 e quindi rappresentanti col loro annullarsi involuppi di seconda classe. Ciò mi dà occasione di ritrovare una sizigia già ottenuta, mediante sviluppi inerenti alla forma biquadratica ternaria, dal Prof. E. PASCAL.

Nel § 7 prendo a considerare in modo particolare la *schiera associata*, il cui involuppo corrente è rappresentato da $p_\lambda \equiv (\alpha \beta)^3 \alpha_\lambda = 0$. Fra i risultati è specialmente notevole la determinazione dei fasci soddisfacenti al *teorema di reciprocità*, cioè tali che il fascio associato alla schiera associata (definito per dualità) coincida con $[f]$.

Il § 8 introduce l'involuppo di seconda classe $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ [ove è $\pi_\lambda = (H\beta)^3 H_\lambda$ con $H_\lambda^4 = (\alpha \alpha')^2 \alpha_\lambda^2 \alpha_\lambda'^2$], il quale al variare di $k:l$ e di (λ) descrive un sistema algebrico ∞^2 . Tenuto fisso solo (λ) , oppure $k:l$, l'involuppo genera una schiera e nascono così due serie di schiere. Alcune delle schiere della seconda serie vengono particolarmente studiate, dando luogo ad interessanti considerazioni.

Ad altri sistemi di involuppi di seconda classe è dedicato il § 9.

Il § 10 è uno studio dell'involuppo di quarta classe $(T\beta)^3 (T'\beta')^3 = 0$, ove T_λ^6 è il covariante sestico di α_λ^4 , involuppo duale della superficie tetraedrale simmetrica presa

in esame da SCHUR ed in intima relazione col sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$. Le proprietà del gruppo delle collineazioni mutanti in sé l'involuppo si collegano, in modo degno di nota, con alcune fra le schiere studiate al § 8.

Nel § 11 si considerano i tre involuppi di quarta classe in cui si spezza

$$(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2 = 0,$$

in relazione con altri involuppi annessi. Incidentalmente uno dei due covarianti quadratici del sistema di GUNDELFINGER esclusi da SYLVESTER viene espresso mediante le forme del sistema ridotto.

Infine il § 12 riguarda le varietà di rette che sorgono dall'interpretazione del sistema completo di τ_λ^2 , e di quello completo simultaneo di α_λ^4 e τ_λ^2 .

§ 1.

Cenno sui fasci di coniche.

I. Dato nel piano $[x_1, x_2, x_3, u_1, u_2, u_3]$ un fascio $[f]$ di coniche e rappresentata l'equazione locale

$$\lambda_1 b_x^2 + \lambda_2 c_x^2 = 0$$

della conica f_λ generica di esso con:

$$(1) \quad (a_{\lambda_1} x_1 + a_{\lambda_2} x_2 + a_{\lambda_3} x_3)^2 \equiv a_{\lambda_x}^2 \equiv a_{\lambda_x'}^2 \equiv \dots = 0,$$

si introducano i tre *combinanti binari elementari* ⁴⁾ di $[f]$:

$$(2) \quad \begin{cases} \alpha_\lambda^3 = (a_\lambda' a_\lambda'' a_\lambda''')^2, \\ \beta_\lambda^2 = (a_\lambda' a_\lambda'' u)^2, \\ \omega_\lambda = (a_\lambda u' u'')^2. \end{cases}$$

In questo n° mi occupo del primo di essi (*discriminante*), il quale col suo annullarsi identico dà la condizione perchè $[f]$ sia di coniche tutte degeneri, mentre in generale col suo annullarsi *rappresenta il gruppo delle tre coniche degeneri di $[f]$* . In modo semplice si trova ⁵⁾:

$$(3) \quad \alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho = (a_\mu a_\nu a_\rho)^2$$

ed in particolare:

$$(4) \quad \alpha_\mu \alpha_\nu^2 = (a_\mu a_\nu' a_\nu'')^2,$$

onde risulta che $\alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho = 0$ è *condizione necessaria e sufficiente perchè $f_\mu f_\nu f_\rho$ abbiano invariante trilineare nullo ed $\alpha_\mu \alpha_\nu^2 = 0$ perchè $f_\mu f_\nu$ siano conjugate rispettivamente come luogo e come involuppo*.

Pongo:

$$\begin{aligned} \Delta_\lambda^2 &= (\alpha \alpha')^2 \alpha_\lambda \alpha_\lambda', \\ Q_\lambda^3 &= (\alpha \Delta) \alpha_\lambda^2 \Delta_\lambda, \\ R &= (\Delta \Delta')^2. \end{aligned}$$

⁴⁾ Cfr. R. n° 10.

⁵⁾ Cfr. R. n° 7.

Dalle:

$$\alpha_\lambda \alpha_\mu^2 = 0, \quad \alpha_\mu \alpha_\lambda^2 = 0$$

eliminando (μ) si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \alpha')(\alpha \alpha'') \alpha_\lambda \alpha_\lambda'^2 \alpha_\lambda''^2 \\ &= \frac{1}{2} \alpha_\lambda^3 \Delta_\lambda^2, \end{aligned}$$

cioè: $\Delta_\lambda^2 = 0$ è l'unica coppia di coniche distinte, in $[f]$, coniugate in doppio modo.

Così dalle:

$$\alpha_\lambda \alpha_\mu^2 = 0, \quad \alpha_\lambda \alpha_\nu^2 = 0,$$

eliminando (λ) si deduce:

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \alpha') \alpha_\mu^2 \alpha_\nu'^2 \\ &= (\mu \nu) (\alpha \alpha')^2 \alpha_\mu \alpha_\nu' \\ &= (\mu \nu) \Delta_\mu \Delta_\nu, \end{aligned}$$

onde segue che $\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè due coniche $f_\mu f_\nu$ distinte siano coniugate come inviluppo ad una stessa di $[f]$. Le coppie di coniche $f_\mu f_\nu$ soddisfacenti alla $\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$ sono fornite dai gruppi $\alpha_\rho \alpha_\lambda^2 = 0$ polari del gruppo $\alpha_\lambda^3 = 0$ e formano in $[f]$ una involuzione di cui le coniche $\Delta_\lambda^2 = 0$ sono gli elementi doppi.

Dalle:

$$\alpha_\lambda^3 = 0, \quad \alpha_\lambda \alpha_\mu^2 = 0,$$

eliminando (λ) , si ha:

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha \alpha')(\alpha \alpha'')(\alpha \alpha''') \alpha_\mu'^2 \alpha_\mu''^2 \alpha_\mu'''^2 \\ &= -\alpha_\mu^3 Q_\mu^3. \end{aligned}$$

Quindi: Le coniche $Q_\lambda^3 = 0$ sono quelle di $[f]$ coniugate ordinatamente come inviluppo alle tre degeneri e distinte da queste.

Dall'identità ⁶⁾:

$$Q_\mu^2 Q_\nu = (\alpha \Delta) \alpha_\mu^2 \Delta_\nu$$

si deduce che $Q_\mu^2 Q_\nu = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè la conica f_ν e la conica di $[f]$ coniugata come luogo ad f_μ siano coniugate come inviluppo ad una stessa di $[f]$.

Dalla precedente identità si ricava:

$$Q_\mu Q_\nu Q_\rho = (\alpha \Delta) \alpha_\mu \alpha_\nu \Delta_\rho,$$

onde $Q_\mu Q_\nu Q_\rho = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè la conica di $[f]$ formante terna ad invariante trilineare nullo con due delle date $f_\mu f_\nu f_\rho$ e la rimanente di queste siano coniugate come inviluppo ad una stessa di $[f]$.

Infine, facilmente si trova che $R = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè i punti base di $[f]$ non siano quattro distinti; mentre, per $\alpha_\lambda^3 \neq 0$, il caso in cui tre almeno coincidono in un solo è caratterizzato da $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$.

2. In $[f]$ la f_μ forma colle tre coniche degeneri la quaterna:

$$(\mu \lambda) \alpha_\lambda^3 = 0$$

i cui invarianti quadratico e cubico sono rispettivamente uguali a:

$$-\frac{3}{4} \Delta_\mu^2, \quad -\frac{3}{8} Q_\mu^3$$

⁶⁾ CLEBSCH, *Theorie der binären algebraischen Formen* (Leipzig, 1872), § 35, form. (1).

ed il cui invariante assoluto è quindi:

$$k = - \frac{3[\Delta_\mu^2]^3}{[Q_\mu^3]^2}.$$

In un fascio generico è dunque tale l'invariante assoluto della quaterna dei punti base su f_μ , ossia: *Esistono sei coniche di $[f]$ sulle quali la quaterna dei punti base è d'invariante assoluto k , e cioè quelle del gruppo $3[\Delta_\lambda^2]^3 + k[Q_\lambda^3]^2 = 0$. Le sei coniche sono trasformate di una di esse nelle omografie ternarie che mutano $[f]$ in sè.*

Per $k = 0$, $k = \infty$ si ha: *Su ciascuna delle coniche $\Delta_\lambda^2 = 0$ la quaterna dei punti base è equianarmonica e su ciascuna delle $Q_\lambda^3 = 0$ è armonica.*

3. La $\beta_\lambda^2 = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè la retta (u) tocchi f_λ e quindi, tenuto fisso (u) , determina le due coniche di $[f]$ tangenti la retta e , tenuto fisso (λ) , è l'equazione tangenziale di f_λ . Segue che $\beta_\mu \beta_\nu = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè (u) seghi $f_\mu f_\nu$ in due coppie di punti separantisi armonicamente, onde, tenute fisse $f_\mu f_\nu$, dà l'equazione della conica-inviluppo di STAUDT relativa ad $f_\mu f_\nu$.

Posto:

$$\Phi_\lambda^2 = (\mu\lambda)(\nu\lambda)$$

e considerata Φ_λ^2 come forma parametrica, $(\Phi\beta)^2 = 0$ è un sistema lineare di inviluppi, il quale, se $[f]$ non si riduce ad un'involuzione di rette o ad un fascio-schiera, è un tessuto e per un fascio generico fornisce la rete-tessuto delle coniche rispetto alle quali è polare il triangolo diagonale del quadrangolo base di $[f]$.

La schiera $d_1\beta_\mu^2 + d_2\beta_\nu^2 = 0$ è polare di $[f]$ rispetto a ciascuna delle coniche rispetto a cui sono polari reciproche $f_\mu f_\nu$ ed ha per base la quaterna di rette $\beta_\mu^2 = 0$, $\beta_\nu^2 = 0$. Se (μ) viene a coincidere con (ν) si ha: *La schiera $\beta_\lambda \beta_\mu = 0$ [(λ) variabile] è polare di $[f]$ rispetto ad f_μ e $\beta_\lambda \beta_\mu \equiv 0$ [rispetto a (λ)] è la quaterna delle tangenti ad f_μ nei punti base di $[f]$.*

Segue che $(\beta\beta')^2 = 0$ è l'equazione tangenziale complessiva dei quattro punti base.

L'equazione $(\Phi\beta)^2 = 0$ si può scrivere:

$$(a_\mu a_\nu u)^2 = 0$$

e si dimostra facilmente ⁷⁾ che la f_λ di $[f]$ coniugata a $(\Phi\beta)^2 = 0$ è fornita da:

$$(a_\mu a_\nu a_\lambda)^2 = 0,$$

ossia da:

$$(\alpha\Phi)^2 \alpha_\lambda = 0.$$

L'identità:

$$(5) \quad (\alpha\Delta)^2 \alpha_\lambda \equiv 0,$$

caratteristica per il covariante Δ_λ^2 , afferma che in generale fra gli inviluppi $(\Phi\beta)^2 = 0$ il solo $(\Delta\beta)^2 = 0$ è coniugato ad ogni conica di $[f]$.

4. L'inviluppo

$$(6) \quad p_\lambda \equiv (\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda = 0$$

al variare di (λ) descrive in generale una schiera che dico *schiera associata* ad $[f]$ ⁸⁾.

⁷⁾ Cfr. R. n° 13.

⁸⁾ Cfr. R., n° 13, in fine.

L'inviluppo (6) associato ad f_λ è l'inviluppo di STAUDT delle due coniche di $[f]$ coniugate come inviluppo ad f_λ ed è pure l'inviluppo delle rette tangenti alle coppie di coniche di $[f]$ costituenti con f_λ terna ad invariante trilineare nullo.

Se due coniche $f_\mu f_\nu$ sono coniugate come inviluppo ad una stessa di $[f]$ ($\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$), l'inviluppo associato alla prima conica è coniugato alla seconda (cfr. n° 3). Segue che l'inviluppo della schiera (6) coniugato ad f_λ è:

$$(7) \quad r_\lambda \equiv (Q\beta)^2 Q_\lambda = 0,$$

il che è riconfermato dalla nota identità:

$$(\alpha Q)^2 \alpha_\lambda Q_\lambda \equiv 0^9).$$

Se si pone:

$$\Delta_\lambda^2 = (\xi\lambda)(\eta\lambda),$$

dalla (5) segue che ad $f_\xi f_\eta$ corrispondono in (6) rispettivamente:

$$\beta_\xi^2 = 0, \quad \beta_\eta^2 = 0,$$

cioè le coniche $\Delta_\lambda^2 = 0$ come inviluppo appartengono alla schiera associata e, se sono distinte, la individuano ¹⁰⁾.

Stabilito il significato delle forme invariantive di α_λ^3 (n° 1 e 2), di quelle di β_λ^2 (n° 3) ed inoltre delle forme simultanee $(\Delta\beta)^2$, p_λ , r_λ , si possono interpretare geometricamente anche le altre forme del sistema simultaneo di α_λ^3 e β_λ^2 ¹¹⁾, come risulta dai seguenti enunciati:

L'inviluppo $(\alpha\beta)\alpha_\lambda^2\beta_\lambda = 0$ è l'inviluppo di STAUDT di f_λ e della conica di $[f]$ coniugata come luogo ad f_λ . Esso è coniugato ad f_λ .

L'inviluppo $(\Delta\beta)\Delta_\lambda\beta_\lambda = 0$ è l'inviluppo di STAUDT di f_λ e della conica di $[f]$ coniugata con f_λ come inviluppo ad una stessa pure di $[f]$.

Gli inviluppi $q_\mu \equiv (\beta p)\beta_\mu = 0$, $s_\mu \equiv (\beta r)\beta_\mu = 0$ (di quarta classe) sono generati dal riferimento proiettivo della schiera polare di $[f]$ rispetto ad f_μ e della schiera associata, facendo corrispondere all'inviluppo di STAUDT di f_λ e di f_μ l'inviluppo associato ad f_λ oppure l'inviluppo ad essa coniugato.

L'inviluppo $(\beta p)^2 = 0$ (di sesta classe) è generato dal riferimento proiettivo di $[f]$, come serie ∞^1 di inviluppi, e della schiera associata, corrispondendosi una conica e l'inviluppo associato.

Così è ovvio (ed in più modi) stabilire il significato di $(\beta p)(\beta r) = 0$ ¹²⁾.

5. Nel presente n° considero un fascio generico, cioè a punti-base distinti. L'equazione di f_λ , riferita al triangolo diagonale del quadrangolo base, prende così l'aspetto:

$$e'_\lambda x_1^2 + e''_\lambda x_2^2 + e'''_\lambda x_3^2 = 0,$$

⁹⁾ CLEBSCH, Op. cit. ⁶⁾, § 35, form. (3).

¹⁰⁾ Sotto questo aspetto la schiera associata è considerata in: GERBALDI, *Sul sistema di due coniche* [Annali di matematica pura ed applicata, serie II, tomo XVII (1889-90), pp. 161-196].

¹¹⁾ Per questo sistema vedi ad es. CLEBSCH, Op. cit. ⁶⁾, § 59.

¹²⁾ Non mi trattengo a considerare gli invarianti che il CLEBSCH studia nel citato § 59 ponendoli in relazione con quelli del sistema completo. Osservo però che dalle sizigie fra tali invarianti [vedi ivi formule (4), (7), (8), (9), (10)], si possono dedurre teoremi geometrici per il fascio di coniche.

essendo $e'_\lambda e''_\lambda e'''_\lambda$ forme lineari ed:

$$\alpha_\lambda^3 = e'_\lambda e''_\lambda e'''_\lambda.$$

Posto:

$$E_\lambda'^2 = \bar{E}_\lambda'^2 = e''_\lambda e'''_\lambda, \quad E_\lambda''^2 = \bar{E}_\lambda''^2 = e'''_\lambda e'_\lambda, \quad E_\lambda'''^2 = \bar{E}_\lambda'''^2 = e'_\lambda e''_\lambda,$$

l'equazione tangenziale $\beta_\lambda^2 = 0$ si scrive:

$$E_\lambda'^2 u_1^2 + E_\lambda''^2 u_2^2 + E_\lambda'''^2 u_3^2 = 0$$

e, più in generale, $(\Phi \beta)^2 = 0$ si scrive:

$$(\Phi E')^2 u_1^2 + (\Phi E'')^2 u_2^2 + (\Phi E''')^2 u_3^2 = 0.$$

Se M_λ^3 è una cubica coniugata ad α_λ^3 , si dimostra facilmente ¹³⁾ che $(M\beta)^2 M_\lambda = 0$, ossia:

$$(ME')^2 M_\lambda u_1^2 + (ME'')^2 M_\lambda u_2^2 + (ME''')^2 M_\lambda u_3^2 = 0,$$

è la schiera polare-reciproca di $[f]$ rispetto a quattro coniche-inviluppo del sistema $(\Phi \beta)^2 = 0$ e che, reciprocamente, la schiera polare-reciproca di $[f]$ rispetto ad un involuppo $(\Phi \beta)^2 = 0$ è del tipo indicato.

In particolare, la schiera associata ad $[f]$ (vedi n° 4):

$$(\alpha E')^2 \alpha_\lambda u_1^2 + (\alpha E'')^2 \alpha_\lambda u_2^2 + (\alpha E''')^2 \alpha_\lambda u_3^2 = 0$$

è polare reciproca di $[f]$ rispetto a ciascuna delle coniche-inviluppo:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} (e'' e''') u_1^2 + (e''' e') u_2^2 + (e' e'') u_3^2 = 0, \\ -(e'' e''') u_1^2 + (e''' e') u_2^2 + (e' e'') u_3^2 = 0, \\ (e'' e''') u_1^2 - (e''' e') u_2^2 + (e' e'') u_3^2 = 0, \\ (e'' e''') u_1^2 + (e''' e') u_2^2 - (e' e'') u_3^2 = 0, \end{array} \right.$$

come risulta osservando che α_λ^3 coincide a meno di un fattore con

$$(e'' e''')^3 e_\lambda'^3 + (e''' e')^3 e_\lambda''^3 + (e' e'')^3 e_\lambda'''^3$$

e che quindi si ha:

$$(\alpha E')^2 \alpha_\lambda : (\alpha E'')^2 \alpha_\lambda : (\alpha E''')^2 \alpha_\lambda = (e'' e''')^2 e_\lambda' : (e''' e')^2 e_\lambda'' : (e' e'')^2 e_\lambda'''.$$

Se, dualmente alla schiera associata ad un fascio, si definisce il *fascio associato* ad una schiera, si ricava il teorema seguente [di reciprocità ¹⁴⁾]: *Il fascio associato alla schiera associata ad $[f]$ è lo stesso $[f]$.*

Dalla (5) si deduce l'identità

$$(\Delta E')^2 e_\lambda' + (\Delta E'')^2 e_\lambda'' + (\Delta E''')^2 e_\lambda''' = 0,$$

la quale, confrontata con quella fondamentale:

$$(e'' e''') e_\lambda' + (e''' e') e_\lambda'' + (e' e'') e_\lambda''' = 0$$

conduce alla proporzione:

$$(\Delta E')^2 : (\Delta E'')^2 : (\Delta E''')^2 = (e'' e''') : (e''' e') : (e' e'').$$

¹³⁾ Cfr. R., n° 19.

¹⁴⁾ Cfr. R., n° 20.

D'altra parte assai semplicemente si ottiene:

$$\begin{aligned}(E' \bar{E}')^2 : (E' E'')^2 : (E' E''')^2 &= - (e'' e''') : (e''' e') : (e' e'') \\ (E'' \bar{E}'')^2 : (E'' E''')^2 : (E'' E''')^2 &= (e'' e''') : - (e''' e') : (e' e'') \\ (E''' \bar{E}''')^2 : (E''' E'')^2 : (E''' E'')^2 &= (e'' e''') : (e''' e') : - (e' e'').\end{aligned}$$

Segue che gli inviluppi (8) si riducono a:

$$\begin{aligned}(\Delta E')^2 u_1^2 + (\Delta E'')^2 u_2^2 + (\Delta E''')^2 u_3^2 &= 0 \\ (E' \bar{E}')^2 u_1^2 + (E' E'')^2 u_2^2 + (E' E''')^2 u_3^2 &= 0 \\ (E'' \bar{E}'')^2 u_1^2 + (E'' E'')^2 u_2^2 + (E'' E''')^2 u_3^2 &= 0 \\ (E''' \bar{E}''')^2 u_1^2 + (E''' E'')^2 u_2^2 + (E''' E'')^2 u_3^2 &= 0\end{aligned}$$

o, brevemente, a:

$$(\Delta \beta)^2 = 0, \quad (E' \beta)^2 = 0, \quad (E'' \beta)^2 = 0, \quad (E''' \beta)^2 = 0.$$

Concludendo: *La schiera associata è polare-reciproca di [f] rispetto a $(\Delta \beta)^2 = 0$ ed ai tre inviluppi di STAUDT relativi alle tre coppie che si possono formare colle tre coniche degeneri di [f].*

La conica-inviluppo $(\Delta \beta)^2 = 0$ è invariante rispetto alle collineazioni che mutano in sè il quadrangolo base di [f] (ed è la sola conica che goda di tale proprietà). Perciò dalla prima parte del precedente enunciato scende la notevole conseguenza:

Il quadrilatero base della schiera associata è quello « associato » al quadrangolo base di [f] ¹⁵⁾.

§ 2.

Combinanti binari elementari del fascio di quadriche.

Classificazione in tipi.

Forme invariantive del discriminante α_2^4 .

6. Stabilito nello spazio ordinario un sistema $[x_1 x_2 x_3 x_4, u_1 u_2 u_3 u_4]$ di coordinate projective omogenee, si rappresenti l'equazione locale

$$\lambda_1 b_x^2 + \lambda_2 c_x^2 = 0$$

¹⁵⁾ Per quanto riguarda il quadrilatero associato ad un quadrangolo cfr. specialmente KOHN, *Ueber das Vierseit und sein associirtes Viereck, das Fünfflach und sein associirtes Fünfeck* [Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften (Wien), Bd. XCIII (1886), pp. 314-352] e per ulteriori sviluppi: BERZOLARI, *Sulla lemniscata proiettiva* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XXXVII (1904), pp. 277-288 e 304-313]. Le coniche ivi indicate con $K, K', K'', K_1, K_2, K_3$ figurano nella presente trattazione colle equazioni tangenziali $(\Delta \beta)^2 = 0, \beta_2^2 = 0, \beta_3^2 = 0, (E' \beta)^2 = 0, (E'' \beta)^2 = 0, (E''' \beta)^2 = 0$. Non è qui il luogo di segnalare altre relazioni fra le due teorie; mi limito solo ad osservare che l'inviluppo di sesta classe $(\beta p)^2 = 0$ è quello delle tangenti alla Cayleyana del quadrilatero associato, come si può dedurre dall'equazione di questa che si trova nel citato lavoro del Prof. BERZOLARI (pag. 312). Il significato di $(\beta p)^2 = 0$ indicato in fine del n° 4 fornisce quindi una notevole generazione della Cayleyana del quadrilatero.

della quadrica f_λ corrente in un fascio $[f]$ con:

$$(a_{\lambda 1} x_1 + a_{\lambda 2} x_2 + a_{\lambda 3} x_3 + a_{\lambda 4} x_4)^2 \equiv a_{\lambda x}^2 \equiv a_{\lambda x}^{\prime 2} \equiv \dots = 0.$$

Si introducano quindi i *combinanti binari elementari*:

$$\alpha_\lambda^4 = \alpha_\lambda^{\prime 4} = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda a'''_\lambda a^{\text{iv}}_\lambda)^2,$$

$$\beta_\lambda^3 = \beta_\lambda^{\prime 3} = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda a'''_\lambda u)^2,$$

$$\tau_\lambda^2 = \tau_\lambda^{\prime 2} = \dots = (a'_\lambda a''_\lambda u' u'')^2,$$

$$\omega_\lambda = (a_\lambda u' u'' u''')^2,$$

il cui annullarsi è condizione necessaria e sufficiente rispettivamente perchè f_λ sia specializzata, perchè il piano (u) di coordinate u_r ($r = 1, 2, 3, 4$) tocchi f_λ , perchè la retta comune ai piani $(u')(u'')$ tocchi f_λ ed infine perchè il punto comune ai piani $(u')(u'')(u''')$ giaccia su f_λ .

Si ponga inoltre:

$$H_\lambda^4 = H_\lambda^{\prime 4} = \dots = (\alpha \alpha')^2 \alpha_\lambda^2 \alpha_\lambda^{\prime 2}, \quad i = (\alpha \alpha')^4,$$

$$T_\lambda^6 = T_\lambda^{\prime 6} = \dots = (\alpha H) \alpha_\lambda^3 H_\lambda^3, \quad j = (\alpha H)^4;$$

$$\Delta_\lambda^2 = \Delta_\lambda^{\prime 2} = \dots = (\beta \beta')^2 \beta_\lambda \beta_\lambda',$$

$$Q_\lambda^3 = Q_\lambda^{\prime 3} = \dots = (\beta \Delta) \beta_\lambda^2 \Delta_\lambda, \quad R = (\Delta \Delta')^2;$$

$$D = (\tau \tau')^2.$$

7. L'introduzione dei combinanti binari elementari di $[f]$ permette di stabilire in modo semplice le *condizioni invariantive caratteristiche* per i diversi tipi di fasci secondo la classificazione esposta dal Prof. SEGRE così per i fasci di quadriche non tutte specializzate ¹⁶⁾, come per quelli di quadriche specializzate ¹⁷⁾.

La ricerca di tali condizioni si fonda da un lato sopra considerazioni geometriche in relazione col significato dei combinanti stabilito al n° 6 e dall'altro sulle condizioni invariantive perchè una forma binaria quadratica, cubica o biquadratica possieda radici di molteplicità assegnata ¹⁸⁾ e perchè due forme binarie di ordini ≤ 4 abbiano una o due radici in comune ¹⁹⁾.

Senza diffondermi in particolari mi limito quindi ad enumerare colle rispettive condizioni invariantive caratteristiche i diversi tipi di fasci, contrassegnando quelli di quadriche non tutte specializzate col noto simbolo di SEGRE, quelli di coni ordinari a vertice comune col simbolo di SEGRE relativo al fascio di coniche sezione con un piano gene-

¹⁶⁾ SEGRE, *Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni* [Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, serie II, vol. XXXVI (1884-85), pp. 3-86]; cfr. n° 80. Ivi sono citati precedenti lavori di PAINVIN, LÜROTH, GUNDELFINGER.

¹⁷⁾ SEGRE, *Ricerche sui fasci di coni quadrici in uno spazio lineare qualunque* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XIX (1884), pp. 879-897]; cfr. n° 26.

¹⁸⁾ Per questo vedi per es.: CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, §§ 38 e 48.

¹⁹⁾ Cfr. specialmente: GORDAN, *Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen* [Mathematische Annalen, Bd. III (1871), pp. 355-414].

rico, ed infine quelli di quadriche degeneri col simbolo relativo all'involuzione sezione del fascio con una retta generica.

Faccio uso delle notazioni introdotte al n° 6, ed inoltre pongo:

$$\bar{\beta}_\lambda^3 = (a'_\lambda a''_\lambda a'''_\lambda v)^2,$$

ove la serie (v) di variabili contragredienti è distinta dalla serie (u) ; mentre con $R_{\Phi\Psi}$ indico il *risultante* di due forme binarie $\Phi_\lambda^m \Psi_\lambda^n$ e con $\Theta_{\Phi\Psi}$ il covariante di GORDAN che fornisce la condizione $\Theta_{\Phi\Psi} \equiv 0$ per l'esistenza di due radici comuni a Φ_λ^m e Ψ_λ^n . Avverto infine che il segno \equiv rappresenta al solito l'*identico annullarsi* di un covariante e che il segno \neq è la negazione del precedente.

I° — Fasci di quadriche non tutte specializzate.

- [1111]. Base: quartica generale.
Condizioni caratteristiche: $i^3 - 6j^2 \neq 0$.
- [211]. Base: quartica con nodo.
Cond. car.: $i^3 - 6j^2 = 0$, $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [31]. Base: quartica con cuspidi.
Cond. car.: $i = 0$, $j = 0$, $H_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [22]. Base: cubica ed una sua corda.
Cond. car.: $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 \equiv 0$, $i \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [4]. Base: cubica ed una sua tangente.
Cond. car.: $H_\lambda^4 \equiv 0$; $R_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [(11) 11]. Base: coppia di coniche bisecantisi.
Cond. car.: $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \equiv 0$.
- [(21) 1]. Base: coppia di coniche tangenti.
Cond. car.: $i = 0$, $H_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\Theta_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [(11) 2]. Base: conica e due sue secanti in punti distinti.
Cond. car.: $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 \equiv 0$, $i \neq 0$; $R_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\Theta_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [(31)]. Base: conica e due sue secanti nello stesso punto.
Cond. car.: $H_\lambda^4 \equiv 0$; $R_{\alpha\beta} \equiv 0$, $\Theta_{\alpha\beta} \neq 0$.
- [(11) (11)]. Base: quadrilatero gobbo.
Cond. car.: $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 \equiv 0$, $i \neq 0$; $\Theta_{\alpha\beta} \equiv 0$.
- [(22)]. Base: retta doppia e due sue secanti.
Cond. car.: $H_\lambda^4 \equiv 0$; $\Theta_{\alpha\beta} \equiv 0$; $R_{\alpha\tau} \neq 0$.
- [(111) 1]. Base: conica contata due volte.
Cond. car.: $H_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\tau} \equiv 0$.
- [(211)]. Base: coppia di rette complanari contata due volte.
Cond. car.: $H_\lambda^4 \equiv 0$, $\alpha_\lambda^4 \neq 0$; $R_{\alpha\tau} \equiv 0$.

II° — Fasci di coni non tutti degeneri con vertice comune.

- [111]. Base: quattro generatrici distinte.
Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $R \neq 0$.

- [21]. Base: quattro generatrici di cui due sole coincidenti.
 Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $R \equiv 0$, $\Delta_\lambda^2 \neq 0$; $R_{\beta\tau} \neq 0$; $\Theta_{\beta\bar{\beta}} \equiv 0$.
- [3]. Base: quattro generatrici di cui tre sole coincidenti.
 Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$; $R_{\beta\tau} \neq 0$.
- [(11) 1]. Base: quattro generatrici a due a due coincidenti.
 Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $\Delta_\lambda^2 \neq 0$; $R_{\beta\tau} \equiv 0$.
- [(21)]. Base: quattro generatrici coincidenti in una.
 Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$, $\beta_\lambda^3 \neq 0$; $R_{\beta\tau} \equiv 0$.

III°. — Fascio di coni non tutti degeneri coi vertici su una retta.

Tipo unico. Base: conica e sua secante contata due volte.

Cond. car.: $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$; $R \equiv 0$, $\Delta_\lambda^2 \neq 0$; $R_{\beta\tau} \neq 0$; $\Theta_{\beta\bar{\beta}} \neq 0$.

IV°. — Fasci di quadriche degeneri.

[11]. Cond. car.: $\beta_\lambda^3 \equiv 0$, $D \neq 0$.

[2]. Cond. car.: $D \equiv 0$.

8. Se è $\alpha_\lambda^4 \equiv 0$, $[f]$ è di quadriche specializzate; nell'ipotesi contraria $\alpha_\lambda^4 = 0$ rappresenta il gruppo dei coni. In ogni caso si ha ²⁰⁾:

$$\alpha_\mu \alpha_\nu \alpha_\rho \alpha_\sigma = (a_\mu a_\nu a_\rho a_\sigma)^2.$$

Onde: In un fascio di quadriche tutte specializzate ogni quaterna è ad invariante quadrilineare nullo [in particolare due quadriche di esso sono conjugate in doppio modo e biarmoniche ²¹⁾].

In un fascio di quadriche non tutte specializzate i gruppi di quadriche ad invariante quadrilineare nullo formano la g_4^3 dei gruppi conjugati a quello dei coni.

In particolare le equazioni

$$\alpha_\mu \alpha_\lambda^3 = 0$$

$$\alpha_\mu^2 \alpha_\lambda^2 = 0$$

$$\alpha_\mu^3 \alpha_\lambda = 0$$

rappresentano in $[f]$ rispettivamente la terna delle quadriche conjugate come inviluppo ad f_μ , la coppia di quadriche ad essa biarmoniche, la quadrica ad essa conjugata come luogo.

9. Nel presente § supporrò d'ora innanzi $\alpha_\lambda^4 \neq 0$. In tale ipotesi, quando il fascio non sia dei tipi [4], [(31)], [(22)], [(211)] in cui è $H_\lambda^4 \equiv 0$, l'equazione $H_\lambda^4 = 0$ rappresenta il gruppo Hessiano della quaterna dei coni. Per trovarne il significato geometrico si cerchino in $[f]$ le coppie di quadriche conjugate ed insieme biarmoniche.

Se f_μ è conjugata come luogo ed insieme biarmonica ad f_λ , si ha:

$$\begin{cases} \alpha_\mu \alpha_\lambda^3 = 0 \\ \alpha_\mu^2 \alpha_\lambda^2 = 0, \end{cases}$$

²⁰⁾ Cfr. R., n° 7, form. (2).

²¹⁾ Dico *biarmoniche* due quadriche $m_x^2 = 0$, $n_x^2 = 0$ per cui si annulla $(m m' n n')^2$. Cfr. R., n° 4.

quindi, eliminando (μ) :

$$0 = (\alpha \alpha') (\alpha \alpha'') \alpha_\lambda^2 \alpha_\lambda'^3 \alpha_\lambda''^3 \equiv \frac{1}{2} \alpha_\lambda^4 H_\lambda^4.$$

La $\alpha_\lambda^4 = 0$ fornisce le coppie costituite dai singoli coni contati due volte, onde (ricordato il legame fra i gruppi *Hessiano* e *Steineriano*):

In generale le coppie di quadriche distinte di $[f]$ conjugate ed insieme biarmoniche sono quattro, e ciascuna consta di una quadrica (inviluppo) del gruppo Hessiano $H_\lambda^4 = 0$ e della corrispondente (luogo) nel gruppo Steineriano $2j \alpha_\lambda^4 - 3i H_\lambda^4 = 0$ (nella quale coincidono le due quadriche biarmoniche alla prima) ²²⁾.

Per i tipi $[4]$, $[(31)]$, $[(22)]$, $[(211)]$ risulta invece che ogni quadrica di $[f]$ è conjugata in doppio modo e biarmonica all'unica specializzata.

Dall'identità:

$$H_\mu^3 H_\nu = (\alpha \alpha')^2 \alpha_\mu^2 \alpha_\mu' \alpha_\mu'$$

si deduce che $H_\mu^3 H_\nu = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè $f_\mu f_\nu$ e le due quadriche di $[f]$ biarmoniche ad f_μ formino quaterna ad invariante quadrilineare nullo.

Data f_ν è così stabilito il significato della terna $H_\nu H_\lambda^3 = 0$. Condotta un piano tangente alle quadriche della terna risulta [vedi n° 1, form. (4)] che $H_\mu^2 H_\nu^2 = 0$ è condizione necessaria e sufficiente perchè le sezioni di f_ν ed f_μ con tale piano siano conjugate come luogo e come inviluppo. In modo analogo si stabilisce il significato della relazione $H_\lambda H_\mu H_\nu H_\rho = 0$.

Il gruppo dei coni ed il gruppo Hessiano determinano (in generale) l'involuzione sizigetica $l \alpha_\lambda^4 + k H_\lambda^4 = 0$ i cui gruppi sono mutati in sè dalle omografie Ω quaternarie per cui è invariante il fascio. Poichè, in generale, $j \alpha_\lambda^4 - i H_\lambda^4 = 0$ è l'unico gruppo dell'involuzione sizigetica coniugato a quello dei coni, così esso è pure l'unico gruppo di tale involuzione ad invariante quadrilineare nullo.

10. Il covariante T_λ^6 si annulla identicamente per i fasci $[22]$, $[4]$, $[(11)2]$, $[(31)]$, $[(11)(11)]$, $[(22)]$, $[(211)]$, e questa è condizione sufficiente (non necessaria) perchè la quartica base abbia due punti doppi (talora infinitamente vicini). Se il fascio non appartiene a tali tipi il significato del gruppo $T_\lambda^6 = 0$ nasce dalla ricerca in $[f]$ delle coppie di quadriche conjugate in doppio modo.

Se $f_\lambda f_\mu$ formano una tal coppia, deve essere:

$$\begin{cases} \alpha_\lambda \alpha_\mu^3 = 0, \\ \alpha_\lambda^3 \alpha_\mu = 0; \end{cases}$$

onde, eliminando (μ) :

$$0 = (\alpha \alpha') (\alpha \alpha'') (\alpha \alpha''') \alpha_\lambda \alpha_\lambda'^3 \alpha_\lambda''^3 \alpha_\lambda'''^3 \equiv - \alpha_\lambda^4 T_\lambda^6.$$

Poichè $\alpha_\lambda^4 = 0$ fornisce le coppie costituite dai singoli coni contati due volte, risulta che, escluse tali soluzioni, f_λ (quindi f_μ) appartiene al gruppo $T_\lambda^6 = 0$ ²³⁾.

²²⁾ Cfr. R., n° 8, in fine.

²³⁾ Cfr. GUNDELFINGER, *Lösung der Aufgabe 42* [Archiv der Mathematik und Physik, Bd. III (1902), pp. 75-76] [vedi anche un lavoro di KLUYVER (1897) citato più innanzi ⁸³⁾]. Le quadriche $T_\lambda^6 = 0$ sono considerate da diversi autori sotto vari punti di vista. Fra i lavori meno recenti vedasi: LAGUERRE,

Per completare il risultato, introdotti i fattori quadratici φ_λ^2 , ψ_λ^2 , χ_λ^2 di T_λ^6 , si ricordi ²⁴⁾:

$$d\alpha_\lambda^4 = \psi_\lambda^2 \psi_\lambda'^2 - \chi_\lambda^2 \chi_\lambda'^2,$$

ove d è un'opportuna costante. Onde, posto:

$$\varphi_\lambda^2 = (\xi \lambda)(\eta \lambda),$$

è:

$$\begin{aligned} d\alpha_\xi \alpha_\eta^3 &= \psi_\xi \psi_\eta \psi_\eta'^2 - \chi_\xi \chi_\eta \chi_\eta'^2 \\ &= (\varphi \psi)^2 \psi_\eta'^2 - (\varphi \chi)^2 \chi_\eta'^2 = 0 \end{aligned}$$

per le $(\varphi \psi)^2 = (\varphi \chi)^2 = 0$. Segue:

In generale in $[f]$ esistono tre coppie di quadriche distinte conjugate in doppio modo ed esse corrispondono ai tre fattori quadratici di T_λ^6 .

Per i tipi $[22]$, $[(11)2]$, $[(11)(11)]$ sono coppie di quadriche conjugate in doppio modo quelle dell'involuzione binaria che ha per elementi doppi le due quadriche specializzate e formano una tal coppia anche le due quadriche specializzate. Per i tipi $[4]$, $[(31)]$, $[(22)]$, $[(211)]$ la questione è risolta già al n° precedente.

In generale, come si deduce dall'identità ²⁵⁾:

$$\alpha_\lambda^4 H_\mu^4 - \alpha_\mu^4 H_\lambda^4 = 4(\lambda \mu) T_\lambda^3 T_\mu^3,$$

il gruppo $T_\mu^3 T_\lambda^3 = 0$ è quello delle quadriche trasformate di f_μ nelle omografie quaternarie Ω' che mutano in sè $[f]$ ma non ogni f_λ .

Risulta allora [vedi n° 1 form. (4)] che: $T_\mu^4 T_\nu^2 = 0$ (rispettivamente $T_\mu^5 T_\nu = 0$) è condizione necessaria e sufficiente perchè ogni piano tangente alle tre quadriche trasformate di f_μ nelle Ω' seghi $f_\mu f_\nu$ in due coniche conjugate come luogo e come inviluppo (rispettivamente come inviluppo e come luogo).

Sempre in relazione col covariante T_λ^6 , dalle note identità:

$$(\alpha \psi)^2 (\alpha \chi)^2 = 0, \quad (\alpha \chi)^2 (\alpha \varphi)^2 = 0, \quad (\alpha \varphi)^2 (\alpha \psi)^2 = 0$$

si deduce che, in un fascio generico, la quaterna formata da due coppie di quadriche doppiamente conjugate è ad invariante quadrilineare nullo.

Le tre quaterne così costituite e la $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 = 0$ (cfr. n° 9 in fine) sono in generale le sole ad invariante quadrilineare nullo trasformate in sè dalle Ω del n° 9.

Per esaurire l'interpretazione delle forme invariantive di α_λ^4 , osservo che $i = 0$ è condizione perchè la quartica base sia equianarmonica ed anche perchè il gruppo dei coni sia ad invariante quadrilineare nullo; mentre $j = 0$ è condizione perchè la quartica base sia armonica ed anche perchè nel fascio esista una coppia di quadriche ad un tempo conjugate in doppio modo e biarmoniche ²⁶⁾.

Sur un problème de Géométrie relatif aux courbes gauches du quatrième ordre [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 2^e série, t. XV (1870), pp. 193-216.—Œuvres de LAGUERRE, t. II (Paris, Gauthier-Villars, 1905), pp. 141-163].

²⁴⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 47, form. (2).

²⁵⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 42, form. (4).

²⁶⁾ Per $j = 0$ il fascio è ciclico nel senso usato in R., § 6.

§ 3.

Gli involuppi di seconda classe $(\Phi\beta)^3 = 0$.

11. Se è $\beta_\lambda^3 \equiv 0$, $[f]$ è di quadriche degeneri.

Nel presente § suppongo $\beta_\lambda^3 \neq 0$. In tal caso, quando f_λ non sia degenera, $\beta_\lambda^3 = 0$ è l'equazione tangenziale di f_λ . Segue [vedi n° 1 form. (3)] che in generale $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho = 0$ rappresenta l'involuppo (di seconda classe) dei piani secanti $f_\mu f_\nu f_\rho$ in tre coniche ad invariante trilineare nullo; onde in particolare $\beta_\mu \beta_\nu^2 = 0$ è quello dei piani secanti $f_\mu f_\nu$ in due coniche conjugate come luogo e come involuppo.

Posto:

$$\Phi_\lambda^3 = (\mu\lambda)(\nu\lambda)(\rho\lambda),$$

l'equazione $\beta_\mu \beta_\nu \beta_\rho = 0$ diviene:

$$(\Phi\beta)^3 = 0.$$

Risulta facilmente ²⁷⁾ che in generale $(\Phi\beta)^3 = 0$ è conjugato ad una sola quadrica di $[f]$, quella il cui parametro è fornito da $(\alpha\Phi)^3 \alpha_\lambda = 0$, ma è conjugato a tutte le quadriche di $[f]$ quando Φ_λ^3 è apolare rispetto ad α_λ^4 .

Poichè ogni Φ_λ^3 è combinazione lineare di cubi di forme lineari, risulta che il sistema degli involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ (esclusi gli indeterminati) è il sistema lineare a cui appartiene quello algebrico delle quadriche di $[f]$ considerate come involuppo (escluse quelle indeterminate come tali).

Si può dimostrare che la dimensione 3 di tale sistema lineare viene diminuita di $s \leq 3$ unità per ogni quadrica degenera di $[f]$ la cui sezione con un piano generico conti s volte nel gruppo delle coniche specializzate del fascio sezione di $[f]$ collo stesso piano ²⁸⁾. Ciò sarà riconfermato dall'esame del sistema per i diversi tipi, al quale sono dedicati i numeri 12, 13 e 14.

12. Se esiste (almeno) un tetraedro polare rispetto a tutte le quadriche di $[f]$ ed esso si assume come fondamentale, l'equazione locale di f_λ prende l'aspetto:

$$e'_\lambda x_1^2 + e''_\lambda x_2^2 + e'''_\lambda x_3^2 + e^{iv}_\lambda x_4^2 = 0,$$

ove le $e_\lambda^{(m)}$ sono forme lineari, e, posto:

$$E_\lambda^{i3} = \bar{E}_\lambda^{i3} = \dots = e'_\lambda e''_\lambda e'''_\lambda e^{iv}_\lambda$$

$$E_\lambda^{ii3} = \bar{E}_\lambda^{ii3} = \dots = e_\lambda^{ii'} e_\lambda^{ii''} e_\lambda^{ii'''} e_\lambda^{ii^{iv}}$$

$$E_\lambda^{iii3} = \bar{E}_\lambda^{iii3} = \dots = e_\lambda^{iii'} e_\lambda^{iii''} e_\lambda^{iii'''} e_\lambda^{iii^{iv}}$$

$$E_\lambda^{iiv3} = \bar{E}_\lambda^{iiv3} = \dots = e_\lambda^{iiv'} e_\lambda^{iiv''} e_\lambda^{iiv'''} e_\lambda^{iiv^{iv}}$$

l'equazione tangenziale di f_λ si scrive:

$$E_\lambda^{i3} u_1^2 + E_\lambda^{ii3} u_2^2 + E_\lambda^{iii3} u_3^2 + E_\lambda^{iiv3} u_4^2 = 0,$$

²⁷⁾ Cfr. R., n° 13 [enunciato 1)].

²⁸⁾ Cfr. R., n° 11.

mentre $(\Phi\beta)^3 = 0$ diventa:

$$(\Phi E')^3 u_1^2 + (\Phi E'')^3 u_2^2 + (\Phi E''')^3 u_3^2 + (\Phi E'')^3 u_4^2 = 0.$$

Esclusi, qualora esistano, gli involuppi indeterminati, si può così in modo semplice stabilire quanto segue:

a) Per il tipo $[1111]$ il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello ∞^3 delle quadriche-inviluppo per cui è polare il tetraedro dei vertici dei coni, sistema lineare anche come costituito da quadriche luogo. La corrispondenza fra gli involuppi ed i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ è biunivoca senza eccezione.

b) Per il tipo $[(11)11]$ il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è la rete-tessuto delle quadriche-inviluppo passanti per i punti comuni alle due coniche basi ed ivi tangenti ai piani proiettanti la congiungente i vertici dei due coni ordinari di $[f]$, per le quali inoltre sono conjugati i vertici dei coni (quindi i piani delle coniche).

Ad ogni involuppo del sistema corrispondono, come gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$, gli ∞^1 gruppi di una g_1^1 contenente quello costituito dalla quadrica degenera contata tre volte. Ogni quadrica f_μ di $[f]$ è in particolare involuppo dei piani secanti in tre coniche ad invariante trilineare nullo le quadriche di ciascuna delle terne aventi per gruppo *Hessiano* quello formato da f_μ e dalla quadrica degenera.

c) Per il fascio-schiera $[(11)(11)]$ il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello delle quadriche di $[f]$, come involuppo. Ciascuna delle ∞^1 terne di quadriche aventi per gruppo *Hessiano* quello delle due quadriche degeneri (g_1^1 singolare) è segata da ogni piano in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo. Una quadrica generica di $[f]$ è involuppo dei piani secanti in tre coniche ad invariante trilineare nullo le quadriche di ciascuno dei gruppi conjugati nel campo binario a quello formato dalla quadrica data e dalle due degeneri.

d) Per il fascio-schiera $[(111)1]$ il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello delle quadriche di $[f]$, prese come involuppo. L'indeterminazione di $(\Phi\beta)^3 = 0$ è data dai gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ contenenti due volte il piano doppio (g_1^1 singolare)²⁹. Ad una quadrica generica di $[f]$, considerata come involuppo $(\Phi\beta)^3 = 0$, corrisponde la g_1^1 individuata dalla g_1^1 singolare e dal gruppo costituito dalla quadrica stessa contata tre volte.

13. Per studiare il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ relativo ai fasci non dotati di tetraedro polare, scrivo per ciascun tipo la $a_{\lambda x}^2$ in una forma ridotta e ne ricavo le espressioni di α_λ^4 e di β_λ^3 , onde si deducono le proprietà del sistema.

Tipo $[211]$.

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(x_1^2 + x_4^2 + 2x_3x_4) + \lambda_2(x_2^2 + x_4^2 - 2x_3x_4)$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_2)^2$$

$$\beta_\lambda^3 = -6\{u_2^2\lambda_1^3 + (u_1^2 - 2u_2^2 - u_3^2 + 2u_3u_4)\lambda_1^2\lambda_2 + (-2u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 - 2u_3u_4)\lambda_1\lambda_2^2 + u_1^2\lambda_2^3\}.$$

²⁹) Ciò è prevedibile perchè in un piano una retta doppia, indeterminata come involuppo, è come tale conjugata ad ogni conica.

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello ∞^3 delle quadriche-involuppo tangenti nel vertice del cono doppio al piano dei vertici dei tre coni e rispetto alle quali è polare il triedro i cui spigoli proiettano i tre vertici dal punto (0001) [quindi è polare il triangolo formato da (0001) e dai vertici dei coni semplici]. Il sistema è lineare anche come sistema di quadriche luogo. Per la determinazione geometrica di (0001) si può osservare che la congiungente (0001) col vertice del cono doppio è polare reciproca alla congiungente i vertici dei coni semplici rispetto ad ogni quadrica di $[f]$ e che inoltre esso giace sulla quadrica di $[f]$ conjugata armonica del cono doppio rispetto ai coni semplici.

La corrispondenza fra gli involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ ed i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ è biunivoca senza eccezione.

Tipo [31].

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(2x_2x_3 + x_4^2) + \lambda_2(2x_3x_4 + x_1^2),$$

$$\alpha_\lambda^4 = -24\lambda_1^3\lambda_2,$$

$$\beta_\lambda^3 = -6\{u_1^2\lambda_1^3 + (2u_2u_3 + u_4^2)\lambda_1^2\lambda_2 + 2u_2u_4\lambda_1\lambda_2^2 + u_2^2\lambda_2^3\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello delle quadriche involuppo che toccano nel vertice del cono triplo il piano ivi tangente al cono semplice, hanno in comune col cono triplo il piano polare del vertice del cono semplice ³⁰⁾ ed infine sono conjugate come involuppo al cono $x_2x_3 - x_4^2 = 0$ (quindi come luogo all'involuppo specializzato $u_2u_3 - u_4^2 = 0$). Il sistema è lineare anche come sistema di quadriche luogo. La determinazione geometrica del cono $x_2x_3 - x_4^2 = 0$ è facile, per l'ovvio significato dei piani $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, tenuto presente che il birapporto formato da $x_2x_3 = 0$, da $x_4^2 = 0$, dal cono semplice di $[f]$ e da quello in questione nel fascio $kx_2x_3 + lx_4^2 = 0$ è $= -2$.

La corrispondenza fra gli involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ ed i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ è biunivoca senza eccezione.

Tipo [22].

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(x_2^2 + 2x_1x_3) + \lambda_2(x_3^2 + 2x_2x_4),$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^2\lambda_2^2,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\{-u_4^2\lambda_1^3 + 2u_2u_4\lambda_1^2\lambda_2 + 2u_1u_3\lambda_1\lambda_2^2 - u_1^2\lambda_2^3\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello ∞^3 delle quadriche-involuppo contenenti la corda (della cubica) che fa parte della base di $[f]$, e rispetto alle quali il piano osculatore alla cubica in un estremo A (rispettivamente B) della corda ha il polo sulla congiungente B (rispettivamente A) col punto C (rispettivamente D) in cui la tangente alla cubica in A (rispettivamente B) incontra il piano osculatore in B (rispettivamente A) [quindi rispetto alle quali il punto C (rispettivamente D) ha il piano polare passante per AD (rispettivamente BC)]. Il sistema è lineare anche come sistema di involuppi.

³⁰⁾ Condizione equivalente a tre lineari, di cui una già compresa fra le tre equivalenti alla precedente.

La corrispondenza fra gli involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ ed i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ è biunivoca senza eccezione.

Tipo [4].

$$a_{\lambda x}^2 = 2\lambda_1(x_2x_3 + x_1x_4) + \lambda_2(x_3^2 + 2x_2x_4),$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^4,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\{2(u_1u_4 + u_2u_3)\lambda_1^3 - (u_2^2 + 2u_1u_3)\lambda_1^2\lambda_2 + 2u_1u_2\lambda_1\lambda_2^2 - u_1^2\lambda_2^3\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è quello ∞^3 delle quadriche-involuppo contenenti la tangente (alla cubica) che fa parte della base di $[f]$, e conjugate (come involuppo) alle quadriche $x_2x_4 = 0$, $x_1x_4 - x_2x_3 = 0$, $x_2^2 - x_1x_3 = 0$ di cui è semplice la determinazione [quindi conjugate (come luogo) agli involuppi $u_1u_3 = 0$, $u_1u_4 - u_2u_3 = 0$, $u_3^2 - u_2u_4 = 0$]. Il sistema è lineare anche considerate le quadriche come luogo.

La corrispondenza fra involuppi e gruppi è biunivoca senza eccezione.

Tipo $[(21)1]$.

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(x_4^2 + 2x_2x_3) + \lambda_2x_1(x_1 + 2x_2),$$

$$\alpha_\lambda^4 = -24\lambda_1^3\lambda_2,$$

$$\beta_\lambda^3 = -6\{u_1^2\lambda_1^3 + (u_4^2 - 2u_1u_3 + 2u_2u_3)\lambda_1^2\lambda_2 + u_3^2\lambda_1\lambda_2^2\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è una rete-tessuto sulla cui determinazione geometrica non credo qui insistere.

Per la corrispondenza fra involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ e gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ valgono le considerazioni svolte per il tipo $[(11)11]$ [vedi n° 12; b)].

Tipo $[(11)2]$.

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(x_2^2 + 2x_3x_4) + 2\lambda_2x_1x_2,$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^2\lambda_2^2,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\{-u_1^2\lambda_1^3 + 2u_1u_2\lambda_1^2\lambda_2 + 2u_3u_4\lambda_1\lambda_2^2\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è una rete-tessuto ed è individuato come tessuto dagli involuppi $u_1^2 = 0$, $u_1u_2 = 0$, $u_3u_4 = 0$ e come rete dalle quadriche $x_2^2 = 0$, $x_1x_2 = 0$, $x_3x_4 = 0$, onde è immediata la sua determinazione geometrica.

Per la corrispondenza fra involuppi e gruppi si veda ancora al n° 12; b).

Tipo $[(31)]$.

$$a_{\lambda x}^2 = \lambda_1(2x_1x_4 + 2x_2x_3 + x_4^2) + 2\lambda_2x_1x_2,$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^4,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\{(-u_1^2 + 2u_1u_4 + 2u_2u_3)\lambda_1^3 + 2u_3(u_1 - u_4)\lambda_1^2\lambda_2 - u_3^2\lambda_1\lambda_2^2\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è una rete-tessuto. Dette r_1, r_2, γ le due rette e la conica in cui si spezza la base di $[f]$ e t la tangente a γ nel punto comune P , il sistema è in-

dividuato come tessuto da una quadrica-inviluppo generica di $[f]$ e dalla schiera degli inviluppi spezzantisi in due stelle coi centri in P ed in altro punto della retta quarta armonica dopo $r_1 r_2 t$ (e come rete da una quadrica generica di $[f]$ e dal fascio delle quadriche spezzantisi nel piano $r_1 r_2$ ed in altro piano per t).

Per la corrispondenza fra inviluppi e gruppi vedasi ancora al n° 12; b).

Tipo [(22)].

$$a_{\lambda x}^2 = 2\lambda_1(x_1 x_2 + x_3 x_4) + 2\lambda_2 x_2 x_3,$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^4,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\lambda_1^2\{\lambda_1(u_1 u_2 + u_3 u_4) - \lambda_2 u_1 u_4\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è la schiera delle quadriche di $[f]$, pensate come inviluppo.

L'indeterminazione di $(\Phi\beta)^3 = 0$ nasce per i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ contenenti due volte la quadrica degenera (g_3^1 singolare); ad una quadrica generica di $[f]$ corrisponde la g_2^2 individuata dalla g_3^1 singolare e dal gruppo formato colla quadrica stessa contata tre volte.

Tipo [(211)].

$$a_{\lambda x}^2 = 2\lambda_1(x_1 x_2 + x_3 x_4) + \lambda_2 x_4^2,$$

$$\alpha_\lambda^4 = 24\lambda_1^4,$$

$$\beta_\lambda^3 = 6\lambda_1^2\{\lambda_1(u_1 u_2 + u_3 u_4) - \lambda_2 u_1^2\}.$$

Il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è la schiera delle quadriche di $[f]$, prese come inviluppo.

Per la corrispondenza fra le quadriche stesse ed i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ si ripeta quanto è detto al n° 12; d).

14. Per completare la trattazione svolta nei n° 12 e 13, resta a considerare il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ per i fasci di quadriche specializzate (una volta).

Se i coni di $[f]$ hanno in comune il vertice, dando luogo ad uno dei tipi indicati al n° 7, II°, il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ si riduce all'unico inviluppo costituito dalla stella che ha il centro nel vertice, contata due volte; salvo l'indeterminazione dell'inviluppo in corrispondenza ai gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ coniugati (nel campo binario) a quello delle quadriche degeneri contate convenientemente, gruppi costituenti una g_2^2 (singolare).

Se invece i coni di $[f]$ hanno i vertici distinti, questi sono su di una retta r (vedi n° 7, III°), ed il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ è il tessuto degli inviluppi spezzantisi in due stelle coi centri su r . A ciascun inviluppo corrisponde una g_3^1 di gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ contenente il gruppo costituito dalla quadrica degenera contata tre volte; in particolare ad un cono di $[f]$, come inviluppo, corrisponde la g_3^1 dei gruppi aventi per *Hessiano* quello costituito dal cono stesso e dalla quadrica degenera. Se si tiene presente che i coni di $[f]$ sono riferiti proiettivamente alla punteggiata dei vertici, si può così stabilire qualche teorema degno di nota.

§ 4.

Il sistema invariantivo di β_λ^3 .

15. In questo § gli enunciati valgono senza restrizioni solo per i fasci privi di quadriche degeneri.

Nel presente n° premetto qualche considerazione sulle schiere e sui tessuti subordinati al sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ studiato nel precedente §.

Ad una g_3^1 :

$$(1) \quad d_1 \Phi_\lambda^3 + d_2 \Psi_\lambda^3 = 0$$

di gruppi corrisponde la schiera:

$$(2) \quad d_1 (\Phi\beta)^3 + d_2 (\Psi\beta)^3 = 0$$

la cui base è il fascio gobbo di quarta classe:

$$(3) \quad (\Phi\beta)^3 = 0, \quad (\Psi\beta)^3 = 0.$$

Insieme alla (1) si consideri la \bar{g}_3^1 :

$$(4) \quad \bar{d}_1 \bar{\Phi}_\lambda^3 + \bar{d}_2 \bar{\Psi}_\lambda^3 = 0$$

conjugata ³¹⁾ alla precedente e la relativa schiera:

$$(5) \quad \bar{d}_1 (\bar{\Phi}\beta)^3 + \bar{d}_2 (\bar{\Psi}\beta)^3 = 0$$

colla base:

$$(6) \quad (\bar{\Phi}\beta)^3 = 0, \quad (\bar{\Psi}\beta)^3 = 0.$$

Ciascuna terna (1) [rispettivamente (4)] di quadriche possiede un gruppo di otto piani tangenti comuni, il quale al variare della terna genera il fascio gobbo (6) [rispettivamente (3)]. Quando \bar{g}_3^1 coincide con g_3^1 , (6) coincide con (3), il che equivale ad affermare che i tessuti individuati dalle singole terne (1) contengono la schiera (2).

Se la (1) è la g_3^1 dei gruppi aventi per gruppo *Hessiano*:

$$(7) \quad F_\lambda^2 \equiv F_\lambda'^2 \equiv (\xi\lambda)(\eta\lambda) = 0,$$

la (2), supposte f_ξ ed f_η distinte, coincide colla schiera:

$$(8) \quad d_1 \beta_\xi^3 + d_2 \beta_\eta^3 = 0$$

polare-reciproca di $[f]$ rispetto a ciascuna delle otto quadriche, rispetto alle quali sono polari-reciproche f_ξ ed f_η . Il fascio gobbo (3) coincide con:

$$(9) \quad \beta_\xi^3 = 0, \quad \beta_\eta^3 = 0$$

ed è pure rappresentato da ³²⁾:

$$(10) \quad 2(FF')^2 \beta_\lambda^3 - 3(F\beta)^2 \beta_\lambda F_\lambda'^2 \equiv 0.$$

³¹⁾ Per le relazioni fra una g_3^1 e la sua conjugata vedi in particolare: BERZOLARI, *Sulla teoria dell'involuzione, specialmente dell'involuzione cubica* [Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Napoli), serie II, vol. V (1891), pp. 35-40] e *Sull'involuzione cubica* [Ibid., id., pp. 71-79].

³²⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 27, penultima formola.

In questo caso (4) si muta nella \bar{g}_3^1 dei gruppi aventi in comune il gruppo $F_\lambda^2 = 0$, onde la schiera (5) si muta in:

$$(11) \quad \beta_\xi \beta_\eta \beta_\lambda = 0 \quad [(\lambda) \text{ variabile}]$$

ed il fascio gobbo (6) in:

$$(12) \quad \beta_\xi \beta_\eta \beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)]$$

costituito dai piani secanti f_ξ ed f_η in coniche conjugate in doppio modo.

La coincidenza di f_ξ ed f_η , in f_μ , conduce tanto (8) quanto (11) a coincidere nella schiera:

$$(13) \quad \beta_\mu^2 \beta_\lambda = 0 \quad [(\lambda) \text{ variabile}]$$

degli involuppi secanti f_μ e la quadrica corrente f_λ in coniche conjugate come involuppo e come luogo, *schiera polare reciproca di $[f]$ rispetto ad f_μ* . Risulta così direttamente, oppure dalle (10) e (12), che la base di (13) è il fascio gobbo:

$$(14) \quad \beta_\mu^2 \beta_\lambda \equiv 0,$$

costituito dai piani secanti $[f]$ in un fascio in cui la sezione di f_μ è da contarsi due volte nel gruppo delle coniche degeneri. Il fascio gobbo (14) è dunque quello dei piani tangenti ad f_μ nei punti della quartica base e, considerato $[f]$ come serie ∞^1 di involuppi, rappresenta la *varietà caratteristica* di f_μ ³³⁾, cioè la varietà dei piani comuni alla quadrica-involuppo f_μ ed a quella infinitamente vicina in $[f]$.

Ad una g_3^2 di gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ corrisponde un *tessuto* di involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$. La g_3^2 è costituita dai gruppi conjugati ad un gruppo:

$$P_\lambda^3 \equiv (\xi\lambda)(\eta\lambda)(\zeta\lambda) = 0$$

ed il tessuto, se $f_\xi f_\eta f_\zeta$ sono distinte, è individuato dalle quadriche stesse prese come involuppi:

$$\beta_\xi^3 = 0, \quad \beta_\eta^3 = 0, \quad \beta_\zeta^3 = 0,$$

ed ha per base il gruppo degli otto piani tangenti ad esse comuni.

I casi in cui due delle $f_\xi f_\eta f_\zeta$ o tutte e tre coincidono, si possono trattare come limiti del precedente. In particolare:

$$(15) \quad \beta_\mu \beta_\lambda^2 \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)]$$

rappresenta il gruppo degli otto piani tangenti comuni ad f_μ ed a due quadriche ad essa infinitamente vicine in $[f]$.

16. Richiamate le notazioni introdotte al n° 6, da alcuni enunciati dei n° 1 e 2 e dal significato di β_λ^2 , si deduce quanto segue.

L'annullarsi identico di Δ_λ^2 è condizione necessaria e sufficiente perchè il piano (u) tagli $[f]$ in un fascio di coniche con contatto tripunto, ossia rappresenta il fascio gobbo dei piani osculatori alla quartica base.

L'equazione $\Delta_\lambda^2 = 0$, tenuto fisso (u) rappresenta in generale la coppia di quadriche

³³⁾ La *varietà caratteristica* di un involuppo in una serie ∞^1 è forma duale della (*curva*) *caratteristica* di MONGE sopra una superficie di una serie ∞^1 .

di $[f]$ secanti (u) in due coniche conjugate in doppio modo (su ciascuna delle quali quindi i quattro punti base formano gruppo equianarmonico) e, tenuta fissa f_λ , rappresenta l'involuppo (di quarta classe) dei piani secanti f_λ e la quartica base rispettivamente in una conica ed in una quaterna equianarmonica su di questa.

Più in generale, posto :

$$G_\lambda^2 = (\mu \lambda)(\nu \lambda),$$

la :

$$(G\Delta)^2 \equiv \Delta_\mu \Delta_\nu = 0$$

è condizione necessaria e sufficiente perchè (u) tagli f_μ , f_ν in due coniche conjugate come involuppo ad una stessa del fascio sezione.

Risulta subito che gli involuppi di quarta classe $(G\Delta)^2 = 0$ formano un tessuto e contengono il fascio gobbo $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ dei piani osculatori (alla quartica).

Se il gruppo $G_\lambda^2 = 0$ descrive una g_2^1 , l'involuppo $(G\Delta)^2 = 0$ descrive una schiera e, se la g_2^1 ha elementi doppi distinti $f_\xi f_\eta$, la schiera è individuata dagli involuppi

$$\Delta_\xi^2 = 0, \quad \Delta_\eta^2 = 0,$$

mentre la sua base si spezza nel fascio gobbo (di classe 12) dei piani osculatori $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ e nel fascio gobbo (12), di quarta classe, del precedente n°.

Se però $f_\xi f_\eta$ vengono a coincidere in f_μ la schiera diviene

$$\Delta_\mu \Delta_\lambda = 0 \quad [(\lambda) \text{ variabile}]$$

e la base si spezza in $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ e nel fascio (14). Nella serie ∞^1 degli involuppi $\Delta_\lambda^2 = 0$ $[(\lambda) \text{ variabile}]$ il fascio (14) rappresenta dunque la varietà caratteristica di $\Delta_\mu^2 = 0$, e questa coincide così coll'analogia di $\beta_\mu^3 = 0$ in $[f]$.

Poichè un gruppo $f_\mu f_\nu$ appartiene ad ∞^1 serie g_2^1 , l'involuppo $(G\Delta)^2 \equiv \Delta_\mu \Delta_\nu = 0$ contiene ∞^1 fasci gobbi ellittici di quarta classe:

$$(F\beta)^2 \beta_\lambda \equiv \beta_\xi \beta_\eta \beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)],$$

in corrispondenza alle ∞^1 forme F_λ^2 conjugate a G_λ^2 . In generale uno di tali fasci gobbi è rappresentato da:

$$d_1 \beta_\mu^2 \beta_\lambda + d_2 \beta_\nu^2 \beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)]$$

e la serie ∞^1 si ottiene al variare di $d_1 : d_2$; ma a $\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$ appartiene anche ciascuno dei fasci gobbi:

$$d_1 \beta_\mu^2 \beta_\lambda + d_2 \beta_\nu^2 \beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } d_1 : d_2]$$

ed essi formano una seconda serie ∞^1 al variare del parametro (λ) . Due fasci gobbi di diversa serie hanno in comune otto piani associati, due fasci gobbi di ugual serie non hanno piani in comune. Due fasci gobbi di ugual serie, del resto arbitrari purchè distinti, sono basi di due schiere di quadriche-involuppo, dal cui riferimento proiettivo è generato $\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$, il che si può verificare anche mediante semplici eliminazioni ³⁴⁾.

³⁴⁾ Da:

$$d_1 \beta_\mu^2 \beta_\lambda + d_2 \beta_\nu^2 \beta_\lambda = 0, \quad \delta_1 \beta_\mu^2 \beta_\lambda + \delta_2 \beta_\nu^2 \beta_\lambda = 0,$$

Se però f_μ ed f_ν coincidono, i fasci gobbi

sono quelli del tipo: $\beta_\xi \beta_\eta \beta_\lambda \equiv 0$ [ident. rispetto a (λ)]

$$\beta_\mu \beta_\rho \beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)]$$

e formano su $\Delta_\mu^2 = 0$ un'unica serie ∞^1 al variare di (ρ) , avendo tutti in comune gli otto piani associati:

$$\beta_\mu \beta_\lambda^2 \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)]$$

già trovati al n° 15 [form. (15)].

17. L'equazione $Q_\lambda^2 = 0$, tenuto fisso (u) , fornisce i parametri delle tre quadriche $[f]$ segate in coniche conjugate come involuppo alle tre degeneri del fascio sezione, coniche sulle quali la quaterna base è armonica, onde, tenuta fissa f_λ , rappresenta l'involuppo (di 6ª classe) dei piani secanti f_λ e la quartica base in una conica ed in una quaterna armonica su di questa.

Così, dai due enunciati coi quali termina il n° 1 è agevole dedurre il significato dell'involuppo:

$$Q_\mu^2 Q_\nu = 0$$

e, più in generale, quello di

$$-(\Phi Q)^3 \equiv Q_\mu Q_\nu Q_\rho = 0.$$

Gli involuppi $(\Phi Q)^3 = 0$ costituiscono un sistema lineare ∞^3 e, poichè per $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ è pure $Q_\lambda^2 \equiv 0$, hanno in comune il fascio gobbo dei piani osculatori alla quartica base di $[f]$. Ma da un'osservazione che sarà svolta in seguito (n° 18, in fine) risulta che per ogni involuppo $Q_\lambda^2 = 0$, quindi per ogni $(\Phi Q)^3 = 0$, il punto di contatto di uno di tali piani è lo stesso di contatto colla quartica.

Quando $\Phi_\lambda^2 = 0$ descrive una g_3^1 , $(\Phi Q)^3 = 0$ descrive una schiera la cui base si spezza dunque nel fascio gobbo dei piani osculatori contato due volte ed in un residuo fascio gobbo di classe 12, variabile da schiera a schiera. Se in particolare la g_3^1 è quella dei gruppi aventi in comune il gruppo:

$$F_\lambda^2 \equiv (\xi \lambda)(\eta \lambda) = 0,$$

la base della schiera è rappresentata da:

$$(FQ)^2 Q_\lambda \equiv Q_\xi Q_\eta Q_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)],$$

eliminando (λ) si ha:

$$(d_1 \delta_2 - d_2 \delta_1)(\beta'_\mu \beta'_\nu) \beta_\mu^2 \beta_\nu^2 \equiv (d_1 \delta_2 - d_2 \delta_1)(\mu \nu) \Delta_\mu \Delta_\nu = 0.$$

Da:

$$d_1 \beta_\mu^2 \beta_\lambda + d_2 \beta_\nu^2 \beta_\lambda = 0, \quad d_1 \beta_\mu^2 \beta_\rho + d_2 \beta_\nu^2 \beta_\rho = 0$$

eliminando le $d_1 d_2$, si ha:

$$(\beta_\lambda \beta'_\rho - \beta_\rho \beta'_\lambda) \beta_\mu^2 \beta_\nu^2 \equiv (\lambda \rho)(\beta \beta') \beta_\mu^2 \beta_\nu^2 \equiv (\lambda \rho)(\mu \nu) \Delta_\mu \Delta_\nu = 0.$$

Gli involuppi di quarta classe qui considerati sono duali delle superficie di quarto ordine introdotte dal TIMERDING nella memoria *Ueber die quadratische Transformation durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Poltetraeder übergeführt werden* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo I (1898), pp. 95-135], zweiter Abschnitt (pp. 102-112), ove è utilizzata una trasformazione già studiata dal SEGRE.

la quale, escluso il caso $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$, coincide coll'altra:

$$(F\beta)^2\beta_\lambda \equiv \beta_\varepsilon\beta_\eta\beta_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)],$$

poichè entrambe affermano che l'*Hessiano* comune a β_λ^j ed a Q_λ^j è F_λ^2 . In questo caso la residua intersezione si riduce dunque al *fascio gobbo ellittico di quarta classe* $\beta_\varepsilon\beta_\eta\beta_\lambda \equiv 0$ [n° 15, form. (12)] *contato tre volte*. Se $f_\varepsilon f_\eta$ coincidono in f_μ , il fascio gobbo $\beta_\varepsilon\beta_\eta\beta_\lambda \equiv 0$ diviene $\beta_\mu^2\beta_\lambda \equiv 0$; ma in questo caso la schiera si può ritenere individuata da $Q_\mu^3 \equiv 0$ e dall'involuppo ad esso infinitamente vicino nella serie $Q_\lambda^j = 0$ [(λ) variabile], onde risulta che la *varietà caratteristica di* $Q_\mu^3 \equiv 0$ *nella serie* $Q_\lambda^j = 0$ *coincide con quella* $\beta_\mu^2\beta_\lambda \equiv 0$ *di* $\beta_\mu^3 \equiv 0$ *in* $[f]$ *(e di* $\Delta_\mu^2 \equiv 0$ *in* $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$), *contata tre volte*.

Quando $\Phi_\lambda^3 \equiv 0$ descrive una g_3^2 , $(\Phi Q)^3 \equiv 0$ descrive un tessuto. Se nel campo binario di $[f]$ il gruppo coniugato alla g_3^2 è:

$$P_\lambda^3 \equiv (\xi\lambda)(\eta\lambda)(\zeta\lambda) = 0$$

e se $f_\varepsilon f_\eta f_\zeta$ sono distinte, il tessuto è individuato da:

$$(16) \quad Q_\varepsilon^3 \equiv 0, \quad Q_\eta^3 \equiv 0, \quad Q_\zeta^3 \equiv 0$$

e le (16) prese simultaneamente rappresentano la relativa base. Esse (esclusa l'ipotesi $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$) affermano che, per un piano (u) di tal base, P_λ^3 è covariante cubico di β_λ^3 , o, ciò che è lo stesso, β_λ^3 coincide col covariante cubico

$$\Gamma_\lambda^3 \equiv (\xi'\lambda)(\eta'\lambda)(\zeta'\lambda)$$

di P_λ^3 . Le (16), esclusa l'ipotesi $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$, sono così equivalenti alle:

$$(17) \quad \beta_{\varepsilon'}^3 \equiv 0, \quad \beta_{\eta'}^3 \equiv 0, \quad \beta_{\zeta'}^3 \equiv 0.$$

Onde in generale: *Gli involuppi* $(\Phi Q)^3 \equiv 0$ *di un tessuto, all'infuori del fascio gobbo dei piani osculatori, hanno in comune gli otto piani associati tangenti alle tre quadriche radici del covariante cubico* Γ_λ^3 *relativo al gruppo* $P_\lambda^3 \equiv 0$ *conjugato alla* g_3^2 *dei corrispondenti gruppi* $\Phi_\lambda^3 \equiv 0$.

Gli otto piani (17) formano la base del tessuto degli involuppi $(\Phi\beta)^3 \equiv 0$ corrispondenti ai gruppi $\Phi_\lambda^3 \equiv 0$ coniugati a $\Gamma_\lambda^3 \equiv 0$. Allo stesso tessuto di quadriche-involuppo si può giungere per altra via. L'annullarsi della seconda spinta di due forme binarie cubiche è condizione necessaria e sufficiente perchè l'una sia covariante cubico dell'altra³⁵⁾. Alle (16), escluso il caso $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$, si può dunque sostituire:

$$(18) \quad (P\beta)^2 P_\lambda \beta_\lambda \equiv 0,$$

³⁵⁾ Il CLEBSCH [Op. cit., ⁶⁾ § 35, form. (3)], dimostra la relazione $(\beta Q)^2 \beta_\lambda Q_\lambda \equiv 0$ che sussiste fra una binaria cubica β_λ^3 ed il suo covariante cubico Q_λ^3 . Reciprocamente se è $(\beta K)^2 \beta_\lambda K_\lambda \equiv 0$, la K_λ^3 , a meno di un fattore coincide con Q_λ^3 . Invero dalla supposta relazione spingendo su β_λ^3 si deduce:

$$(\beta K)^2 (\beta\beta') (K\beta') \beta'_\lambda \equiv 0;$$

ma poichè si ha:

$$\begin{aligned} (\beta K)^2 (\beta\beta') (K\beta') \beta'_\lambda &= -\frac{1}{2} (\beta K) (\beta' K) (\beta\beta') [(\beta K) \beta'_\lambda - (\beta' K) \beta_\lambda] \\ &= -\frac{1}{2} (\beta\beta')^2 (\beta K) (\beta' K) K_\lambda = -\frac{1}{2} (K\Delta)^2 K_\lambda, \end{aligned}$$

segue $(K\Delta)^2 K_\lambda \equiv 0$. È dunque $K_\lambda^3 = d_1 \beta_\lambda^3 + d_2 Q_\lambda^3$, onde anche $(\beta K)^2 \beta_\lambda K_\lambda = d_1 \Delta_\lambda^2 + d_2 (\beta Q)^2 \beta_\lambda Q_\lambda = d_1 \Delta_\lambda^2 \equiv 0$. Se non è $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ (nel qual caso il covariante cubico è indeterminato) è $d_1 = 0$; quindi appunto $K_\lambda^3 = d_2 Q_\lambda^3$.

soddisfatta da tutti gli involuppi di seconda classe del tessuto:

$$(19) \quad (P\beta)^2(GP)(G\beta) = 0,$$

ove G_λ^2 è una forma parametrica. L'equazione (19) si può scrivere sotto la forma $(\Phi\beta)^3 = 0$ quando si ponga $\Phi_\lambda^3 = (PG)P_\lambda^2 G_\lambda$ e si noti che è appunto

$$(\Phi\Gamma)^3 = - (P\Gamma)^2(PG)(\Gamma G) = 0.$$

18. *L'equazione $R = 0$ rappresenta l'involuppo (di ottava classe) dei piani tangenti alla quartica base di $[f]$.* Gli involuppi $R = 0$ e $\beta_\mu^3 = 0$ hanno in comune i piani (u) pei quali il combinante β_λ^3 ammette (μ) come radice doppia, od, avendo (μ) come radice semplice, possiede ulteriormente una radice doppia. Come risulta da considerazioni geometriche, questi ultimi si distribuiscono negli otto fasci aventi per assi le otto generatrici di f_μ (quattro dell'uno e quattro dell'altro sistema) tangenti alla quartica base. I primi invece costituiscono il fascio gobbo (13) del n° 15, il quale va contato due volte, in accordo con quanto si trova al n° citato.

In modo analogo si stabilisce che $\beta_\mu^3 = 0$ ha in comune col fascio gobbo $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ dei piani osculatori gli otto piani (15) del n° 15; ed è evidente che i punti di contatto di questi piani colla quartica sono pur quelli delle otto tangenti sopra ricordate.

Per quanto segue ha maggior interesse lo studio dei piani comuni ad $R = 0$ e $\Delta_\mu^2 = 0$. Ricordando che se (μ) è radice doppia di β_λ^3 è pure tale per Δ_λ^2 e che il fascio gobbo $\Delta_\lambda^2 \equiv 0$ dei piani osculatori è doppio per $R = 0$, risulta che $R = 0$ e $\Delta_\mu^2 = 0$ hanno in comune il fascio gobbo dei piani osculatori, da contarsi due volte, ed il fascio gobbo $\beta_\mu^2 \beta_\lambda \equiv 0$ [n° 15, form. (13)], pure da contarsi due volte. Questo teorema rientra del resto in uno più generale, di cui ometto la semplice dimostrazione: *Gli involuppi $R = 0$ e $\Delta_\mu \Delta_\nu = 0$ hanno in comune, all'infuori del fascio gobbo dei piani osculatori da contarsi due volte, i due fasci gobbi (ellittici di quarta classe) $\beta_\mu^2 \beta_\lambda \equiv 0$, $\beta_\nu^2 \beta_\lambda \equiv 0$.*

Dal n° 2 si deduce: *I piani secanti f_μ e la quartica base rispettivamente in una conica ed in una quaterna avente (sulla conica) per invariante assoluto k formano l'involuppo (di classe 12):*

$$(20) \quad 3[\Delta_\mu^2]^3 + k[Q_\mu^3]^2 = 0.$$

L'involuppo (20) al variare di k descrive una schiera, alla quale, per la nota formola ³⁶⁾:

$$- R[\beta_\mu^3]^2 = [\Delta_\mu^2]^3 + 2[Q_\mu^3]^2$$

ed in corrispondenza al valore $k = 6$, appartiene l'involuppo spezzantesi nella quadrica f_μ contata due volte come involuppo e nell'involuppo dei piani tangenti alla quartica.

Poichè più sopra si è stabilita l'intersezione di $R = 0$ con $\Delta_\mu^2 = 0$ ed è facile trovare quella di $\beta_\mu^3 = 0$ con $\Delta_\mu^2 = 0$, così risulta:

La base della schiera (20) si spezza nel fascio dei piani osculatori alla quartica contato sei volte e nel noto fascio gobbo (13) contato diciotto volte. Il fascio gobbo dei piani osculatori è doppio ed il fascio gobbo (13) è triplo per tutti gli involuppi della schiera.

Precisamente un piano osculatore generico è doppio per $R = 0$ ed ha un unico

³⁶⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 35, form. (7).

punto di contatto nel punto X di contatto colla quartica base, presentando la singolarità duale ad un punto doppio uniplanare. Lo stesso piano non tocca f_μ ed è semplice per $\Delta_\mu^2 = 0$, quindi triplo per $[\Delta_\mu^2]^3 = 0$. Segue che esso è doppio per $[Q_\mu^3]^2 = 0$ con unico punto di contatto in X . Si perviene così ad una proprietà di cui si è fatto uso nel precedente n° e cioè che *per l'involuppo $Q_\mu^3 = 0$ il punto di contatto di un piano osculatore alla quartica è il punto di contatto colla quartica stessa.*

§ 5.

Il sistema invariantivo simultaneo di α_λ^4 e β_λ^3 ³⁷⁾.

19. Il sistema completo delle forme invariantive simultanee di due binarie, l'una biquadratica e l'altra cubica, è stato ridotto a 64 forme dal GUNDELFINGER ³⁸⁾ ed ulteriormente a 61 da SYLVESTER ³⁹⁾, e viene qui riprodotto, con qualche modificazione nelle notazioni ⁴⁰⁾, per le forme α_λ^4 e β_λ^3 .

³⁷⁾ In questo § e nei seguenti fino al § 11 incluso si suppone sempre implicitamente la condizione $\alpha_\lambda^4 \neq 0$.

³⁸⁾ *Zur Theorie der simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen Form.* Inaugural-schrift (Stuttgart, 1869).

³⁹⁾ Cfr. le comunicazioni inserite sotto diversi titoli nel tomo LXXXVII (2° semestre 1878) dei Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), pp. 242-244, 287-289, 445-448, 477-481.

⁴⁰⁾ Le forme invariantive qui riportate differiscono talora per coefficienti numerici da quelle usate dal GUNDELFINGER e sono invece in accordo con quelle usate più recentemente dal Prof. BERZOLARI {Intorno alla rappresentazione delle forme binarie cubiche e biquadratiche sulla cubica gobba (due Note) [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, tomo V (1891), Nota I^a, pp. 9-32, Nota II^a, pp. 33-50]} e dal Prof. E. PASCAL {a) *Sul sistema di GUNDELFINGER relativo ad una biquadratica e una cubica binarie* (Nota I^a) [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II^a, vol. XXXVII (1904), pp. 1010-1020]; b) *Sulle condizioni invariantive perchè una binaria biquadratica abbia per fattore una cubica* (Nota II^a) [Ibid., serie II, vol. XXXVIII (1905), pp. 201-210]; c) *Contributo alla teoria della forma ternaria biquadratica e delle sue varie decomposizioni in fattori* [Atti della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche (Napoli), serie II, vol. XII (1905), n° 13, pp. 1-102] (memoria premiata)}.

Grado nei coefficienti di β_λ^3 .		Grado nei coefficienti di α_λ^4 .					
	Ordine.	0	I	2	3	4	5
0	0	—	—	i	j	—	—
0	4	—	α_λ^4	H_λ^4	—	—	—
0	6	—	—	—	T_λ^6	—	—
I	I	—	$p_\lambda = (\alpha\beta)^3\alpha_\lambda$	$\pi_\lambda = (H\beta)^3H_\lambda$	—	—	—
I	3	β_λ^3	$(\alpha\beta)^2\alpha_\lambda^2\beta_\lambda$	$(H\beta)^2H_\lambda^2\beta_\lambda$	$(T\beta)^3T_\lambda^3$	—	—
I	5	—	$(\alpha\beta)\alpha_\lambda^3\beta_\lambda^2$	$(H\beta)H_\lambda^3\beta_\lambda^2$	—	—	—
2	0	—	—	—	$(T\beta)^3(T\beta')^3$	—	—
2	2	Δ_λ^2	$(\alpha\Delta)^2\alpha_\lambda^2$	$(H\Delta)^2H_\lambda^2$	$(T\beta)^3(T\beta')^2T_\lambda\beta'_\lambda$	—	—
»	»	—	$(\beta p)\beta_\lambda^2$	$(\beta\pi)\beta_\lambda^2$	—	—	—
2	4	—	$(\alpha\Delta)\alpha_\lambda^3\Delta_\lambda$	$(H\Delta)H_\lambda^3\Delta_\lambda$	$(T\Delta)^2T_\lambda^4$	—	—
3	I	—	$q_\lambda = (\Delta p)\Delta_\lambda$	$(\Delta\pi)\Delta_\lambda$	$(T\beta)^3(T\Delta)^2T_\lambda$	—	—
»	»	—	$s_\lambda = (\alpha Q)^3\alpha_\lambda$	$\sigma_\lambda = (HQ)^3H_\lambda$	—	—	—
»	»	—	—	$(\beta p)^2\beta_\lambda$	$(\beta p)(\beta\pi)\beta_\lambda$	$(\beta\pi)^2\beta_\lambda$	—
3	3	Q_λ^3	$(\alpha Q)^2\alpha_\lambda^2Q_\lambda$	$(HQ)^2H_\lambda^2Q_\lambda$	$(TQ)^3T_\lambda^3$	—	—
4	0	R	$(\alpha\Delta)^2(\alpha\Delta')^2$	$(H\Delta)^2(H\Delta')^2$	$(\beta p)^3$	$(\beta p)^2(\beta\pi)$	$(\beta p)(\beta\pi)^2$
»	»	—	—	$(\Delta p)^2$	$(\Delta p)(\Delta\pi)$	$(\Delta\pi)^2$	—
»	»	—	—	—	$(TQ)^3(T\beta)^3$	—	—
4	2	—	$(Qp)Q_\lambda^2$	$(Q\pi)Q_\lambda^2$	—	—	—
»	»	—	$(\alpha\Delta)^2(\alpha\Delta')\alpha_\lambda\Delta'_\lambda$	$(H\Delta)^2(H\Delta')H_\lambda\Delta'_\lambda$	$(TQ)^3(T\Delta)^2T_\lambda$	—	—
5	I	—	$(\Delta s)\Delta_\lambda$	$(\Delta\sigma)\Delta_\lambda$	$(\beta s)(\beta\pi)\beta_\lambda$	—	—
»	»	—	—	$(\beta s)(\beta p)\beta_\lambda$	$(\Delta p)(\Delta\sigma)$	—	—
6	0	—	—	$(\Delta p)(\Delta s)$	$(\beta p)^2(\beta s)$	$(\Delta\pi)(\Delta\sigma)$	—
»	»	—	—	—	$(\beta p)(\beta s)(\beta\pi)$	$(\beta p)(\beta s)(\beta\pi)$	$(\beta\pi)^2(\beta s)$
»	»	—	—	—	$(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2$	—	—

L'interpretazione delle forme invariantive della sola α_λ^4 [α_λ^4 , H_λ^4 , T_λ^6 , i , j] è già nota (vedi n° 8, 9, 10) e così pure quella delle forme invariantive della sola β_λ^3 [β_λ^3 , Δ_λ^2 , Q_λ^3 , R] (vedi n° 11, 16, 17, 18). In generale una forma invariantiva simultanea, di grado m nei coefficienti di β_λ^3 , rappresenta col suo annullarsi un *inviluppo (di piani) di classe $2m$* . Se la forma è un *invariante*, l'inviluppo è legato invariantivamente ad $[f]$. Se la forma è un *covariante* (di ordine k), l'inviluppo è invece legato invariantivamente alla quadrica f_λ di $[f]$ ed al variare di questa descrive un sistema ∞^1 razionale in corrispondenza biunivoca con $[f]$; un piano generico appartiene a k inviluppi del sistema. Se in particolare il covariante è *lineare*, il sistema è una *schiera*.

Nei n° seguenti (20 e 21) è studiato il significato delle singole forme invariantive simultanee di α_λ^4 e β_λ^3 .

20. Da quanto è svolto ai n° 8 ed 11 si deducono gli enunciati:

A) L'equazione $(\alpha\beta)\alpha_\lambda^3\beta_\lambda^2 = 0$ rappresenta l'inviluppo (di seconda classe) dei piani secanti f_λ e la quadrica di $[f]$ ad essa conjugata come luogo, in due coniche conjugate rispettivamente come inviluppo e come luogo.

B) L'equazione $(\alpha\beta)^2\alpha_\lambda^2\beta_\lambda = 0$ rappresenta l'inviluppo (di seconda classe) dei piani secanti f_λ e le due quadriche di $[f]$ ad essa biarmoniche, in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo.

C) L'equazione $p_\lambda \equiv (\alpha\beta)^3\alpha_\lambda = 0$ rappresenta l'inviluppo (di seconda classe) dei piani secanti le tre quadriche di $[f]$ conjugate come inviluppo ad f_λ , in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo (od anche dei piani tangenti a terne di quadriche di $[f]$ costituenti con f_λ quaterna ad invariante quadrilineare nullo).

Se alle polari di α_λ^4 si sostituiscono quelle di H_λ^4 , delle quali è pur noto il significato (n° 9), si giunge analogamente all'interpretazione degli inviluppi (di seconda classe):

$$A') \quad (H\beta)H_\lambda^3\beta_\lambda^2 = 0,$$

$$B') \quad (H\beta)^2H_\lambda^2\beta_\lambda = 0,$$

$$C') \quad \pi_\lambda \equiv (H\beta)^3H_\lambda = 0;$$

e, se alle polari di β_λ^3 si sostituiscono quelle di Q_λ^3 , studiate al n° 17, si perviene al significato geometrico degli inviluppi (di sesta classe):

$$A'') \quad (\alpha Q)\alpha_\lambda^3Q_\lambda^2 = 0, \quad A''') \quad (H Q)H_\lambda^3Q_\lambda^2 = 0,$$

$$B'') \quad (\alpha Q)^2\alpha_\lambda^2Q_\lambda = 0, \quad B''') \quad (H Q)^2H_\lambda^2Q_\lambda = 0,$$

$$C'') \quad s_\lambda \equiv (\alpha Q)^3\alpha_\lambda = 0; \quad C''') \quad \sigma_\lambda \equiv (H Q)^3H_\lambda = 0^{41}).$$

Così da quanto si è svolto ai n° 8 e 16 si deduce:

D) L'equazione $(\alpha\Delta)\alpha_\lambda^4\Delta_\lambda = 0$ rappresenta l'inviluppo (di quarta classe) dei piani secanti f_λ e la quadrica di $[f]$ ad essa conjugata come luogo, in una coppia di coniche conjugate come inviluppo ad una stessa del fascio sezione.

⁴¹⁾ Le forme $A'')$, $A''')$ qui considerate per uniformità di trattazione non fanno però parte del sistema completo.

E) L'equazione $(\alpha \Delta)^2 \alpha_\lambda^2 = 0$ rappresenta l'involuppo (di quarta classe) dei piani secanti le due quadriche di $[f]$ biarmoniche ad f_λ , in due coniche conjugate come involuppo ad una stessa del fascio sezione.

F) L'equazione $(\alpha \Delta)^2 (\alpha \Delta')^2 = 0$ rappresenta l'involuppo (di ottava classe) dei piani, per i quali le due quadriche di $[f]$ segate in coniche doppiamente conjugate sono biarmoniche.

Analogamente (vedi n° 9 e 16) si ottiene il significato di:

$$D') \quad (H\Delta) H_\lambda^3 \Delta_\lambda = 0,$$

$$E') \quad (H\Delta)^2 H_\lambda^2 = 0,$$

$$F') \quad (H\Delta)^2 (H\Delta')^2 = 0.$$

21. Dai n° 10 ed 11 si ha che l'equazione $(T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0$ rappresenta l'involuppo (di seconda classe) dei piani secanti in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo le tre quadriche di $[f]$ trasformate di f_λ nelle omografie quaternarie mutanti in sè $[f]$ ma non f_λ (almeno in generale). E similmente (vedi n° 10 e 17) si interpreta l'involuppo (di sesta classe):

$$(TQ)^3 T_\lambda^3 = 0.$$

Così dal significato della seconda polare di T_λ^6 (n° 10) si ottiene (vedi n° 16) quello dell'involuppo di quarta classe:

$$(T\Delta)^2 T_\lambda^4 = 0.$$

Per lo studio di alcune fra le forme del sistema completo, conviene ora osservare che un piano generico (u) , in base ad una considerazione generale (n° 19), appartiene a tre involuppi della serie ∞^1 $(T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0$ e che a questi corrispondono tre quadriche $f' f'' f'''$ di $[f]$. Ciò posto:

a) Un piano (u) determina le $f' f'' f'''$ e taglia due quadriche $f_\mu f_\nu$ di $[f]$ in coniche conjugate come involuppo alla sezione di f_λ . Se ogni piano tangente ad $f' f'' f'''$ (rispettivamente ad $f_\lambda f_\mu f_\nu$) taglia $f_\lambda f_\mu f_\nu$ (rispettivamente $f' f'' f'''$) in tre coniche ad invariante trilineare nullo (e solo allora), il piano (u) giace nell'involuppo (di quarta classe):

$$(T\beta)^3 (T\beta')^2 T_\lambda \beta'_\lambda = 0.$$

b) L'equazione $(T\beta)^3 (T\beta')^3 = 0$ rappresenta l'involuppo (di quarta classe) dei piani secanti in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo la rispettiva terna di quadriche $f' f'' f'''$. Analogamente si interpreta l'involuppo (di ottava classe) $(TQ)^3 (T\beta)^3 = 0$.

c) Un piano (u) determina le $f' f'' f'''$ ed inoltre taglia due quadriche $f_\xi f_\eta$ di $[f]$ in coniche doppiamente conjugate. Se ogni piano tangente ad $f' f'' f'''$ (rispettivamente ad $f_\lambda f_\xi f_\eta$) taglia $f_\lambda f_\xi f_\eta$ (rispettivamente $f' f'' f'''$) in tre coniche ad invariante trilineare nullo (e solo allora) il piano (u) giace nell'involuppo (di sesta classe)

$$(T\beta)^3 (T\Delta)^2 T_\lambda = 0.$$

Richiamata poi la formola ⁴²⁾:

$$(T\Delta)^2 (T\Delta')^2 (T\Delta'')^2 = 2(\Phi\Delta)^2 (\Psi\Delta')^2 (\chi\Delta'')^2$$

⁴²⁾ BERZOLARI, l. c. ⁴⁰⁾, Nota II^a, n° 16.

si ha che l'involuppo $(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2 = 0$ si spezza nei tre involuppi di quarta classe dei piani secanti una delle tre coppie di quadriche di $[f]$ conjugate in doppio modo, in coniche conjugate come involuppo ad una stessa del fascio sezione.

Nei precedenti enunciati sono considerate 24 forme del sistema completo, ed altre nove sono studiate nei §§ 1, 2, 3 e 4; il significato delle rimanenti 28 si può ottenere con metodo uniforme mediante la seguente osservazione, applicata eventualmente più di una volta: Se M_λ , N_λ^k ($k \geq 1$) sono due covarianti di grado > 0 nei coefficienti di β_λ^3 , l'equazione $(MN)^k = 0$ rappresenta l'involuppo generato dai piani comuni ad $M_\lambda = 0$, $N_\lambda^k = 0$ al variare di f_λ ⁴³).

L'interpretazione delle forme del sistema, e quindi indirettamente anche quella di ogni forma invariante simultanea di α_λ^4 e β_λ^3 , si può così ritenere esaurita. Ma ad uno studio più approfondito delle forme che presentano maggior interesse sono dedicati i §§ seguenti fino al § 11 incluso.

§ 6.

Sizigie relative alle otto quadriche-involuppo annesse ad f_λ .

22. Come risulta dalla tabella del n° 19, ad ogni quadrica f_λ di $[f]$ sono invariantivamente connessi otto involuppi di seconda classe e cioè:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} \beta_\lambda^3 = 0; & & \\ p_\lambda \equiv (\alpha\beta)^3 \alpha_\lambda = 0, & (\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda^2 \beta_\lambda = 0, & (\alpha\beta) \alpha_\lambda^3 \beta_\lambda^2 = 0; \\ \pi_\lambda \equiv (H\beta)^3 H_\lambda = 0, & (H\beta)^2 H_\lambda^2 \beta_\lambda = 0, & (H\beta) H_\lambda^3 \beta_\lambda^2 = 0; \\ & (T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0. \end{array} \right.$$

Essi appartengono al sistema lineare (in generale ∞^3) $(\Phi\beta)^3 = 0$; quindi fra i primi membri delle loro equazioni debbono sussistere quattro relazioni lineari indipendenti, corrispondenti ad altrettante sizigie fra le forme del sistema completo. Mi propongo in questo § di stabilire tali relazioni e, per semplicità, sostituisco le notazioni α , H , T , β alle α_λ^4 , H_λ^4 , T_λ^6 , β_λ^3 .

In primo luogo, dall'identità fondamentale del calcolo simbolico, si deduce facilmente la:

$$(2) \quad T\beta - H(\alpha, \beta) + \alpha(H, \beta) = 0.$$

In secondo luogo si richiami la nota sizigia fra le forme invariantive della biquadratica ⁴⁴) e cioè:

$$(3) \quad 2j\alpha^3 - 3i\alpha^2H + 6H^3 + 12T^2 = 0.$$

Da questa, eseguendo la prima spinta su β e ricordando come da una nota for-

⁴³) Per la forma $(H\Delta)^2(H\Delta')H_\lambda\Delta'_\lambda$ l'applicazione del metodo richiede però la preventiva interpretazione dell'involuppo $(H\Delta)^2H_\lambda H_\mu = 0$, sulla quale non credo trattenermi.

⁴⁴) CLEBSCH, Op. cit., ⁶), § 42, form. (1).

mola ⁴⁵) si deduca:

$$2(T, \beta) = H(\alpha, \beta)^2 - \alpha(H, \beta)^2,$$

si ricava la:

$$(4) \quad 2\alpha(j\alpha - iH)(\alpha, \beta) + (6H^2 - i\alpha^2)(H, \beta) + 6HT(\alpha, \beta)^2 - 6\alpha T(H, \beta)^2 = 0.$$

Si faccia ora la *seconda spinta* di (3) su β . Cogli ordinari procedimenti del calcolo simbolico e facendo uso di formole note ⁴⁶) si ottengono le relazioni:

$$(\alpha^3, \beta)^2 = \alpha^2(\alpha, \beta)^2 - \frac{4}{11}\alpha H\beta,$$

$$(\alpha^2 H, \beta)^2 = \frac{2}{3}\alpha H(\alpha, \beta)^2 + \frac{1}{3}\alpha^2(H, \beta)^2 - \frac{4}{99}(i\alpha^2 + 3H^2)\beta,$$

$$(H^3, \beta)^2 = H^2(H, \beta)^2 - \frac{2}{33}(2j\alpha - iH)\beta,$$

$$(T^2, \beta)^2 = T(T, \beta)^2 + \frac{1}{264}(i^2\alpha^2 - 12j\alpha H + 6iH^2)\beta,$$

nell'ultima delle quali si può tener conto della:

$$3(T, \beta)^2 = H(\alpha, \beta)^3 - \alpha(H, \beta)^3$$

dedotta da altra pur nota ⁴⁷). Si ha dunque:

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i^2\alpha^2 - 12j\alpha H + 6iH^2)\beta + 12\alpha(j\alpha - iH)(\alpha, \beta)^2 \\ + 6(6H^2 - i\alpha^2)(H, \beta)^2 + 24HT(\alpha, \beta)^3 - 24\alpha T(H, \beta)^3 = 0. \end{array} \right.$$

Si eseguisca infine la *terza spinta* di (3) su β . Con calcoli simbolici che ometto e mediante le formole sopra citate in margine [⁴⁶)], si trova:

$$(\alpha^3, \beta)^3 = -\frac{8}{55}H(\alpha, \beta) - \frac{52}{55}\alpha(H, \beta) + \alpha^2(\alpha, \beta)^3,$$

$$(\alpha^2 H, \beta)^3 = -\frac{4}{33}i\alpha(\alpha, \beta) - \frac{4}{11}H(H, \beta) + \frac{2}{3}\alpha H(\alpha, \beta)^3 + \frac{1}{3}\alpha^2(H, \beta)^3,$$

$$(H^3, \beta)^3 = -\frac{52}{165}jH(\alpha, \beta) + \frac{2}{165}(15iH - 4j\alpha)(H, \beta) + H^2(H, \beta)^3,$$

$$(T^2, \beta)^3 = \frac{1}{88}(i^2\alpha - 6jH)(\alpha, \beta) - \frac{3}{44}(j\alpha - iH)(H, \beta) + T(T, \beta)^3,$$

onde si deduce:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} (i^2\alpha - 6jH)(\alpha, \beta) - 6(j\alpha - iH)(H, \beta) \\ + 4\alpha(j\alpha - iH)(\alpha, \beta)^3 + 2(6H^2 - i\alpha^2)(H, \beta)^2 + 24T(T, \beta)^3 = 0. \end{array} \right.$$

Le (2), (4), (5), (6) stabiliscono quattro relazioni lineari fra le forme (1), relazioni che, posto:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 = j\alpha - iH, \\ \theta_2 = i^2\alpha - 6jH, \\ \theta_3 = 6H^2 - i\alpha^2, \\ \theta_4 = i^2\alpha^2 - 12j\alpha H + 6iH^2, \end{array} \right.$$

⁴⁵) CLEBSCH, Op. cit., ⁶), § 42, form. (6).

⁴⁶) Le seguenti: $(\alpha, H)^2 = \frac{1}{6}i\alpha$; $(H, H)^2 = \frac{1}{3}j\alpha - \frac{1}{6}iH$; $(T, T)^2 = -\frac{1}{72}(i^2\alpha^2 - 12j\alpha H + 6iH^2)$

[vedi CLEBSCH, Op. cit., ⁶), § 40, form. (8); § 41, form. (5); § 43, form. (7)].

⁴⁷) CLEBSCH, Op. cit., ⁶), § 42, form. (5).

si possono scrivere così:

$$(8) \quad \begin{cases} T\beta - H(\alpha, \beta) + \alpha(H, \beta) = 0, \\ 2\alpha\theta_1(\alpha, \beta) + \theta_3(H, \beta) + 6HT(\alpha, \beta)^2 - 6\alpha T(H, \beta)^2 = 0, \\ \theta_4\beta + 12\alpha\theta_1(\alpha, \beta)^2 + 6\theta_3(H, \beta)^2 + 24HT(\alpha, \beta)^3 - 24\alpha T(H, \beta)^3 = 0, \\ \theta_2(\alpha, \beta) - 6\theta_1(H, \beta) + 4\alpha\theta_1(\alpha, \beta)^3 + 2\theta_3(H, \beta)^3 + 24T(H, \beta)^3 = 0, \end{cases}$$

ove è un utile controllo l'osservare che, quando α possiede due radici doppie, ciascuna delle forme $T, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ si annulla identicamente.

Le (8), per $T_\lambda^6 \neq 0$, sono linearmente indipendenti. Si formi infatti la matrice dei coefficienti:

$$\begin{vmatrix} T & -H & \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha\theta_1 & \theta_3 & 6HT & -6\alpha T & 0 & 0 & 0 \\ \theta_4 & 0 & 0 & 12\alpha\theta_1 & 6\theta_3 & 24HT & -24\alpha T & 0 \\ 0 & \theta_2 & -6\theta_1 & 0 & 0 & 4\alpha\theta_1 & 2\theta_3 & 24T \end{vmatrix}$$

e si osservi che, indicando con $[r' r'' r''' r^{iv}]$ il minore formato colle colonne di posto $r' r'' r''' r^{iv}$, si ha:

$$[1578] = 2^7 \cdot 3^3 \cdot \alpha^2 T^4, \quad [1468] = 2^7 \cdot 3^3 \cdot H^2 T^4.$$

Per $T_\lambda^6 \neq 0$, i due minori non si annullano contemporaneamente, perchè, se α ed H hanno una radice in comune, questa è pure radice di T ; onde risulta appunto l'indipendenza delle (8).

Il caso $T_\lambda^6 = 0$ è da escludersi effettivamente, perchè per esso le prime due relazioni si riducono alle:

$$\begin{aligned} -H(\alpha, \beta) + \alpha(H, \beta) &= 0 \\ 2\alpha\theta_1(\alpha, \beta) + \theta_3(H, \beta) &= 0 \end{aligned}$$

il cui determinante $-(H\theta_3 + 2\alpha^2\theta_1) = 12T^2$ [vedi form. (3)] si annulla. D'altra parte nell'ultima delle (8) si annulla il termine in $(T, \beta)^3$, onde in generale le (8) si riducono sostanzialmente a tre relazioni lineari indipendenti fra le prime sette forme (1). Appunto per questo al caso $T_\lambda^6 = 0$ è dedicato il n° 24 di questo §.

23. Il Prof. PASCAL, in un lavoro già citato ⁴⁸⁾, utilizzando la teoria della forma biquadratica ternaria, giunge in modo semplice a stabilire alcune sizigie fra le forme del sistema completo di tre binarie biquadratica, cubica e quadratica ed in particolare trova [loc. cit., § 10 form. (1)] una relazione lineare nelle forme $\beta; (\alpha, \beta); (\alpha, \beta)^2; (\alpha, \beta)^3; (H, \beta)^3$ del sistema completo della biquadratica e della cubica. In questo n° dimostro come tale sizigia si possa ottenere eliminando dalle prime tre delle (8) le forme (H, β) ed $(H, \beta)^2$.

Ed inverso la suddetta eliminazione conduce dapprima a:

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & T\beta - H(\alpha, \beta) \\ \theta_3 & -6\alpha T & 2\alpha\theta_1(\alpha, \beta) + 6HT(\alpha, \beta)^2 \\ 0 & 6\theta_3 & \theta_4\beta + 12\alpha\theta_1(\alpha, \beta)^2 + 24HT(\alpha, \beta)^3 - 24\alpha T(H, \beta)^3 \end{vmatrix} = 0,$$

⁴⁸⁾ l. c., 4°), c), cfr., § 9 (pag. 37 e seguenti) e § 10.

da cui ordinando si ricava:

$$(9) \quad \begin{cases} T(\theta_3^2 - \alpha^2 \theta_4) \beta - \theta_3 (H \theta_3 + 2 \alpha^2 \theta_1) (\alpha, \beta) \\ - 6 \alpha T(H \theta_3 + 2 \alpha^2 \theta_1) (\alpha, \beta)^2 - 24 \alpha^2 H T^2 (\alpha, \beta)^3 + 24 \alpha^3 T^2 (H, \beta)^3 = 0. \end{cases}$$

Ma dalle (7) e dalla (3) si ha:

$$\begin{aligned} \theta_3^2 - \alpha^2 \theta_4 &= -72 H T^2, \\ H \theta_3 + 2 \alpha^2 \theta_1 &= -12 T^2, \end{aligned}$$

onde, soppresso il fattore comune $12 T^2$, la (9) si scrive:

$$(10) \quad -6 H T \beta + \theta_3 (\alpha, \beta) + 6 \alpha T (\alpha, \beta)^2 - 2 \alpha^2 H (\alpha, \beta)^3 + 2 \alpha^3 (H, \beta)^3 = 0;$$

e questa è appunto la sizigia trovata dal Prof. PASCAL ⁴⁹⁾.

24. Per il caso $T_\lambda^6 = 0$, del quale mi occupo nel presente n° , è necessario stabilire una relazione lineare nelle forme (1), in modo che il coefficiente di $(T, \beta)^3$ non contenga il fattore T . Per questo ricorro allo sviluppo:

$$\begin{pmatrix} T & \beta & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

di GORDAN ⁵⁰⁾, dal quale, tenuta presente la $(T, \alpha)^2 \equiv 0$ ⁵¹⁾, si deduce:

$$\alpha (T, \beta)^3 = (T \alpha, \beta)^3 + \frac{6}{5} [(T, \alpha), \beta]^2 + \frac{1}{14} (T, \alpha)^3 \beta.$$

D'altra parte, mediante calcoli simbolici, si ha:

$$(T \alpha, \beta)^3 = \frac{1}{10} (T, \alpha)^3 \beta + \frac{2}{5} T (\alpha, \beta)^3 + \frac{3}{5} \alpha (T, \beta)^3$$

e, ricordata la ⁵²⁾:

$$(T, \alpha) = \frac{1}{2} H^2 - \frac{1}{12} i \alpha^2 = \frac{1}{12} \theta_3,$$

anche:

$$[(T, \alpha), \beta]^2 = -\frac{1}{21} \theta_1 \beta - \frac{1}{12} i \alpha (\alpha, \beta)^2 + \frac{1}{2} H (H, \beta)^2;$$

onde richiamando la ⁵³⁾:

$$(T, \alpha)^3 = -\frac{1}{4} (j \alpha - i H) = -\frac{1}{4} \theta_1,$$

si deduce infine:

$$(11) \quad \theta_1 \beta + i \alpha (\alpha, \beta)^2 - 6 H (H, \beta)^2 - 4 T (\alpha, \beta)^3 + 4 \alpha (T, \beta)^3 = 0,$$

che è la sizigia richiesta.

Nell'ipotesi $T_\lambda^6 = 0$, la prima, la terza, la quarta delle (8) e la (11) si riducono a:

$$(12) \quad \begin{cases} H(\alpha, \beta) - \alpha(H, \beta) = 0, \\ \theta_4 \beta + 12 \alpha \theta_1 (\alpha, \beta)^2 + 6 \theta_3 (H, \beta)^2 = 0, \\ \theta_2 (\alpha, \beta) - 6 \theta_1 (H, \beta) + 4 \alpha \theta_1 (\alpha, \beta)^3 + 2 \theta_3 (H, \beta)^3 = 0, \\ \theta_1 \beta + i \alpha (\alpha, \beta)^2 - 6 H (H, \beta)^2 + 4 \alpha (T, \beta)^3 = 0. \end{cases}$$

⁴⁹⁾ Nella memoria già citata il termine in $(\alpha, \beta)^2$ figura col segno $-$; ma che il segno sia $+$ risulta da un semplice sguardo ai calcoli precedenti, quando si tenga presente che nell'espressione di T_0 dovuta al BRIOSCHI ed ivi riportata [§ 9 form. (2)] il termine in u_3^2 fra [] va mutato di segno.

⁵⁰⁾ GORDAN, *Ueber das Formensystem binärer Formen* (Leipzig, Teubner, 1875), pag. 11, form. (III).

⁵¹⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 42, form. (7).

⁵²⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 42, form. (2).

⁵³⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 42, form. (7).

Esclusa per α l'esistenza di due radici doppie, o di una radice tripla o quadrupla, le (12), quando non sia contemporaneamente $T_\lambda^6 = 0$, $\alpha_\lambda^4 = 0$, sono linearmente indipendenti. Formata infatti la matrice dei coefficienti

$$\begin{vmatrix} 0 & H & -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta_4 & 0 & 0 & 12\alpha\theta_1 & 6\theta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta_2 & -6\theta_1 & 0 & 0 & 4\alpha\theta_1 & 2\theta_3 & 0 \\ \theta_1 & 0 & 0 & i\alpha & -6H & 0 & 0 & 4\alpha \end{vmatrix},$$

usando per i suoi minori la notazione del n° 22, si ha:

$$[3468] = -2^6 \cdot 3 \cdot \alpha^4 \theta_1^2;$$

e questo minore si annulla solo per $\alpha = 0$, perchè (non essendo $\theta_1 \equiv 0$), se θ_1 e T hanno una radice comune, questa è pure radice di α .

L'ipotesi del contemporaneo annullarsi di T e di α corrisponde al caso in cui (λ) è radice doppia per α e perciò doppia per H , quintupla per T . Ne risulta intanto l'annullarsi di tre delle forme (1), e precisamente si ha:

$$(\alpha, \beta) = 0, \quad (H, \beta) = 0, \quad (T, \beta)^3 = 0$$

qualunque siano le (u) . D'altra parte da formole note ⁵⁴⁾, si deduce:

$$(13) \quad \begin{cases} j(\alpha, \beta)^2 - i(H, \beta)^2 = 0 \\ j(\alpha, \beta)^3 - i(H, \beta)^3 = 0 \\ i^2 \beta_\lambda^3 + 6j(\alpha, \beta)^2 = 0 \end{cases} \quad (T = 0, \quad \alpha = 0)$$

Le (13) forniscono così tre relazioni lineari indipendenti fra le forme (1) non nulle e risolvono il problema nel caso in questione.

Per brevità ometto la trattazione, del resto ovvia, del caso in cui α ammetta due radici doppie, o radice tripla o quadrupla.

§ 7.

La schiera associata.

25. L'inviluppo di seconda classe $p_\lambda \equiv (\alpha\beta)^3 \alpha_\lambda = 0$, del quale è noto il significato geometrico [vedi n° 20; enunciato C)], al variare di f_λ descrive in generale una schiera, che dirò *associata* ad $[f]$ ⁵⁵⁾; ed è spontaneo il riferimento proiettivo di questa al fascio. Da un'osservazione fatta al n° 11 e dall'identità $(\alpha\alpha')^3 \alpha_\lambda \alpha'_\mu = \frac{1}{2} i(\lambda\mu)$ risulta che per $i \neq 0$ l'inviluppo $p_\lambda = 0$ è conjugato alla sola f_λ di $[f]$, mentre per $i = 0$ esso è conjugato a tutte le quadriche di $[f]$.

In questo n° e nei quattro seguenti studio la schiera associata per il caso in cui esista un tetraedro polare (autoconjugato) rispetto a tutte le quadriche di $[f]$ e riprendo perciò le notazioni usate al n° 12.

⁵⁴⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 48 [vedi specialmente form. (2)].

⁵⁵⁾ Cfr. R., n° 13, in fine.

Se si pone:

$$(1) \quad \varepsilon_{\lambda}^{(m)} = (\alpha E^{(m)})^3 \alpha_{\lambda} \quad (m = 1, 2, 3, 4),$$

la schiera associata viene così rappresentata da:

$$(2) \quad \varepsilon_{\lambda}^I u_1^2 + \varepsilon_{\lambda}^{II} u_2^2 + \varepsilon_{\lambda}^{III} u_3^2 + \varepsilon_{\lambda}^{IV} u_4^2 = 0$$

ed il discriminante del suo involuppo corrente è:

$$(3) \quad \mathfrak{A}_{\lambda}^4 = \varepsilon_{\lambda}^I \varepsilon_{\lambda}^{II} \varepsilon_{\lambda}^{III} \varepsilon_{\lambda}^{IV}.$$

Se nelle (1) si pone:

$$\alpha_{\lambda}^4 = e'_{\lambda} e''_{\lambda} e'''_{\lambda} e^{IV}_{\lambda}, \quad E_{\lambda}^3 = e'_{\lambda} e''_{\lambda} e^{IV}_{\lambda}, \text{ ecc.}$$

e si applica opportunamente l'identità fondamentale del calcolo simbolico, si ottengono per le $\varepsilon_{\lambda}^{(m)}$ espressioni che saranno utili in seguito, e precisamente:

$$(4) \quad \begin{cases} \varepsilon_{\lambda}^I = -\frac{1}{12} \{ (e''' e^{IV})^2 (e' e'') e''_{\lambda} + (e^{IV} e'')^2 (e' e''') e'''_{\lambda} + (e' e''')^2 (e' e^{IV}) e^{IV}_{\lambda} \}, \\ \varepsilon_{\lambda}^{II} = -\frac{1}{12} \{ (e^{IV} e')^2 (e'' e''') e'''_{\lambda} + (e' e''')^2 (e'' e^{IV}) e^{IV}_{\lambda} + (e''' e^{IV})^2 (e'' e') e'_{\lambda} \}, \\ \varepsilon_{\lambda}^{III} = -\frac{1}{12} \{ (e' e'')^2 (e''' e^{IV}) e^{IV}_{\lambda} + (e'' e^{IV})^2 (e''' e') e'_{\lambda} + (e^{IV} e')^2 (e''' e'') e''_{\lambda} \}, \\ \varepsilon_{\lambda}^{IV} = -\frac{1}{12} \{ (e'' e''')^2 (e^{IV} e') e'_{\lambda} + (e''' e')^2 (e^{IV} e'') e''_{\lambda} + (e' e'')^2 (e^{IV} e''') e'''_{\lambda} \}. \end{cases}$$

Per semplificare l'ulteriore trattazione, considero a parte i casi in cui α_{λ}^4 possenga una radice tripla o due radici doppie.

Nel primo caso, dalle (4) risulta immediatamente:

$$\varepsilon_{\lambda}^I = \varepsilon_{\lambda}^{II} = \varepsilon_{\lambda}^{III} = \varepsilon_{\lambda}^{IV} \equiv 0;$$

onde: *La schiera associata ad un fascio di tipo [(111) 1] è completamente indeterminata (è cioè indeterminato ogni suo involuppo). A questa conclusione si arriva anche osservando come nel caso presente la g_1^1 costituita dai gruppi polari di quello dei coni coincida colla g_3^1 singolare [vedi n° 12; d)]*

Nel secondo caso, con una scelta opportuna degli elementi di riferimento è lecito porre:

$$(5) \quad e'_{\lambda} = e''_{\lambda} = \lambda_1, \quad e'''_{\lambda} = e^{IV}_{\lambda} = \lambda_2, \quad \alpha_{\lambda}^4 = \lambda_1^2 \lambda_2^2,$$

onde, per le (4) e (3), segue:

$$(6) \quad \varepsilon_{\lambda}^I = \varepsilon_{\lambda}^{II} = -\frac{1}{6} \lambda_2, \quad \varepsilon_{\lambda}^{III} = \varepsilon_{\lambda}^{IV} = \frac{1}{6} \lambda_1, \quad \mathfrak{A}_{\lambda}^4 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} \alpha_{\lambda}^4.$$

Cioè: *La schiera associata ad un fascio di tipo [(11) (11)] è costituita dalle quadriche stesse del fascio considerate come involuppo, corrispondendosi nella proiettività tra fascio e schiera due quadriche che dividono armonicamente le due degeneri.*

26. Esclusi i due casi ora trattati, si può sempre disporre degli elementi di riferimento in modo che sia:

$$(7) \quad e'_{\lambda} = \lambda_1, \quad e''_{\lambda} = \lambda_2, \quad e'''_{\lambda} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad e^{IV}_{\lambda} = h \lambda_1 + \lambda_2$$

e si mette così in evidenza il birapporto h dei quattro coni presi nell'ordine scritto.

In virtù delle (7), le (4) divengono:

$$(8) \quad \begin{cases} \varepsilon'_\lambda = -\frac{1}{12}\{h(b+1)\lambda_1 + 2(b^2 - b + 1)\lambda_2\}, \\ \varepsilon''_\lambda = -\frac{1}{12}\{-2(b^2 - b + 1)\lambda_1 - (b+1)\lambda_2\}, \\ \varepsilon'''_\lambda = -\frac{1}{12}\{-h(2b-1)\lambda_1 - (b-2)\lambda_2\}, \\ \varepsilon^{iv}_\lambda = -\frac{1}{12}\{(b-2)\lambda_1 + (2b-1)\lambda_2\} \end{cases}$$

e di queste formole si farà uso altrove. Qui mi limito a dedurne qualche conseguenza relativa ai casi particolari più notevoli.

Se nelle (7) si attribuisce ad h uno dei valori 0, ∞ , 1, il fascio $[f]$ risulta di tipo [(11) 11]. Ma, ad es. per $h = 1$, le (8) danno:

$$(9) \quad \begin{cases} \varepsilon'_\lambda = -\varepsilon''_\lambda = -\frac{1}{6}(\lambda_1 + \lambda_2), \\ \varepsilon'''_\lambda = \varepsilon^{iv}_\lambda = \frac{1}{12}(\lambda_1 - \lambda_2). \end{cases}$$

Segue: La schiera associata ad un fascio di tipo [(11) 11] è di tipo [(11) (11)]⁵⁶⁾ e nella proiettività fra fascio e schiera i due involuppi degeneri corrispondono alla quadrica degenera ed alla sua conjugata armonica rispetto alla coppia dei coni ordinari.

Per $h = -1$ il fascio è armonico ($j = 0$) e mentre si ha:

$$(10) \quad e'_\lambda = \lambda_1, \quad e''_\lambda = \lambda_2, \quad e'''_\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad e^{iv}_\lambda = -\lambda_1 + \lambda_2,$$

le (8) diventano:

$$(11) \quad \begin{cases} \varepsilon'_\lambda = -\frac{1}{2}\lambda_2 = -\frac{1}{2}e''_\lambda, \\ \varepsilon''_\lambda = \frac{1}{2}\lambda_1 = \frac{1}{2}e'_\lambda, \\ \varepsilon'''_\lambda = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2) = -\frac{1}{4}e^{iv}_\lambda, \\ \varepsilon^{iv}_\lambda = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{4}e'''_\lambda, \end{cases}$$

onde si ricava

$$(12) \quad \mathfrak{A}^4_\lambda = \frac{1}{2^6} \alpha^4_\lambda.$$

Alle due quadriche di $[f]$ conjugate in doppio modo e biarmoniche o quadriche principali ($\lambda_1 : \lambda_2 = \pm \sqrt{-1}$) corrispondono le due quadriche stesse considerate come involuppo e scambiate fra loro. Segue:

La schiera associata ad un fascio armonico è armonica e si ottiene dal fascio mediante una qualunque delle otto polarità Π che mutano l'una nell'altra le due quadriche principali. Se due quadriche di $[f]$ sono conjugate armoniche rispetto alle quadriche principali, ad una di esse corrisponde nella schiera associata l'involuppo polare-reciproco dell'altra nelle Π . In particolare se due coni di $[f]$ sono conjugati armonici nella quaterna

⁵⁶⁾ Qui ed in seguito si suppone applicata alle schiere la classificazione duale a quella dei fasci esposta al n° 7.

$\alpha_\lambda^4 = 0$, all'uno corrisponde l'inviluppo specializzato il cui nucleo giace nella faccia del tetraedro fondamentale opposta al vertice dell'altro ⁵⁷).

Se η è radice cubica complessa dell'unità positiva, per $h = -\eta$ il fascio è equianarmonico ($i = 0$) e, mentre si ha:

$$(13) \quad e'_\lambda = \lambda_1, \quad e''_\lambda = \lambda_2, \quad e'''_\lambda = \lambda_1 + \lambda_2, \quad e^{iv}_\lambda = -\eta \lambda_1 + \lambda_2,$$

le (8) diventano:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon'_\lambda = \frac{1-\eta}{12} \eta \lambda_1 = \frac{1-\eta}{12} \eta e'_\lambda, \\ \varepsilon''_\lambda = \frac{1-\eta}{12} \eta \lambda_2 = \frac{1-\eta}{12} \eta e''_\lambda, \\ \varepsilon'''_\lambda = \frac{1-\eta}{12} \eta^2 (\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1-\eta}{12} \eta^2 e'''_\lambda, \\ \varepsilon^{iv}_\lambda = \frac{1-\eta}{12} \eta (-\eta \lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1-\eta}{12} \eta e^{iv}_\lambda, \end{array} \right.$$

onde si ha:

$$(15) \quad \mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{2^8 \cdot 3^2} \alpha_\lambda^4.$$

L'inviluppo $p_\lambda = 0$ è dunque polare-reciproco di f_λ rispetto a ciascuna delle otto quadriche:

$$x_1^2 \pm \eta^2 x_2^2 \pm \eta x_3^2 \pm x_4^2 = 0.$$

Segue: *La schiera associata ad un fascio equianarmonico è equianarmonica e polare-reciproca di questo in otto polarità Π' . Nella proiettività fra fascio e schiera si corrispondono una quadrica e l'inviluppo polare-reciproco nelle Π' ⁵⁸.*

27. In questo n° mi propongo di esprimere \mathfrak{A}_λ^4 mediante le forme invariantive del sistema di α_λ^4 . Poichè \mathfrak{A}_λ^4 è di grado 7 e di ordine 4, deve essere:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = (A i^3 + B j^2) \alpha_\lambda^4 + C i j H_\lambda^4,$$

ove A, B, C sono coefficienti numerici. Per determinarli particolarizzo in più modi il fascio. Se esso è armonico, riprese le (10), si ha:

$$i = \frac{1}{2}, \quad j = 0;$$

quindi:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{2^3} A \alpha_\lambda^4.$$

Ma per la (12) è pure:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{2^6} \alpha_\lambda^4,$$

onde segue:

$$A = \frac{1}{2^3}.$$

⁵⁷) Cfr. R., n° 23.

⁵⁸) Cfr. R., n° 20, in fine.

Se $[f]$ è equianarmonico, riprese le (13), si ha:

$$i = 0, \quad j = \frac{1}{24} \eta (\eta - 1);$$

quindi:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = -\frac{1}{2^6 \cdot 3} B \alpha_\lambda^4.$$

Ma per la (15) è:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{2^8 \cdot 3^2} \alpha_\lambda^4,$$

onde risulta:

$$B = -\frac{1}{2^2 \cdot 3}.$$

Infine se $[f]$ è di tipo $[(11)(11)]$, richiamando le (5) si ha:

$$H_\lambda^4 = -\frac{1}{6} \alpha_\lambda^4, \quad i = \frac{1}{6}, \quad j = -\frac{1}{36},$$

onde:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \left(\frac{1}{2^3 \cdot 3^3} A + \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} B + \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} C \right) \alpha_\lambda^4,$$

mentre dalla (6) si deduce:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^4} \alpha_\lambda^4.$$

Dal confronto segue:

$$6A + B + C = 1$$

e per i precedenti risultati:

$$C = \frac{1}{3}.$$

È dunque:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{24} \{ (3i^3 - 2j^2) \alpha_\lambda^4 + 8ij H_\lambda^4 \}.$$

Ottenuta così l'espressione richiesta si può osservare che \mathfrak{A}_λ^4 coincide con α_λ^4 (a meno di un fattore costante) solo quando anche H_λ^4 coincida con α_λ^4 oppure quando si annulli il coefficiente di H_λ^4 , cioè soltanto per il fascio $[(11)(11)]$ e per i casi armonico ed equianarmonico. La stessa \mathfrak{A}_λ^4 si annulla inoltre identicamente solo per $i = j = 0$, cioè per il fascio $[(111)1]$.

28. Se sulla schiera associata si opera in modo duale a quello seguito per ottenere da $[f]$ la schiera stessa, si costruisce un fascio che dirò *associato* alla schiera. Qualora questo coincida con $[f]$ dirò brevemente che sussiste il *teorema di reciprocità*. Se si osserva che negli spazii di dimensione pari il teorema analogo sussiste per ogni fascio di quadriche ⁵⁹⁾, acquista particolare interesse la ricerca dei fasci per cui sussiste nello spazio ordinario. Essa, per quanto riguarda i fasci dotati di tetraedro polare, viene esaurita nel presente n°.

Posto:

$$(16) \quad \begin{cases} E_\lambda^{i3} = \varepsilon_\lambda'' \varepsilon_\lambda''' \varepsilon_\lambda^{iv}, & E_\lambda^{i'3} = \varepsilon_\lambda''' \varepsilon_\lambda^{iv} \varepsilon_\lambda', & E_\lambda^{i''3} = \varepsilon_\lambda^{iv} \varepsilon_\lambda' \varepsilon_\lambda'', & E_\lambda^{iv3} = \varepsilon_\lambda' \varepsilon_\lambda'' \varepsilon_\lambda''', \\ k_\lambda^{(m)} = (\mathfrak{A} E^{(m)})^3 \mathfrak{A}_\lambda & (m = 1, 2, 3, 4), \end{cases}$$

⁵⁹⁾ Cfr. R., n° 20.

l'equazione del fascio associato alla schiera associata è:

$$(17) \quad k'_\lambda x_1^2 + k''_\lambda x_2^2 + k'''_\lambda x_3^2 + k^{iv}_\lambda x_4^2 = 0,$$

corrispondendosi l'involuppo $p_\lambda = 0$ e la quadrica (17).

Il discriminante del fascio è:

$$(18) \quad \Theta_\lambda^4 = k'_\lambda k''_\lambda k'''_\lambda k^{iv}_\lambda.$$

Inoltre, per dualità, dalle (4) si deduce:

$$(19) \quad \begin{cases} k'_\lambda = -\frac{1}{12} \{ (\varepsilon''' \varepsilon^{iv})^2 (\varepsilon' \varepsilon'') \varepsilon''_\lambda + (\varepsilon^{iv} \varepsilon'')^2 (\varepsilon' \varepsilon''') \varepsilon'''_\lambda + (\varepsilon'' \varepsilon''')^2 (\varepsilon' \varepsilon^{iv}) \varepsilon^{iv}_\lambda \}, \\ k''_\lambda = -\frac{1}{12} \{ (\varepsilon^{iv} \varepsilon')^2 (\varepsilon'' \varepsilon''') \varepsilon'''_\lambda + (\varepsilon' \varepsilon''')^2 (\varepsilon'' \varepsilon^{iv}) \varepsilon^{iv}_\lambda + (\varepsilon''' \varepsilon^{iv})^2 (\varepsilon'' \varepsilon') \varepsilon'_\lambda \}, \\ k'''_\lambda = -\frac{1}{12} \{ (\varepsilon' \varepsilon'')^2 (\varepsilon''' \varepsilon^{iv}) \varepsilon^{iv}_\lambda + (\varepsilon'' \varepsilon^{iv})^2 (\varepsilon''' \varepsilon') \varepsilon'_\lambda + (\varepsilon^{iv} \varepsilon')^2 (\varepsilon''' \varepsilon'') \varepsilon''_\lambda \}, \\ k^{iv}_\lambda = -\frac{1}{12} \{ (\varepsilon'' \varepsilon''')^2 (\varepsilon^{iv} \varepsilon') \varepsilon'_\lambda + (\varepsilon''' \varepsilon')^2 (\varepsilon^{iv} \varepsilon'') \varepsilon''_\lambda + (\varepsilon' \varepsilon'')^2 (\varepsilon^{iv} \varepsilon''') \varepsilon'''_\lambda \}. \end{cases}$$

Se $[f]$ è di tipo $[(111)1]$, il quesito cade per l'indeterminazione della schiera associata. Se $[f]$ è di tipo $[(11)(11)]$, mediante le (5), (6) e (19) o con una semplice considerazione geometrica, si conclude che il teorema di reciprocità sussiste.

Per gli altri casi osservo intanto come, affinchè sussista il teorema di reciprocità, debba essere:

$$(20) \quad k'_\lambda : k''_\lambda : k'''_\lambda : k^{iv}_\lambda = e'_\mu : e''_\mu : e'''_\mu : e^{iv}_\mu.$$

Ma dico che nelle (20) va posto $(\mu) = (\lambda)$. Per $i = 0$ ciò risulta effettivamente dalla proprietà racchiusa nelle (14) e dalla sua duale. Per $i \neq 0$, ricordo che l'involuppo $p_\lambda = 0$ è conjugato alla sola f_λ di $[f]$; ma dualmente la quadrica (17) cioè, per le (20), f_μ è conjugata a $p_\lambda = 0$, onde appunto risulta $(\lambda) = (\mu)$.

Perchè sussista il teorema di reciprocità è dunque necessario che k'_λ differisca da e'_λ per un fattore costante. Procedo perciò al calcolo di k'_λ , e, riprese le (7), noto che dalle (8) si deduce:

$$(21) \quad \begin{cases} (\varepsilon' \varepsilon'') = \frac{1}{12^2} \{ 4b^4 - 9b^3 + 10b^2 - 9b + 4 \}, \\ (\varepsilon' \varepsilon''') = \frac{1}{12^2} \{ 4b^4 - 7b^3 + 7b^2 \}, \\ (\varepsilon' \varepsilon^{iv}) = \frac{1}{12^2} \{ 7b^2 - 7b + 4 \}, \\ (\varepsilon''' \varepsilon^{iv}) = \frac{1}{12^2} \{ -4b^3 + 5b^2 - 5b + 4 \}, \\ (\varepsilon^{iv} \varepsilon'') = \frac{1}{12^2} \{ 4b^3 - 7b^2 + 7b \}, \\ (\varepsilon'' \varepsilon''') = \frac{1}{12^2} \{ -7b^2 + 7b - 4 \}. \end{cases}$$

Dalla prima delle (19), tenute presenti le (8) e (21), si ricava l'espressione di:

$$k'_\lambda = k'_1 \lambda_1 + k'_2 \lambda_2$$

e si trova per k'_1 un polinomio di grado 12 in h e per k'_2 il seguente:

$$k'_2 = -\frac{1}{2^{14} \cdot 3^8} \{ 32(h^{11} + 1) - 176(h^{10} + h) + 518(h^9 + h^2) \\ - 1011(h^8 + h^3) + 1146(h^7 + h^4) - 525(h^6 + h^5) \},$$

o, sotto forma più espressiva:

$$(22) \quad k'_2 = -\frac{1}{2^{14} \cdot 3^8} (h^2 - h + 1)(h + 1)(h - 2)(2h - 1) \{ 20(h^2 - h + 1)^3 - (h + 1)^2(h - 2)^2(2h - 1)^2 \}.$$

Si ricordi che h è il birapporto dei quattro coni in $[f]$ e si richiami quindi la formula ⁶⁰⁾:

$$\frac{i^3}{j^2} = 24 \frac{(h^2 - h + 1)^3}{(h + 1)^2(h - 2)^2(2h - 1)^2}.$$

Segue così dalla (22) e dalla prima delle (7): Se α'_λ ha (almeno) tre radici distinte, k'_λ coincide, a meno di un fattore costante, con e'_λ quando, e solo quando, si verifichi una delle condizioni:

$$\begin{aligned} i &= 0, \\ j &= 0, \\ 5i^3 - 6j^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ma si può dimostrare che in ciascuno di questi casi sussiste effettivamente il teorema di reciprocità.

Per $i = 0$, oppure $j = 0$, ciò risulta facilmente o mediante calcoli diretti od in modo più geometrico per mezzo delle polarità che trasformano il fascio equianarmonico od armonico nella sua schiera associata.

Nel rimanente caso si osservi intanto che, per il significato di α'_λ e Θ'_λ , le omografie binarie mutanti in sè il gruppo dei coni devono permutare in modo concorde i fattori $e^{(m)}_\lambda$ ed i fattori $k^{(m)}_\lambda$, onde dal supporre:

$$k'_\lambda = D_1 e'_\lambda,$$

ove D_1 è una costante, segue:

$$k''_\lambda : k'''_\lambda : k^{iv}_\lambda : k^{v}_\lambda = D_1 e''_\lambda : D_2 e''_\lambda : D_3 e'''_\lambda : D_4 e^{iv}_\lambda,$$

ove D_2, D_3, D_4 sono altre costanti. A completare la dimostrazione resta a provare che è:

$$(23) \quad D_1 = D_2 = D_3 = D_4.$$

Ricordando che $p_\lambda = 0$ è conjugato ad f_λ ed alla quadrica (17), risulta:

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} e'_\lambda e'_\lambda + e''_\lambda e''_\lambda + e'''_\lambda e'''_\lambda + e^{iv}_\lambda e^{iv}_\lambda &= 0, \\ D_1 e'_\lambda e'_\lambda + D_2 e''_\lambda e''_\lambda + D_3 e'''_\lambda e'''_\lambda + D_4 e^{iv}_\lambda e^{iv}_\lambda &= 0, \end{aligned} \right.$$

e, qualora queste relazioni siano indipendenti, i gruppi:

$$e'_\lambda e'_\lambda = 0, \quad e''_\lambda e''_\lambda = 0, \quad e'''_\lambda e'''_\lambda = 0, \quad e^{iv}_\lambda e^{iv}_\lambda = 0$$

debbono appartenere ad un'involuzione ordinaria, la quale, per il suo carattere invarian-

⁶⁰⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 50, form. (1).

tivo, abbia come elementi doppi due quadriche corrispondenti ad un fattore quadratico di T_λ^6 . Ne segue che \mathfrak{A}_λ^4 differisce da α_λ^4 per un fattore costante e ciò (vedi n° 27 in fine) avviene solo in casi attualmente esclusi. Le (24) non sono dunque indipendenti, cioè valgono le (23).

Concludendo:

La schiera associata ad un fascio dotato di tetraedro polare è indeterminata solo per il tipo [(11) 1] e soddisfa al teorema di reciprocità unicamente quando sussista una (ed una sola) delle relazioni:

$$a) \quad j \alpha_\lambda^4 - i H_\lambda^4 \equiv 0 \quad \{\text{tipo } [(11) (11)]\},$$

$$b) \quad i = 0,$$

$$c) \quad j = 0,$$

$$d) \quad 5 i^3 - 6 j^2 = 0.$$

29. Dall'espressione di \mathfrak{A}_λ^4 trovata al n° 27, tenuta presente la (18), si deduce per dualità:

$$\Theta_\lambda^4 = \frac{1}{24} \{ (3 i_3^3 - 2 j_3^2) \mathfrak{A}_\lambda^4 + 8 i_3 j_3 H_3 \},$$

ove con i_3, j_3, H_3 indico gli invarianti e l'Hessiano di \mathfrak{A}_λ^4 . A scopo di controllo si può verificare come Θ_λ^4 coincida (a meno di un fattore) con α_λ^4 nei casi in cui sussiste il teorema di reciprocità. La trattazione dei casi *a*), *b*), *c*) del n° precedente è ovvia. Per il caso *d*), dalla (18) e da note formole ⁶¹⁾, si ricava:

$$\mathfrak{A}_\lambda^4 = \frac{1}{3 \cdot 5} j (j \alpha_\lambda^4 + 5 i H_\lambda^4),$$

$$i_3 = \frac{2^4}{3^2 \cdot 5^2} i j^4, \quad j_3 = \frac{2^6}{3^3 \cdot 5^3} j^7,$$

$$H_3 = \frac{2}{3^2 \cdot 5} i^2 j^3 \alpha_\lambda^4 - \frac{2^2}{3^2 \cdot 5^2} j^4 H_\lambda^4;$$

onde infine:

$$\Theta_\lambda^4 = \frac{2^{16}}{3^8 5^8} j^{16} \alpha_\lambda^4.$$

La richiesta conferma è così raggiunta.

30. Nel presente n° studio la schiera associata per i fasci non dotati di tetraedro polare. Per questo va richiamato quanto è esposto al n° 13.

Tipo [211].

Ripresa la particolare rappresentazione usata al n° citato, si ottiene:

$$p_\lambda = -12 \{ (2 u_1^2 + 2 u_2^2 + 7 u_3^2 - 2 u_3 u_4) \lambda_1 - (2 u_1^2 + 2 u_2^2 + 7 u_3^2 + 2 u_3 u_4) \lambda_2 \}.$$

Il discriminante della schiera associata è dunque:

$$-4(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_1 + \lambda_2)^2$$

⁶¹⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 41, form. (5), (9), (10) ed in nota.

ed in corrispondenza ai due fattori lineari (doppi) $\lambda_1 - \lambda_2$ e $\lambda_1 + \lambda_2$ si hanno gli involuppi specializzati:

$$u_3 u_4 = 0, \quad 2u_1^2 + 2u_2^2 + 7u_3^2 = 0.$$

Segue: La schiera associata al fascio di quadriche avente per base una quartica con nodo è di tipo [(11) 2]. L'involuppo degenerare della schiera si spezza nelle stelle aventi rispettivamente per centro il nodo ed il punto (0001) il cui significato è noto (vedi n° 13); l'involuppo specializzato una volta ha per nucleo una conica che giace nel piano delle tangenti nodali, le tocca in punti della congiungente i vertici dei coni semplici ed ha quindi come triangolo polare quello dei tre vertici. Nella corrispondenza fra [f] e la schiera l'involuppo degenerare e quello semplicemente specializzato corrispondono al cono doppio ed alla quadrica coniugata armonica di questo rispetto ai coni semplici.

Tipo [31].

Nella rappresentazione del n° 13 è:

$$p_\lambda = -36u_2(2u_4\lambda_1 - u_2\lambda_2),$$

onde: La schiera associata al fascio di quadriche avente per base una quartica cuspidata è di involuppi degeneri e di tipo [2]; propriamente ciascun involuppo si spezza in due stelle aventi il centro rispettivamente nella cuspide e in un punto (variabile) della tangente cuspidale.

Tipo [22].

Usando la rappresentazione del n° 13, si ha:

$$p_\lambda = 48(u_2 u_4 \lambda_1 - u_1 u_3 \lambda_2).$$

Segue: La schiera associata ad un fascio avente per base una cubica ed una sua corda è di tipo [(11) (11)]. Ciascuno dei due involuppi degeneri si spezza nelle stelle aventi per centro rispettivamente il vertice di un cono ed il polo del piano ad esso tangente lungo la corda, nella polarità nulla determinata dalla cubica.

Tipo [(11) 2].

Sempre secondo il n° più volte citato si ha:

$$p_\lambda = 48(u_1 u_2 \lambda_1 - u_3 u_4 \lambda_2);$$

onde: La schiera associata ad un fascio di quadriche avente per base una conica con due rette complanari che la segano in punti distinti è di tipo [(11)(11)]. Dei due involuppi degeneri uno si spezza nelle due stelle aventi per centri i punti di secamento, l'altro in due stelle aventi per centro rispettivamente il vertice del cono di [f] ed il polo dell'asse della coppia di piani rispetto alla conica.

Tipo [(21) 1].

Secondo il n° 13 è:

$$p_\lambda = -12u_3^2\lambda_2,$$

onde si deduce che la schiera associata ad un fascio avente per base una coppia di coniche tangenti è indeterminata; e precisamente, ad una quadrica generica corrisponde la stella doppia avente il centro nel punto di contatto delle due coniche, mentre l'involuppo corrispondente alla coppia di piani è indeterminato.

Tipi [4], [(31)], [(22)], [(211)].

Per ciascuno di questi tipi è:

$$\alpha_\lambda^4 = e_\lambda^4,$$

essendo e_λ una forma lineare, onde:

$$p_\lambda = (e\beta)^3 e_\lambda.$$

Per il tipo [4] la $(e\beta)^3 = 0$ rappresenta la stella di piani col centro nel vertice del cono di [f], contata due volte; per gli altri tre tipi l'unica quadrica specializzata è degenera, onde è $(e\beta)^3 \equiv 0$.

Quindi: La schiera associata ad un fascio dotato di un solo cono, se questo è degenera, è «completamente» indeterminata, altrimenti è solo indeterminata nel senso che ad una quadrica generica corrisponde la stella doppia avente il centro nel vertice del cono, mentre l'involuppo corrispondente al cono è indeterminato.

Concludendo:

La schiera associata ad un fascio privo di tetraedro polare:

a) è indeterminata per tutti i fasci a cono triplo o quadruplo; salvo il fascio [31] per il quale è di tipo [2];

b) è di tipo [(11)(11)] per i fasci a due coni doppi;

c) è di tipo [(11)2] per il fascio con un sol cono doppio.

Il fascio associato alla schiera associata è indeterminato per i fasci a cono triplo o quadruplo ed è di tipo [(11)(11)] nei rimanenti casi, come segue per dualità da risultati precedenti. Se ne deduce che nessun fascio privo di tetraedro polare soddisfa al teorema di reciprocità.

§ 8.

Gli involuppi di seconda classe $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$.

31. Si consideri l'involuppo (di seconda classe):

$$(1) \quad kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0,$$

ove k ed l sono coefficienti arbitrari. Si può dimostrare che esso è *conjugato* ad f_λ ; per il che basta ricordare un'osservazione del n° 11 già applicata al n° 25 e tener presente l'identità:

$$k(\alpha\alpha')^3\alpha_\lambda\alpha'_\lambda + l(\alpha H)^3\alpha_\lambda H_\lambda \equiv 0.$$

Al variare simultaneo di $\lambda_1:\lambda_2$ e di $k:l$, l'involuppo (1) descrive in generale un sistema algebrico ∞^2 . Più precisamente, mantenuto costante $\lambda_1:\lambda_2$, l'involuppo (1) al variare di $k:l$ descrive una schiera riferita proiettivamente all'involuzione sizigetica $k\alpha_\lambda^4 + lH_\lambda^4 = 0$, mentre, tenuto costante $k:l$ ed al variare di $\lambda_1:\lambda_2$, descrive una

schiera riferita proiettivamente ad $[f]$. Le ∞^1 schiere di primo tipo formano una serie ∞^1 proiettiva ad $[f]$, le ∞^1 schiere di secondo tipo formano una serie ∞^1 proiettiva all'involuzione sizigetica. In generale due schiere di ugual serie non hanno alcuna quadrica in comune, due schiere di serie diversa hanno una quadrica in comune ⁶²).

Fra le schiere della seconda serie sono specialmente notevoli:

I°. La schiera $p_\lambda = 0$, o *schiera associata* ad $[f]$.

II°. La schiera $\pi_\lambda = 0$.

III°. La schiera $jp_\lambda - i\pi_\lambda = 0$, che verrà detta *schiera coniugata* ad $[f]$.

IV°. Le tre schiere:

$$(\varphi\beta)^2(\varphi'\beta)\varphi'_\lambda = 0, \quad (\psi\beta)^2(\psi'\beta)\psi'_\lambda = 0, \quad (\chi\beta)^2(\chi'\beta)\chi'_\lambda = 0,$$

rappresentate complessivamente da:

$$2jp_\lambda^3 - 3ip_\lambda^2\pi_\lambda + 6\pi_\lambda^3 = 0.$$

V°. Le tre schiere corrispondenti ai gruppi armonici dell'involuzione sizigetica, rappresentate complessivamente da:

$$(i^3 - 12j^2)p_\lambda^3 + 18ijp_\lambda^2\pi_\lambda - 18i^2p_\lambda\pi_\lambda^2 + 36j\pi_\lambda^3 = 0 \quad ^{63}.$$

VI°. Sei schiere di tipo $[(11)(11)]$, quando $[f]$ sia di tipo $[1111]$.

La schiera $p_\lambda = 0$ è stata diffusamente studiata al precedente §; alle rimanenti sono dedicati i tre n° che seguono.

32. Riguardo alla schiera $\pi_\lambda = 0$, del cui inviluppo generico è noto il significato, mi limito ad osservare che per i fasci dotati di cono quadruplo e per i tipi $[(21)1]$, $[(111)1]$ essa è completamente indeterminata; per il tipo $[31]$ è indeterminata nel senso che ad una f_λ generica corrisponde la stella doppia col centro nel vertice del cono triplo di $[f]$, mentre l'inviluppo corrispondente al cono triplo è indeterminato; per i fasci dotati di due coni doppi coincide colla schiera associata.

Maggior interesse presenta la schiera $jp_\lambda - i\pi_\lambda = 0$. Per trovarne il significato geometrico si ricordi (n° 11) che fra gli inviluppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ sono *coniugati a tutte le quadriche di $[f]$* quelli corrispondenti a gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ *apolari a quello dei coni*. Ora, esclusi i fasci dotati di due coni doppi o di cono triplo o di cono quadruplo, è noto

⁶²) Supposto, come avviene in generale, che il sistema $(\Phi\beta)^3 = 0$ sia ∞^3 , se si riferiscono proiettivamente i suoi inviluppi ai punti di un S_3 , gli inviluppi $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ sono in generale rappresentati dai punti di una quadrica e le schiere dell'uno o dell'altro tipo dalle generatrici dell'uno o dell'altro sistema.

⁶³) Questa equazione, come la precedente, si deduce da quanto è esposto al § 41 di CLEBSCH, Op. cit., ⁶). Si possono considerare analogamente le due schiere:

$$\left(j + \sqrt{j^2 - \frac{1}{6}i^3}\right)p_\lambda - i\pi_\lambda = 0,$$

$$\left(j - \sqrt{j^2 - \frac{1}{6}i^3}\right)p_\lambda - i\pi_\lambda = 0,$$

corrispondenti ai gruppi equianarmonici dell'involuzione sizigetica e rappresentati complessivamente da:

$$i^2p_\lambda^3 - 12jp_\lambda\pi_\lambda + 6i\pi_\lambda^3 = 0;$$

ma, a quanto pare, esse non presentano proprietà geometriche notevoli.

che i gruppi apolari a quello dei coni sono quelli polari del gruppo $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 = 0$ ⁶⁴). Segue che la schiera $j\beta_\lambda - i\pi_\lambda = 0$, quando non sia indeterminata, è costituita dagli involucri $(\Phi\beta)^3 = 0$ conjugati a tutte le quadriche del fascio; da ciò la denominazione di schiera conjugata al fascio.

Se si considera un fascio dotato di tetraedro polare e si riprendono le notazioni del n° 12, posto:

$$(2) \quad \gamma_\lambda^{(m)} = j(\alpha E^{(m)})^3 \alpha_\lambda - i(HE^{(m)})^3 H_\lambda,$$

la schiera conjugata ad $[f]$ è rappresentata da:

$$(3) \quad \gamma'_\lambda u_1^2 + \gamma''_\lambda u_2^2 + \gamma'''_\lambda u_3^2 + \gamma^{iv}_\lambda u_4^2 = 0.$$

Ricordando le relazioni:

$$j = (HE^{(m)})^3 (He^{(m)}), \quad i = (\alpha E^{(m)})^3 (\alpha e^{(m)}),$$

si trova per $\gamma_\lambda^{(m)}$ l'espressione:

$$\gamma_\lambda^{(m)} = -(\alpha H)(\alpha E^{(m)})^3 (H\bar{E}^{(m)})^3 e_\lambda^{(m)},$$

che, con un semplice calcolo simbolico, si muta nell'altra:

$$(4) \quad \gamma_\lambda^{(m)} = -(TE^{(m)})^3 (T\bar{E}^{(m)})^3 e_\lambda^{(m)}.$$

Allo scopo di trasformare ulteriormente $\gamma_\lambda^{(m)}$, calcolo dapprima $(TE^{(m)})^3 T_\lambda^3$, trovando formule che saranno utili anche in seguito.

È ben nota l'identità:

$$3(e'''e^{iv})(e^{iv}e'')(e''e''')(E_\lambda^3) = (e'''e^{iv})^3 e_\lambda^{iv3} + (e^{iv}e'')^3 e_\lambda^{'''3} + (e''e''')^3 e_\lambda^{iv3},$$

dalla quale si deduce:

$$3(e'''e^{iv})(e^{iv}e'')(e''e''')(TE')^3 T_\lambda^3 = (e'''e^{iv})^3 (Te'')^3 T_\lambda^3 + (e^{iv}e'')^3 (Te''')^3 T_\lambda^3 + (e''e''')^3 (Te^{iv})^3 T_\lambda^3.$$

Da una formola pure nota ⁶⁵) si ha però:

$$-4e_\lambda^{(m)} (Te^{(m)})^3 T_\lambda^3 = (He^{(m)})^4 \alpha_\lambda^4,$$

onde:

$$-4(Te^{(m)})^3 T_\lambda^3 = (He^{(m)})^4 E_\lambda^{(m)3},$$

quindi ad esempio:

$$32(Te'')^3 T_\lambda^3 = (e''e')^2 (e''e''')^2 (e''e^{iv})^2 E_\lambda^{iv3},$$

ed infine:

$$\begin{aligned} 96(e'''e^{iv})(e^{iv}e'')(e''e''')(TE')^3 T_\lambda^3 &= (e'''e^{iv})^3 (e''e')^2 (e''e''')^2 (e''e^{iv})^2 E_\lambda^{iv3} \\ &\quad + (e^{iv}e'')^3 (e'''e')^2 (e'''e^{iv})^2 (e'''e'')^2 E_\lambda^{'''3} \\ &\quad + (e''e''')^3 (e^{iv}e')^2 (e^{iv}e'')^2 (e^{iv}e''')^2 E_\lambda^{iv3}; \\ -96(TE')^3 T_\lambda^3 &= (e'''e^{iv})^2 (e'e'')^2 (e''e''')^2 (e''e^{iv})^2 E_\lambda^{iv3} \\ &\quad + (e^{iv}e'')^2 (e'e''')^2 (e'''e^{iv})^2 (e'''e'')^2 E_\lambda^{'''3} \\ &\quad + (e''e''')^2 (e'e^{iv})^2 (e^{iv}e'')^2 (e^{iv}e''')^2 E_\lambda^{iv3}; \\ 96(TE')^3 T_\lambda^3 &= (e'''e^{iv})(e^{iv}e'')(e''e''')e'_\lambda \{ (e'e'')^2 (e'''e^{iv})e_\lambda^{'''3} e_\lambda^{iv} \\ &\quad + (e'e''')^2 (e^{iv}e'')e_\lambda^{iv} e_\lambda^{'''3} \\ &\quad + (e'e^{iv})^2 (e''e''')e_\lambda^{'''3} e_\lambda^{iv} \}, \end{aligned}$$

⁶⁴) BERZOLARI, I. c., 4°), Nota II^a, § IV.

⁶⁵) CLEBSCH, Op. cit., 6°, § 42, form. (4).

ossia, per altra formola nota ⁶⁶⁾:

$$96 (TE')^3 T_\lambda^3 = - (e''' e^{iv})^2 (e^{iv} e'')^2 (e'' e''')^2 e_\lambda^{i3}.$$

Riunendo questa relazione colle analoghe, si hanno così le espressioni volute:

$$(5) \quad \begin{cases} 96 (TE')^3 T_\lambda^3 = - (e''' e^{iv})^2 (e^{iv} e'')^2 (e'' e''')^2 e_\lambda^{i3}, \\ 96 (TE'')^3 T_\lambda^3 = - (e^{iv} e')^2 (e' e''')^2 (e''' e^{iv})^2 e_\lambda^{i3}, \\ 96 (TE''')^3 T_\lambda^3 = - (e' e'')^2 (e'' e^{iv})^2 (e^{iv} e')^2 e_\lambda^{i3}, \\ 96 (TE^{iv})^3 T_\lambda^3 = - (e'' e''')^2 (e''' e')^2 (e' e'')^2 e_\lambda^{iv3}; \end{cases}$$

e da esse, posto:

$$M = (e' e'')(e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e' e''')$$

e ricordate le (4), si ricava:

$$(6) \quad \begin{cases} 96 \gamma'_\lambda = M(e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e' e''') e'_\lambda, \\ 96 \gamma''_\lambda = M(e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv}) e''_\lambda, \\ 96 \gamma'''_\lambda = M(e' e'')(e' e'')(e^{iv} e') e'''_\lambda, \\ 96 \gamma^{iv}_\lambda = M(e' e'')(e' e''')(e' e''') e^{iv}_\lambda; \end{cases}$$

onde risulta:

L'inviluppo $j p_\lambda - i \pi_\lambda = 0$ è polare di f_λ rispetto a ciascuna delle otto quadriche di equazione tangenziale

$$(7) \quad \begin{cases} \sqrt{(e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e' e''')} u_1^2 \pm \sqrt{(e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv})} u_2^2 \\ \pm \sqrt{(e' e^{iv})(e' e'')(e^{iv} e')} u_3^2 \pm \sqrt{(e' e'')(e' e''')(e' e''')} u_4^2 = 0 \end{cases}$$

e di equazione locale

$$\sqrt{(E' e')^3} x_1^2 \pm \sqrt{-(E'' e'')^3} x_2^2 \pm \sqrt{(E''' e''')^3} x_3^2 \pm \sqrt{-(E^{iv} e^{iv})^3} x_4^2 = 0,$$

ove i doppi segni vanno presi in tutti i modi ⁶⁷⁾.

Se ne deduce che, operando dualmente sulla schiera conjugata come si opera su $[f]$ per ottenere la schiera stessa, si ritorna ad $[f]$. Ciò era del resto prevedibile per il significato geometrico della schiera.

Per $i = 0$ si ricade in risultati precedenti (n° 26).

33. Passo alle tre schiere:

$$(\varphi \beta)^2 (\varphi' \beta) \varphi'_\lambda = 0, \quad (\psi \beta)^2 (\psi' \beta) \psi'_\lambda = 0, \quad (\chi \beta)^2 (\chi' \beta) \chi'_\lambda = 0.$$

Considero ad esempio la schiera $(\varphi \beta)^2 (\varphi' \beta) \varphi'_\lambda = 0$, ed osservo che l'equazione del suo inviluppo generico si può scrivere sotto la forma $(\varphi \beta)^2 \beta_\mu = 0$, quando si ponga $\varphi_\lambda \varphi_\mu = 0$. Esso è dunque costituito dai piani secanti in tre coniche ad invariante trilineare nullo le quadriche $\varphi_\lambda^2 = 0$ e la f_μ , conjugata armonica di f_λ rispetto alle $\varphi_\lambda^2 = 0$. Perciò la schiera è in generale individuata dagli inviluppi dei piani che segano le due quadriche

⁶⁶⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 58, form. (11).

⁶⁷⁾ Che la schiera conjugata sia polare-reciproca di $[f]$ rispetto ad otto quadriche, si può anche dimostrare ricordando che $j \alpha_\lambda^4 - i H_\lambda^2 = 0$ è gruppo conjugato a quello dei coni ed applicando un teorema generale (cfr. R., n° 19).

$\varphi_\lambda^2 = 0$ in due coniche conjugate ordinatamente come luogo ed inviluppo o come inviluppo e luogo.

Per una schiera generica $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ $[(\lambda)$ variabile], la quaterna degli inviluppi specializzati corrisponde ad una quaterna dell'involuzione sizigetica in $[f]$; onde (n° 10) gli inviluppi doppiamente conjugati corrispondono a quadriche doppiamente conjugate.

Applicando questa osservazione alla schiera in questione, si deducono gli interessanti enunciati:

Gli inviluppi dei piani secanti due quadriche doppiamente conjugate in due coniche conjugate ordinatamente come luogo ed inviluppo, o come inviluppo e luogo, sono doppiamente conjugati.

Date due coppie di quadriche conjugate in doppio modo, appartenenti ad un fascio, gli inviluppi dei piani secanti le quadriche della prima e l'una o l'altra quadrica della seconda in tre coniche ad invariante trilineare nullo sono doppiamente conjugati.

Se $[f]$ è dotato di tetraedro polare, colle notazioni del n° 12, l'equazione

$$(\varphi \beta)^2 (\varphi' \beta) \varphi'_\lambda = 0$$

si scrive così:

$$(\varphi E')^2 (\varphi' E') \varphi'_\lambda u_1^2 + (\varphi E'')^2 (\varphi' E'') \varphi'_\lambda u_2^2 + (\varphi E''')^2 (\varphi' E''') \varphi'_\lambda u_3^2 + (\varphi E^{iv})^2 (\varphi' E^{iv}) \varphi'_\lambda u_4^2 = 0.$$

Ora, supposto per fissare le idee che l'involuzione di elementi doppi $\varphi_\lambda^2 = 0$ scambi il cono (e'_λ) col cono (e''_λ) [ed (e'''_λ) con (e^{iv}_λ)], coincidendo φ_λ^2 a meno di un fattore col Jacobiano delle forme $e'_\lambda e''_\lambda$ ed $e'''_\lambda e^{iv}_\lambda$, si ha:

$$(8) \quad d \varphi_\lambda^2 = (e' e''') e''_\lambda e^{iv}_\lambda + (e' e^{iv}) e''_\lambda e'''_\lambda + (e'' e''') e'_\lambda e^{iv}_\lambda + (e'' e^{iv}) e'_\lambda e'''_\lambda,$$

(d costante), onde facilmente si deduce:

$$(9) \quad \begin{cases} d(\varphi e') \varphi_\lambda = -2(e' e''')(e' e^{iv}) e''_\lambda, \\ d(\varphi e'') \varphi_\lambda = -2(e'' e''')(e'' e^{iv}) e'_\lambda, \\ d(\varphi e''') \varphi_\lambda = 2(e' e''')(e'' e^{iv}) e^{iv}_\lambda, \\ d(\varphi e^{iv}) \varphi_\lambda = 2(e' e^{iv})(e'' e^{iv}) e'''_\lambda \end{cases}$$

ed infine:

$$(10) \quad \begin{cases} d^2(\varphi E')^2 (\varphi' E') \varphi'_\lambda = \frac{4}{3}(e' e''')(e' e^{iv})(e'' e''')(e'' e^{iv}) \{(e^{iv} e'') e'''_\lambda + (e''' e'') e^{iv}_\lambda\}, \\ d^2(\varphi E'')^2 (\varphi' E'') \varphi'_\lambda = \frac{4}{3}(e' e''')(e' e^{iv})(e'' e''')(e'' e^{iv}) \{(e^{iv} e') e''_\lambda + (e''' e') e^{iv}_\lambda\}, \\ d^2(\varphi E''')^2 (\varphi' E''') \varphi'_\lambda = \frac{4}{3}(e' e''')(e' e^{iv})(e'' e''')(e'' e^{iv}) \{(e'' e^{iv}) e'_\lambda + (e' e^{iv}) e'''_\lambda\}, \\ d^2(\varphi E^{iv})^2 (\varphi' E^{iv}) \varphi'_\lambda = \frac{4}{3}(e' e''')(e' e^{iv})(e'' e''')(e'' e^{iv}) \{(e'' e''') e'_\lambda + (e' e''') e'''_\lambda\}. \end{cases}$$

Ma è pure:

$$(11) \quad \begin{cases} (e^{iv} e''') e''_\lambda = (e^{iv} e'') e'''_\lambda - (e''' e'') e^{iv}_\lambda, \\ (e^{iv} e''') e'_\lambda = (e^{iv} e') e'''_\lambda - (e''' e') e^{iv}_\lambda, \\ (e'' e') e^{iv}_\lambda = (e'' e^{iv}) e'_\lambda - (e' e^{iv}) e'''_\lambda, \\ (e''' e') e'''_\lambda = (e'' e''') e'_\lambda - (e' e''') e^{iv}_\lambda. \end{cases}$$

Confrontando le (10) ed (11) e ricordando le precedenti osservazioni, si ha:

Se con $f^{(1)}f^{(2)}$ si indicano le quadriche conjugate armoniche dei coni $(e'_\lambda)(e''_\lambda)$ rispetto alla coppia $(e'''_\lambda)(e^{iv}_\lambda)$, e con $f^{(3)}f^{(4)}$ le conjugate armoniche di $(e'''_\lambda)(e^{iv}_\lambda)$ rispetto alla coppia $(e'_\lambda)(e''_\lambda)$:

a) Gli involuipi specializzati di $(\varphi\beta)^2(\varphi'\beta)\varphi'_\lambda=0$ corrispondono ordinatamente alle quadriche $f^{(2)}f^{(1)}f^{(4)}f^{(3)}$.

b) Essi sono costituiti dai piani secanti le $\varphi_\lambda^2=0$ e rispettivamente $f^{(1)}f^{(2)}f^{(3)}f^{(4)}$ in una terna di coniche ad invariante trilineare nullo.

Risultati analoghi si ottengono per le schiere $(\psi\beta)^2(\psi'\beta)\psi'_\lambda=0$, $(\chi\beta)^2(\chi'\beta)\chi'_\lambda=0$, in relazione alle altre due ripartizioni in coppie per la quaterna dei coni.

Per $j=0$, una delle tre schiere coincide con $\pi_\lambda=0$ (e colla schiera conjugata ad $[f]$).

Termino questo n° trovando un significato geometrico assai semplice per le tre schiere corrispondenti ai tre gruppi armonici dell'involuzione sizigetica (n° 31, V°).

Se si pone:

$$(12) \quad \varphi_\lambda^2 = (\xi\lambda)(\eta\lambda)$$

e dei tre gruppi armonici si considera quello i cui elementi conjugati sono pure conjugati armonici rispetto alla coppia $\varphi_\lambda^2=0$, l'equazione del gruppo è del tipo:

$$d'(\xi\lambda)^4 + d''(\eta\lambda)^4 = 0,$$

onde la schiera relativa è:

$$(13) \quad d'(\xi\lambda)\beta_\xi^3 + d''(\eta\lambda)\beta_\eta^3 = 0.$$

Poichè in essa ad $f_\xi f_\eta$ corrispondono gli involuipi:

$$\beta_\eta^3 = 0, \quad \beta_\xi^3 = 0,$$

si ha:

Le tre schiere $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ $[(\lambda) \text{ variabile}]$ corrispondenti ai gruppi armonici dell'involuzione sizigetica sono quelle individuate dalle tre coppie di quadriche doppiamente conjugate in $[f]$, considerate come involuipi ⁶⁸⁾.

Si può inoltre osservare che una qualunque di queste schiere è polare-reciproca di $[f]$ nelle otto polarità che scambiano fra loro le due quadriche doppiamente conjugate della coppia considerata ⁶⁹⁾.

Per la schiera (13) le quadriche-involuppo direttrici delle otto polarità sono le:

$$(14) \quad \sqrt{E_\xi^3 \bar{E}_\eta^3} u_1^2 \pm \sqrt{E_\xi^{iv3} \bar{E}_\eta^{iv3}} u_2^2 \pm \sqrt{E_\xi^{iii3} \bar{E}_\eta^{iii3}} u_3^2 \pm \sqrt{E_\xi^{iv3} \bar{E}_\eta^{iv3}} u_4^2 = 0.$$

⁶⁸⁾ Si ottengono così sei quadriche comuni ad $[f]$ e al sistema ∞^2 , $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$, in accordo colla rappresentazione degli involuipi $(\Phi\beta)^3 = 0$ sui punti dello spazio ordinario nella quale ad $[f]$ ed al sistema corrispondono una cubica ed una quadrica ^[62)]. Ma è specialmente notevole che, rispetto alla cubica ed alla quaterna di punti rappresentante su di essa la quaterna dei coni, la quadrica è nelle condizioni di quella considerata dal Prof. BERZOLARI nel lavoro citato, ^{4°)}, Nota II^a, § III, n° 15.

⁶⁹⁾ Secondo un teorema generale (R. n° 19), i gruppi $\Phi_\lambda^3 = 0$ corrispondenti agli involuipi della schiera debbono perciò essere gruppi primi polari di una quaterna conjugata a quella dei coni. Effettivamente risulta che, ad esempio, per la schiera (13) tali gruppi sono primi polari anche della quaterna $\psi_\lambda^2 \chi_\lambda^2 = 0$, conjugata (cfr. n° 10) ad $\alpha_\lambda^4 = 0$.

Ma dalle (12) e dalle (9), posto come altrove:

$$M = (e' e'')(e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e'' e'''),$$

si deduce:

$$\begin{aligned} d^3 E_{\xi}^3 \bar{E}_{\eta}^3 &= d^3 (\varphi e'')^2 (\varphi' e''')^2 (\varphi'' e^{iv})^2 = 8 M (e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e'' e'''), \\ d^3 E_{\xi}^3 \bar{E}_{\eta}^{iv3} &= d^3 (\varphi e')^2 (\varphi' e''')^2 (\varphi'' e^{iv})^2 = 8 M (e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv}), \\ d^3 E_{\xi}^{iv3} \bar{E}_{\eta}^{iv3} &= d^3 (\varphi e')^2 (\varphi' e^{iv})^2 (\varphi'' e'')^2 = -8 M (e' e^{iv})(e' e'')(e^{iv} e''), \\ d^3 E_{\xi}^{iv3} \bar{E}_{\eta}^3 &= d^3 (\varphi e')^2 (\varphi' e'')^2 (\varphi'' e''')^2 = -8 M (e' e'')(e' e''')(e'' e'''), \end{aligned}$$

onde le (14) si possono scrivere:

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} & \sqrt{(e''' e^{iv})(e^{iv} e'')(e'' e''')} u_1^2 \pm \sqrt{(e' e''')(e' e^{iv})(e''' e^{iv})} u_2^2 \\ & \pm \sqrt{-(e' e^{iv})(e' e'')(e^{iv} e'')} u_3^2 \pm \sqrt{-(e' e'')(e' e''')(e'' e''')} u_4^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

e sotto questa forma verranno utilizzate altrove (n° 40).

Per le altre due schiere analoghe alla (13) si possono svolgere considerazioni analoghe.

34. Vengo a dimostrare l'esistenza delle sei schiere di tipo [(11)(11)] di cui al n° 31, supponendo $[f]$ di tipo [1111].

Posto, colle notazioni del n° 12:

$$\varepsilon_{\lambda}^{(m)} = (\alpha E^{(m)})^3 \alpha_{\lambda}, \quad \delta_{\lambda}^{(m)} = (H E^{(m)})^3 H_{\lambda},$$

gli involuppi specializzati della schiera generica $k p_{\lambda} + l \pi_{\lambda} = 0$ $[(\lambda)$ variabile] corrispondono alle quadriche del gruppo:

$$\varkappa_{kl} \equiv (k \varepsilon'_{\lambda} + l \delta'_{\lambda})(k \varepsilon''_{\lambda} + l \delta''_{\lambda})(k \varepsilon'''_{\lambda} + l \delta'''_{\lambda})(k \varepsilon^{iv}_{\lambda} + l \delta^{iv}_{\lambda}) = 0$$

appartenente all'involuzione sizigetica. Condizione necessaria e sufficiente perchè la schiera sia [(11)(11)] è dunque che \varkappa_{kl} coincida col quadrato di un fattore quadratico di T_{λ}^6 , ossia che un suo fattore lineare appartenga pure a T_{λ}^6 .

Posto:

$$\varphi_{\lambda}^2 = (\xi \lambda)(\eta \lambda), \quad \psi_{\lambda}^2 = (\xi' \lambda)(\eta' \lambda), \quad \chi_{\lambda}^2 = (\xi'' \lambda)(\eta'' \lambda),$$

si hanno così sei valori di $k:l$, determinati ad esempio dalle:

$$\begin{aligned} k \varepsilon'_{\xi} + l \delta'_{\xi} &= 0, & k \varepsilon'_{\eta} + l \delta'_{\eta} &= 0; \\ k \varepsilon'_{\xi'} + l \delta'_{\xi'} &= 0, & k \varepsilon'_{\eta'} + l \delta'_{\eta'} &= 0; \\ k \varepsilon'_{\xi''} + l \delta'_{\xi''} &= 0, & k \varepsilon'_{\eta''} + l \delta'_{\eta''} &= 0; \end{aligned}$$

ai quali corrispondono sei schiere di tipo [(11)(11)].

Considero ad esempio la prima di queste schiere e suppongo (come altrove) che (e'_{λ}) sia conjugato armonico di (e''_{λ}) rispetto alla coppia $\varphi_{\lambda}^2 = 0$. Se si indicano ordinatamente con A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici del tetraedro fondamentale, questa schiera possiede un involuppo, corrispondente (quindi conjugato) alla quadrica f_{η} , spezzantesi in due stelle coi centri $P' P''$ su $\overline{A_1 A_2}$, ed un altro corrispondente (quindi conjugato) alla quadrica f_{ξ} , spezzantesi in due stelle coi centri $P''' P^{iv}$ su $\overline{A_3 A_4}$. Risulta così, ad esem-

pio, che $P' P''$ dividono armonicamente tanto $A_1 A_2$ quanto la coppia di punti in cui f_η taglia $\overline{A_1 A_2}$. Ma poichè nel fascio le quadriche $f_\xi f_\eta$ dividono armonicamente i coni $(e'_\lambda)(e''_\lambda)$, così, per una proprietà nota, esse tagliano $\overline{A_1 A_2}$ in due coppie di punti che si dividono armonicamente (e dividono armonicamente $A_1 A_2$). Cioè: *I punti $P' P''$ sono le intersezioni di f_ξ con $\overline{A_1 A_2}$. Analogamente: I punti $P''' P^{iv}$ sono le intersezioni di f_η con $\overline{A_3 A_4}$.*

Generalizzando il risultato:

Ciascuna delle sei schiere $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ [(λ) variabile] di tipo [(11) (11)] è individuata dagli involuppi degeneri spezzantisi nelle coppie di stelle coi centri nei punti in cui due quadriche doppiamente conjugate di $[f]$ segano rispettivamente uno e l'altro dei due spigoli (opposti) del tetraedro fondamentale tenuti fissi dall'involuzione che ha per elementi doppi le due quadriche (il che per ogni coppia di quadriche si fa in due modi, quindi appunto complessivamente in sei modi).

È dunque assai semplice il significato geometrico delle sei schiere.

Ma i dodici involuppi degeneri di seconda classe del sistema $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ possono essere altrimenti distribuiti in sei coppie, ponendo in una coppia quelli i cui nuclei sono segnati su due spigoli opposti del tetraedro da una stessa quadrica del gruppo $T_\lambda^6 = 0$. Gli involuppi di una coppia corrispondono così ad una stessa quadrica del gruppo $T_\lambda^6 = 0$; per esempio gli involuppi i cui nuclei sono segnati da f_η corrispondono ad f_ξ .

Le sei coppie determinano quindi le sei schiere di tipo [(11) (11)]:

$$\left. \begin{aligned} k p_\xi + l \pi_\xi &= 0, & k p_\eta + l \pi_\eta &= 0 \\ k p_{\xi'} + l \pi_{\xi'} &= 0, & k p_{\eta'} + l \pi_{\eta'} &= 0 \\ k p_{\xi''} + l \pi_{\xi''} &= 0, & k p_{\eta''} + l \pi_{\eta''} &= 0 \end{aligned} \right\} (k:l \text{ variabile})$$

appartenenti alla prima serie di schiere del sistema (n° 31) e (cfr. n° 33 in fine) contenenti ordinatamente le quadriche $f_\eta f_\xi$, $f_{\eta'} f_{\xi'}$, $f_{\eta''} f_{\xi''}$ considerate come involuppi. I quadrilateri gobbi sostegni delle schiere stesse hanno quindi per lati generatrici di tali quadriche 7°).

§ 9.

Gli involuppi di seconda classe

$$(T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0, \quad (\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda^2 \beta_\lambda = 0, \quad (\alpha\beta) \alpha_\lambda^3 \beta_\lambda^2 = 0.$$

35. Fra i sistemi di involuppi di seconda classe legati invariantivamente ad $[f]$ e non ancora considerati nei §§ 7 ed 8, sembrano specialmente notevoli i tre sistemi:

7°) I quadrilateri relativi a due quadriche di una stessa coppia (per es. ad $f_\xi f_\eta$) coincidono coi quadrilateri VV' considerati in una recente Nota del sig. KOHN {Über Flächen zweiter Ordnung, welche einander wechselseitig stützen [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. XV (1906), (pp. 469-476), n° 3]}.

$$(1) \quad (T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0,$$

$$(2) \quad (\alpha\beta)^2 \alpha_\lambda^2 \beta_\lambda = 0,$$

$$(3) \quad (\alpha\beta) \alpha_\lambda^3 \beta_\lambda^2 = 0,$$

i quali vengono qui brevemente studiati.

Per il primo di essi, richiamato il significato del suo inviluppo corrente ($n^\circ 21$), è opportuno trattare separatamente qualche caso particolare.

Se $[f]$ possiede un cono doppio f_ξ il fattore lineare corrispondente è quintuplo per T_λ^6 . Posto quindi:

$$T_\lambda^6 = (\xi\lambda)^5 (\eta\lambda),$$

la (1) si può scrivere come segue:

$$(\xi\lambda)^2 [(\eta\lambda) \beta_\xi^2 + (\xi\lambda) \beta_\xi^2 \beta_\eta] = 0,$$

od anche, posto:

$$(\eta\lambda)(\xi\mu) + (\xi\lambda)(\eta\mu) = 0$$

e soppresso il fattore $(\xi\lambda)^2$, così:

$$\beta_\xi^2 \beta_\mu = 0.$$

Segue: Se $[f]$ è di tipo $[(11)11]$, ogni inviluppo (1) coincide con quello spezzantesi nelle due stelle coi centri nei due punti doppi della base, salvo l'indeterminazione dell'inviluppo corrispondente alla quadrica degenera. Se $[f]$ è di tipo $[211]$, il sistema (1) è una schiera, salvo l'indeterminazione dell'inviluppo corrispondente al cono doppio; ad una f_λ generica corrisponde l'inviluppo dei piani secanti in coniche conjugate come inviluppo e luogo il cono doppio f_ξ e la quadrica f_μ , conjugata armonica di f_λ rispetto ad f_ξ ed alla quadrica f_η doppiamente conjugata con f_ξ .

Se $[f]$ possiede un cono triplo f_ξ il fattore lineare corrispondente è sestuplo per T_λ^6 , onde si ha:

$$T_\lambda^6 = (\xi\lambda)^6$$

ed (1) diviene:

$$(\xi\lambda)^3 \beta_\xi^3 = 0;$$

cioè: Se $[f]$ possiede un cono triplo, secondo che questo è degenera o no, il sistema (1) è completamente indeterminato oppure si riduce all'unico inviluppo costituito dalla stella doppia col centro nel vertice del cono, salvo l'indeterminazione dell'inviluppo corrispondente al cono stesso.

Se infine $[f]$ ha due coni doppi oppure un cono quadruplo, è $T_\lambda^6 \equiv 0$; quindi per (1) si ha indeterminazione completa.

Esaminati così i casi particolari, suppongo che $[f]$ sia di tipo $[1111]$ e riprendo le notazioni del $n^\circ 12$. Richiamate le (5) del § 8, la (1) si scrive così:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (e''' e^{iv})^2 (e^{iv} e'')^2 (e'' e''')^2 e_\lambda^{i3} u_1^2 + (e^{iv} e')^2 (e' e''')^2 (e''' e^{iv})^2 e_\lambda^{i3} u_2^2 \\ & + (e' e'')^2 (e'' e^{iv})^2 (e^{iv} e')^2 e_\lambda^{i3} u_3^2 + (e'' e''')^2 (e''' e')^2 (e' e'')^2 e_\lambda^{iv3} u_4^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Segue: Il sistema (1), relativo ad un fascio di tipo $[1111]$, possiede soltanto quattro inviluppi specializzati, corrispondenti ordinatamente ai coni di $[f]$. Nel computo degli inviluppi specializzati di (1) ciascuno di essi è da contarsi tre volte. Inoltre l'inviluppo corrispondente ad un cono è costituito dai piani secanti gli altri tre in tre coniche ad in-

variante trilineare nullo, onde le equazioni dei quattro involuppi (1) specializzati sono brevemente:

$$(E'\beta)^3 = 0, \quad (E''\beta)^3 = 0, \quad (E'''\beta)^3 = 0, \quad (E'''\beta)^3 = 0.$$

Infine, dalle note proprietà dei fattori quadratici di T_λ^6 risulta che a ciascuna delle quadriche del gruppo $T_\lambda^6 = 0$ corrisponde, come involuppo (1), quello dei piani secanti la quadrica data e la quadrica di $[f]$ ad essa doppiamente coniugata in due coniche coniugate come luogo e come involuppo. Si ottengono così (n° 33) sei involuppi comuni al sistema (1) ed al sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ studiato nel § precedente ⁷¹⁾; e i due involuppi (1) corrispondenti a due quadriche di $[f]$ doppiamente coniugate sono pure doppiamente coniugati, secondo quanto è dimostrato al n° citato.

36. Dell'involuppo (2) ricordo innanzitutto l'interpretazione geometrica data al n° 20 [enunciato B)]. Inoltre, richiamata un'osservazione del n° 11, già utilizzata altrove, e tenuta presente l'identità

$$(\alpha\alpha')^2 \alpha_\lambda^2 \alpha'_\lambda \alpha'_\mu = H_\lambda^3 H_\mu,$$

noto che l'involuppo (2) corrispondente ad f_λ è coniugato alla f_μ individuata dall'equazione $H_\lambda^3 H_\mu = 0$ ed a nessun'altra di $[f]$, se $[f]$ è generico. Questo teorema è del resto strettamente legato al significato della relazione $H_\lambda^3 H_\mu = 0$ tra f_λ ed f_μ esposta al n° 9.

La ricerca degli involuppi (2) appartenenti al sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ conduce (in generale) al seguente risultato:

Il sistema (2) ha in comune col sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ i sei involuppi corrispondenti alle quadriche $T_\lambda^6 = 0$ di $[f]$. Riprese le notazioni dei n° 33 e 34, nella seconda serie di schiere $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ si fissi la Σ_φ quarta armonica dopo la schiera $(\varphi\beta)^2(\varphi'\beta)\varphi'_\lambda = 0$, la schiera $d'(\xi\lambda)\beta_\xi^2 + d''(\eta\lambda)\beta_\eta^2 = 0$ e la schiera « coniugata » ad $[f]$, e si determinino analogamente Σ_ψ , Σ_χ . Gli involuppi (2) corrispondenti ad $f_\xi, f_\eta, f_{\xi'}, f_{\eta'}, f_{\xi''}, f_{\eta''}$ corrispondono ordinatamente ad f_η, f_ξ in Σ_φ , ad $f_{\eta'}, f_{\xi'}$ in Σ_ψ , ad $f_{\eta''}, f_{\xi''}$ in Σ_χ e forniscono tre coppie di involuppi doppiamente coniugati ⁷²⁾.

Per la dimostrazione si osservi che l'equazione $\alpha_\lambda^4 = 0$ può essere posta (ad esempio) sotto la forma ⁷³⁾:

$$(5) \quad (\xi\lambda)^4 + 6\delta(\xi\lambda)^2(\eta\lambda)^2 + (\eta\lambda)^4 = 0,$$

ove δ è una costante; mentre l'equazione $\varphi_\lambda^2 \varphi_\lambda'^2 = 0$, quella del gruppo armonico dell'involuzione sizigetica annesso a φ_λ^2 ed infine la $j\alpha_\lambda^4 - iH_\lambda^4 = 0$ si possono scrivere così:

$$(6) \quad \begin{cases} (\xi\lambda)^2(\eta\lambda)^2 = 0, \\ (\xi\lambda)^4 + (\eta\lambda)^4 = 0, \\ \delta(\xi\lambda)^4 - 2(\xi\lambda)^2(\eta\lambda)^2 + \delta(\eta\lambda)^4 = 0. \end{cases}$$

⁷¹⁾ Nella rappresentazione degli involuppi $(\Phi\beta)^3 = 0$ sui punti dello spazio, il sistema (1), come già $[f]$, è rappresentato da una cubica gobba. La quadrica immagine del sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$, anche rispetto a questa cubica e alla quaterna immagine di quella degli involuppi (1) specializzati, è nelle condizioni della quadrica studiata dal Prof. BERZOLARI e già ricordata altrove in margine [⁶⁸].

⁷²⁾ Qui vale un'osservazione simile a quella della nota ⁷¹⁾.

⁷³⁾ Cfr. CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 49, form. (1).

Segue che il gruppo dell'involuzione sizigetica quarto armonico dopo i tre gruppi (6) è:

$$(7) \quad \delta(\xi\lambda)^4 + 2(\xi\lambda)^2(\eta\lambda)^2 + \delta(\eta\lambda)^4 = 0.$$

Da (5) si deduce per l'inviluppo (2) corrente l'equazione:

$$(8) \quad [(\xi\lambda)^2 + \delta(\eta\lambda)^2]\beta_\xi^2\beta_\lambda + 4\delta(\xi\lambda)(\eta\lambda)\beta_\xi\beta_\eta\beta_\lambda + [\delta(\xi\lambda)^2 + (\eta\lambda)^2]\beta_\eta^2\beta_\lambda = 0$$

e da (7) per l'inviluppo corrente di Σ_ϕ l'altra:

$$(9) \quad \delta(\xi\lambda)\beta_\xi^3 + (\eta\lambda)\beta_\xi^2\beta_\eta + (\xi\lambda)\beta_\xi\beta_\eta^2 + \delta(\eta\lambda)\beta_\eta^3 = 0.$$

Se ora in (8) si pone $(\lambda) = (\xi)$ ed in (9) invece $(\lambda) = (\eta)$ soppressi rispettivamente i fattori $(\xi\eta)^2$, $(\xi\eta)$ si ottiene sempre l'equazione:

$$\delta\beta_\xi^3 + \beta_\xi\beta_\eta^2 = 0$$

e ciò appunto basta per dimostrare il teorema sopra enunciato.

Per la ricerca degli inviluppi (2) specializzati suppongo $[f]$ dotato di tetraedro polare. Colle notazioni del n° 12 la (2) si scrive:

$$(\alpha E')^2 \alpha_\lambda^2 E_\lambda^I u_1^2 + (\alpha E'')^2 \alpha_\lambda^2 E_\lambda^{II} u_2^2 + (\alpha E''')^2 \alpha_\lambda^2 E_\lambda^{III} u_3^2 + (\alpha E^{IV})^2 \alpha_\lambda^2 E_\lambda^{IV} u_4^2 = 0.$$

Ma è:

$$(\alpha E^{(m)})^2 \alpha_\lambda^2 E_\lambda^{(m)} = (E_\lambda^{(m)3} e_\lambda^{(m)}, \bar{E}_\lambda^{(m)3})^2 = \frac{3}{4} (E^{(m)} \bar{E}^{(m)})^2 E_\lambda^{(m)} \bar{E}_\lambda^{(m)} e_\lambda^{(m)},$$

onde segue in generale:

Il sistema (2) possiede quattro terne di inviluppi specializzati. Gli inviluppi di una terna hanno i nuclei sopra una medesima faccia del tetraedro fondamentale e corrispondono al cono di $[f]$ avente il vertice fuori dalla faccia ed alle due quadriche di $[f]$ tagliate dalla faccia stessa (n° 1) in due coniche doppiamente conjugate.

37. Dell'inviluppo (3) è noto il significato geometrico [n° 20; enunciato A)]. Dall'identità:

$$(\alpha\alpha')\alpha_\lambda^3\alpha_\lambda'^2\alpha_\mu' = \frac{1}{2}(\lambda\mu)H_\lambda^4$$

e dalla citata osservazione del n° 11, si deduce che ogni inviluppo (3) è conjugato alla quadrica corrispondente ⁷⁴⁾ ed in generale a nessun'altra di $[f]$; i soli inviluppi (3) corrispondenti alle quattro quadriche del gruppo Hessiano sono conjugati ad ogni quadrica di $[f]$. Ciascuno di questi è costituito dai piani secanti la relativa quadrica del gruppo Hessiano e quella che le corrisponde nello Steineriano in due coniche conjugate come inviluppo e come luogo. Inoltre i quattro inviluppi giacciono nella schiera conjugata ad $[f]$ (n° 32) ed in essa corrispondono alle quadriche del gruppo $2j\alpha_\lambda^4 + iH_\lambda^4 = 0$, come risulta da proprietà note ⁷⁵⁾.

Il sistema (3) oltre ai quattro inviluppi ora considerati deve averne in comune col

⁷⁴⁾ La prima parte dell'enunciato si può anche ricavare dal significato di (3) e da un teorema generale (R. n° 21 in fine), per il quale la quadrica di $[f]$ conjugata come luogo ad f_λ e l'inviluppo (3) sono polari-reciproci rispetto ad f_λ .

⁷⁵⁾ Per queste vedasi: BERZOLARI, I. c., 4°), Nota II^a, n° 18.

sistema $lp_\lambda + k\pi_\lambda = 0$ altri sei. Ma è facile riconoscere che questi corrispondono alle quadriche $T_\lambda^6 = 0$ e coincidono con quelli del sistema (1) indicati al n° 35 76).

Termino con un cenno sugli involuppi (3) specializzati, nell'ipotesi però che $[f]$ sia dotato di tetraedro polare. Colle posizioni del n° 12 l'equazione (3) diviene:

$$(\alpha E') \alpha_\lambda^3 E_\lambda'^2 u_1^2 + (\alpha E'') \alpha_\lambda^3 E_\lambda''^2 u_2^2 + (\alpha E''') \alpha_\lambda^3 E_\lambda'''^2 u_3^2 + (\alpha E^{iv}) \alpha_\lambda^3 E_\lambda^{iv2} u_4^2 = 0.$$

Ma è:

$$(\alpha E^{(m)}) \alpha_\lambda^3 E_\lambda^{(m)2} = (E_\lambda^{(m)3} e_\lambda^{(m)3}, \bar{E}_\lambda^{(m)3}) = -\frac{1}{4} E_\lambda^{(m)3} (\bar{E}^{(m)} e^{(m)}) \bar{E}_\lambda^{(m)2},$$

onde si deduce:

Al sistema (3) appartengono le stelle doppie coi centri nei vertici del tetraedro fondamentale, come involuppi ordinatamente corrispondenti ai coni di $[f]$ e da contarsi ciascuno tre volte nel computo degli involuppi (3) specializzati. Allo stesso sistema appartengono altri otto involuppi specializzati distribuiti in quattro coppie; gli involuppi di ciascuna coppia hanno i nuclei su una stessa faccia del tetraedro fondamentale e corrispondono alle quadriche di $[f]$ le cui sezioni colla faccia stessa sono (n° 1) conjugate come involuppo alla sezione del cono di $[f]$ il cui vertice non è sulla faccia.

La prima parte di questo enunciato risulta però anche direttamente dal significato del sistema (n° 20), oppure dalla sizigia (2) del n° 22. Da questa si può inoltre dedurre analogamente che il sistema $(H\beta)H_\lambda^3\beta_\lambda^2 = 0$ possiede, come involuppi, le quadriche di $[f]$ costituenti il gruppo Hessiano ed in comune con (3) i sei involuppi $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ sopra ricordati.

§ 10.

L'involuppo $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$ 77).

38. Il più semplice degli involuppi introdotti al § 5 ed annessi invariantivamente al fascio è di quarta classe e rappresentato da:

$$(1) \quad (T\beta)^3(T\beta')^3 = 0.$$

Il suo significato geometrico, che risulta facilmente da questa forma dell'equazione e lo mette in relazione col sistema $(T\beta)^3 T_\lambda^3 = 0$, è già stato assegnato al n° 21.

Se poi si considerano i casi in cui β_λ^3 acquista una radice doppia o tripla, dalla stessa (1) si deduce:

76) Nella rappresentazione più volte richiamata in nota, l'immagine di (3) è una quintica razionale di cui sono rispettivamente quadrisecante e corde le rette immagini della schiera conjugata ad $[f]$ e delle tre schiere

$$(\varphi\beta)^2(\varphi'\beta)\varphi'_\lambda = 0, \quad (\psi\beta)^2(\psi'\beta)\psi'_\lambda = 0, \quad (\chi\beta)^2(\chi'\beta)\chi'_\lambda = 0$$

del n° 33. Si hanno così i dieci punti comuni alla quintica ed alla quadrica immagine del sistema $lp_\lambda + k\pi_\lambda = 0$.

77) In questo § si suppone $[f]$ di tipo [1111], poichè per gli altri tipi l'involuppo $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$, quando non sia indeterminato, si spezza in due involuppi di seconda classe distinti o coincidenti.

I piani tangenti alla quartica base ed appartenenti all'involuppo (1) toccano in un punto della quartica una quadrica f_μ e, in generale fuori della quartica, una delle due quadriche f_ν determinate dalla $T_\mu^4 T_\nu^2 = 0$. Esistono quarantotto piani comuni ad (1) ed al fascio gobbo dei piani osculatori alla quartica e sono i piani osculatori tangenti alle singole quadriche $T_\lambda^6 = 0$.

Ma, per una nota identità ⁷⁸⁾, la (1) si può scrivere anche sotto la forma:

$$(2) \quad (p\pi) = 0,$$

che serve a porre l'involuppo (1) in relazione col sistema di involuppi di seconda classe studiato al § 8.

Infatti, se dalle equazioni

$$kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0,$$

$$kp_\mu + l\pi_\mu = 0$$

si eliminano k ed l , si trova:

$$p_\lambda \pi_\mu - p_\mu \pi_\lambda \equiv (\lambda\mu)(p\pi) = 0,$$

e, se dalle

$$kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0,$$

$$k_0 p_\lambda + l_0 \pi_\lambda = 0$$

si elimina (λ) , si trova:

$$(kl_0 - k_0 l)(p\pi) = 0;$$

onde risulta:

L'involuppo (1) è il luogo dei fasci gobbi basi delle schiere dell'una o dell'altra serie appartenenti al sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$.

Ed anche:

L'involuppo (1) è generato da due schiere distinte qualsivogliano della prima serie riferite proiettivamente fra loro, corrispondendosi due involuppi corrispondenti ad uno stesso gruppo dell'involuzione sizzigetica in $[f]$.

L'involuppo (1) è generato da due schiere distinte qualsivogliano della seconda serie riferite proiettivamente fra loro, corrispondendosi due involuppi corrispondenti ad una stessa quadrica di $[f]$.

L'involuppo (1) possiede così due serie di fasci gobbi di quarta classe; due fasci gobbi di ugual serie non hanno piani comuni, due fasci gobbi di diversa serie hanno in comune gli otto piani-base del tessuto individuato dalle relative due schiere di diversa serie del sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$. Più notevole risultato però si raggiunge se si tiene presente l'esistenza di sei schiere di tipo $[(11)(11)]$ per ciascuna serie del sistema $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$, stabilita al n° 34. Si ha cioè:

L'involuppo (1) contiene 48 fasci (ordinari) di piani, distribuiti in tre gruppi di 16. Gli assi dei fasci di uno stesso gruppo si appoggiano ad una stessa coppia di spigoli opposti del tetraedro fondamentale nei punti in cui questi sono segati dalla coppia di quadriche doppiamente conjugate di $[f]$ annessa alla coppia di spigoli. Coi 16 assi di un

⁷⁸⁾ GUNDELFINGER, l. c., ³⁸⁾, pag. 39, form. (4).

gruppo si possono costruire otto quaterne, ciascuna delle quali giace in una rigata di secondo ordine di cui gli spigoli considerati sono direttrici e vi forma gruppo armonico. I 16 fasci sono basi di una schiera di involuppi di quarta classe contenente (1) e le due quaterne (armoniche) di punti-involuppo già considerate sui due spigoli. Ecc. ecc.

Con questo enunciato l'involuppo (1) si presenta come duale della superficie tetraedrale simmetrica di quarto ordine studiata, coi metodi della geometria pura, da SCHUR nella sua memoria sulle superficie di quarto ordine ammettenti una generazione mediante quattro spazii collineari di piani, in modo che l'annessa trasformazione della superficie in sè sia collineare ⁷⁹⁾.

39. Per procedere ad uno studio ulteriore di (1), riprendo le posizioni del n° 12. Ridotte le equazioni $\beta_i^j = 0$ e $(T\beta)^i T_i^j = 0$ alla forma stabilita rispettivamente al n° citato ed al n° 35 [form. (4)], si deduce per l'involuppo (1) l'equazione:

$$(3) \quad \begin{cases} (e''' e^v)(e^v e'')(e'' e''') u_1^4 + (e' e''')(e' e^v)(e''' e^v) u_2^4 \\ + (e' e^v)(e' e'')(e^v e'') u_3^4 + (e' e'')(e' e''')(e'' e''') u_4^4 = 0. \end{cases}$$

Per quanto segue è però opportuno raggiungere una maggiore semplificazione, scegliendo il punto unità in modo che sia:

$$(4) \quad \begin{cases} (e' e'') = (e''' e^v), \\ (e' e''') = (e^v e''), \\ (e' e^v) = (e'' e'''), \end{cases}$$

onde (3) prende l'aspetto:

$$(5) \quad u_1^4 + u_2^4 + u_3^4 + u_4^4 = 0.$$

Risulta così evidente l'invariantività di (1) rispetto ad un gruppo G_{1536} di $64 \times 24 = 1536$ collineazioni ⁸⁰⁾, rappresentate colle notazioni attuali da:

$$(6) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_{l_1} : (\sqrt{-1})^{m_2} x_{l_2} : (\sqrt{-1})^{m_3} x_{l_3} : (\sqrt{-1})^{m_4} x_{l_4},$$

$$(6') \quad u'_1 : u'_2 : u'_3 : u'_4 = u_{l_1} : (\sqrt{-1})^{n_2} u_{l_2} : (\sqrt{-1})^{n_3} u_{l_3} : (\sqrt{-1})^{n_4} u_{l_4},$$

ove per $l_1 l_2 l_3 l_4$ si prendono tutte e 24 le permutazioni degli indici 1, 2, 3, 4 ed a ciascuna delle $m_2 m_3 m_4$ si attribuiscono i valori 0, 1, 2, 3, il che si fa complessivamente in 64 modi distinti; mentre n_p ($p = 2, 3, 4$) è individuato da:

$$m_p + n_p \equiv 0, \quad \text{mod } 4; \quad 0 \leq n_p < 4.$$

La (6) sarà brevemente rappresentata col simbolo:

$$\Omega(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4).$$

Senza entrare in uno studio particolareggiato di G_{1536} e de' suoi sottogruppi ⁸¹⁾,

⁷⁹⁾ SCHUR, Ueber eine besondere Classe von Flächen vierter Ordnung [Mathematische Annalen, Bd. XX (1882), pp. 254-296], § 7.

⁸⁰⁾ L'esistenza di tali collineazioni (nella forma duale) è dimostrata anche da SCHUR.

⁸¹⁾ Per uno di questi cfr. BERZOLARI, Sulle collineazioni cicliche del quart'ordine determinate da un tetraedro, e sul loro legame con la teoria dei tetraedri desmici [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, serie II, vol. XXXVII (1904), pp. 745-755].

studio che riuscirebbe del resto assai semplice mediante le (6), mi limito a ricercare come il gruppo stesso operi sull'involuppo (1).

A questo proposito è essenziale notare che G_{1536} possiede come sottogruppo il G_{32} delle collineazioni mutanti $[f]$ in sè ⁸²⁾:

$$(7) \quad \Omega(1\ 2\ 3\ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_\rho = 0, 2;$$

$$(8) \quad \begin{cases} \Omega(2\ 1\ 4\ 3, m_2 m_3 m_4); & m_4 = 0, 2; \quad m_2, m_3 = 1, 3; \\ \Omega(3\ 4\ 1\ 2, m_2 m_3 m_4); & m_2 = 0, 2; \quad m_3, m_4 = 1, 3; \\ \Omega(4\ 3\ 2\ 1, m_2 m_3 m_4); & m_3 = 0, 2; \quad m_4, m_2 = 1, 3; \end{cases}$$

dove alle m_ρ sono da attribuirsi in tutti i modi i valori controindicati. In G_{32} è contenuto il G_8 delle collineazioni (7) mutanti in sè ogni quadrica rispetto alla quale è polare il tetraedro fondamentale.

Le collineazioni di G_{32} mutano in sè ogni forma geometrica invariantivamente connessa ad $[f]$ e quindi in particolare ogni schiera $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ di seconda serie $[(\lambda)$ variabile]. Segue:

Sull'involuppo (1) ogni fascio gobbo di quarta classe appartenente alla seconda serie è mutato in sè dalle collineazioni di G_{32} .

I fasci gobbi della prima serie vengono invece permutati da G_{32} come le quadriche di $[f]$ a cui corrispondono. Ma dal comportamento degli involuppi $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ degeneri risulta che *ciascun fascio gobbo della prima serie* (come la schiera di cui è base) *è mutato in sè dalle collineazioni del gruppo G_{32} :*

$$(7) \quad \Omega(1\ 2\ 3\ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_\rho = 0, 2;$$

$$(9) \quad \begin{cases} \Omega(2\ 1\ 4\ 3, m_2 m_3 m_4); & m_3 = 0, 2; \quad m_4, m_2 = 1, 3; \\ \Omega(3\ 4\ 1\ 2, m_2 m_3 m_4); & m_4 = 0, 2; \quad m_2, m_3 = 1, 3; \\ \Omega(4\ 3\ 2\ 1, m_2 m_3 m_4); & m_2 = 0, 2; \quad m_3, m_4 = 1, 3. \end{cases}$$

Stabilito così che ogni fascio gobbo di quarta classe appartenente ad (1) è mutato in sè da 32 collineazioni di G_{1536} , segue che i trasformati del fascio gobbo mediante G_{1536} sono 48. D'altra parte, il discriminante \mathfrak{z}_{kl} di $kp_\lambda + l\pi_\lambda = 0$ (cfr. n° 34) è di grado 4 tanto in (λ) quanto in $k:l$, onde come biquadratica binaria in $k:l$ [rispettivamente in (λ)] possiede un invariante assoluto con numeratore e denominatore di grado 24 in (λ) [in $k:l$]; cioè sopra (1) esistono 48 fasci gobbi di dato modulo, 24 di prima e 24 di seconda serie. Tali sono dunque i 48 fasci gobbi trasformati di uno di essi.

Ma fra le collineazioni di G_{1536} quelle che mutano ciascun fascio gobbo di (1) in fasci gobbi di ugual serie, mutando in sè la prima serie ed in sè la seconda, formano

⁸²⁾ L'invariantività di $[f]$ rispetto alle collineazioni sotto enumerate si può verificare sulle equazioni dei coni, tenute presenti le (4). Per citazioni sul G_{32} cfr. l'articolo *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven* di STAUDE in *Encyclopädie der Math. Wissenschaften*, Bd. III, 2, Heft 2 (Leipzig, Teubner, 1904).

un gruppo G_{768} , composto dalle:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4); \quad m_p = 0, 2; \\ \Omega(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4); \quad m_2 = 0, 2; \quad m_3, m_4 = 1, 3; \\ \Omega(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4); \quad m_3 = 0, 2; \quad m_4, m_2 = 1, 3; \\ \Omega(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4); \quad m_4 = 0, 2; \quad m_2, m_3 = 1, 3; \end{array} \right.$$

come si può ancora verificare sul comportamento degli involuipi $k p_\lambda + l \pi_\lambda = 0$ degeneri. È così stabilita la generazione dei 24 trasformati di un fascio gobbo appartenenti alla stessa serie.

Essi possono essere distribuiti in sei *quaterne*, in modo che, fissato un ordinamento per le faccie del tetraedro fondamentale, nelle schiere aventi per basi fasci gobbi di una quaterna, gli involuipi specializzati presentino nell'ordine corrispondente *lo stesso birapporto*.

Segue che ogni quaterna è mutata in sé dal gruppo G_{128} delle collineazioni (10) relative alle permutazioni $l_1 l_2 l_3 l_4$ seguenti:

$$1 \ 2 \ 3 \ 4,$$

$$2 \ 1 \ 4 \ 3,$$

$$3 \ 4 \ 1 \ 2,$$

$$4 \ 3 \ 2 \ 1.$$

Lo stesso G_{128} è sottogruppo del G_{256} che trasforma in sé l'ottupla formata da una quaterna e dalla quaterna dei fasci gobbi di diversa serie dotati di ugual birapporto. Il gruppo G_{256} è costituito dalle:

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega(1 \ 2 \ 3 \ 4, m_2 m_3 m_4), \\ \Omega(2 \ 1 \ 4 \ 3, m_2 m_3 m_4), \\ \Omega(3 \ 4 \ 1 \ 2, m_2 m_3 m_4), \\ \Omega(4 \ 3 \ 2 \ 1, m_2 m_3 m_4). \end{array} \right.$$

40. Le considerazioni svolte nel precedente n° si posson mettere più strettamente in rapporto con alcune fra le schiere studiate al § 8.

Se al gruppo G_{1536} di collineazioni si aggiunge la polarità:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = u_1 : u_2 : u_3 : u_4,$$

si costruisce un gruppo G_{3072} di corrispondenze lineari (collineazioni e correlazioni) costituito dalle (6) [o (6')] e dalle:

$$(12) \quad x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = u_{l_1} : (\sqrt{-1})^{m_2} u_{l_2} : (\sqrt{-1})^{m_3} u_{l_3} : (\sqrt{-1})^{m_4} u_{l_4},$$

ove per le $l_1 l_2 l_3 l_4$ ed $m_2 m_3 m_4$ vale quanto è detto sopra. La (12) sarà indicata con:

$$\Gamma(l_1 l_2 l_3 l_4, m_2 m_3 m_4).$$

Tenute presenti le (4), risulta che le:

$$\Gamma(1 \ 2 \ 3 \ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_p = 0, 2,$$

coincidono colle otto polarità trasformanti $[f]$ nella sua schiera conjugata $[n^\circ \ 32, \text{form.}]$

(7)] e che le:

$$\Gamma(1\ 2\ 3\ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_2 = 0, 2; \quad m_3, m_4 = 1, 3;$$

$$\Gamma(1\ 2\ 3\ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_3 = 0, 2; \quad m_4, m_2 = 1, 3;$$

$$\Gamma(1\ 2\ 3\ 4, m_2 m_3 m_4); \quad m_4 = 0, 2; \quad m_2, m_3 = 1, 3;$$

coincidono colle polarità trasformanti $[f]$ nelle schiere individuate rispettivamente dalle coppie $\varphi_\lambda^2 = 0, \psi_\lambda^2 = 0, \chi_\lambda^2 = 0$ di quadriche [n° 33 form. (15) ed osservazione seguente].

Onde si ha il notevole teorema: *I fasci gobbi basi della schiera « conjugata » ad $[f]$ e delle tre schiere individuate dalle tre coppie di quadriche doppiamente conjugate in $[f]$ formano una « quaterna » sull'involuppo (1).*

Ma si può dare maggior estensione al risultato colle seguenti osservazioni. Le (12) trasformano (1) nella superficie tetraedrale simmetrica:

$$(13) \quad x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 0,$$

passante per la quartica base di $[f]$ [come (1) passa per il fascio gobbo base della schiera conjugata] e contenente le 48 rette assi dei 48 fasci di piani che appartengono ad (1) ⁸³. Su (13) il gruppo G_{1536} opera (dualmente) come su (1), mentre G_{3072} muta in sè il sistema costituito da (1) e (13), quindi anche quello delle 48 rette già ricordate.

Ma un tetraedro è tetraedro dei vertici dei coni (dei piani degli involuppi specializzati) per ∞^4 quartiche ellittiche (per ∞^4 fasci gobbi ellittici di quarta classe); mentre è tetraedro fondamentale per ∞^3 superficie tetraedrali simmetriche di tipo (13) [per ∞^3 involuppi tetraedrali simmetrici di tipo (1) ossia (5)]. D'altra parte ad una tal superficie (ad un tale involuppo) appartengono ∞^1 quartiche ellittiche (∞^1 fasci gobbi ellittici di quarta classe). Segue che per una quartica ellittica passa in generale una sola superficie tetraedrale simmetrica di tipo (13) e dualmente. Onde:

L'involuppo (1) presenta con ciascuno dei fasci di quadriche aventi la base su (13) lo stesso legame invariante che presenta con $[f]$. La superficie (13) è nella condizione duale con ciascuna delle schiere il cui fascio gobbo base appartiene ad (1). Ad ogni quartica di (13), base di un fascio di quadriche, corrisponde un fascio gobbo di (1), base della schiera a quello conjugata nel senso del n° 32; ed in tal modo a quartiche di ugual serie corrispondono fasci gobbi di ugual serie. Ad ogni « quaterna » di quartiche corrisponde così una « quaterna » di fasci gobbi, in modo che in esse una quartica ed un fascio gobbo non corrispondenti sono comuni a due stesse quadriche doppiamente conjugate, pensate come luogo o come involuppo. Ecc. ecc.

Termino colla semplice osservazione che i fasci di quadriche mutati in sè dal gruppo

⁸³) La superficie (13) è considerata come invariante del fascio anche in un lavoro del KLUYVER {Concerning the Twisted Biquadratic [American Journal of Mathematics, vol. XIX (1897), pp. 319-328]}, del quale sono venuto a conoscenza, per cortese indicazione del Prof. KOHN, quando la redazione della mia memoria era già compiuta. La trattazione svolta nel presente §, pur presentando qualche punto di contatto con quella del KLUYVER, conserva ancora il suo interesse, in quanto pone in relazione la superficie (13) coll'involuppo (1), colle schiere studiate al § 8 e in generale coi combinanti binari di $[f]$.

G_{32} mutante in sè $[f]$, sono quelli aventi per base una quartica di seconda serie su (13) , ed essi soli. Perchè un fascio

$$b'_\lambda x_1^2 + b''_\lambda x_2^2 + b'''_\lambda x_3^2 + b^{iv}_\lambda x_4^2 = 0$$

sia mutato in sè da G_{32} , sono condizioni caratteristiche le:

$$(h' h'') = (h''' h^{iv}), \quad (h' h''') = (h^{iv} h''), \quad (h' h^{iv}) = (h''' h'''),$$

analoghe alle (4). Perchè esso sia mutato in sè da G_{32}^* , ossia abbia per base una quartica di prima serie su (13) , sono invece condizioni caratteristiche le:

$$(h' h'') = (h^{iv} h'''), \quad (h' h''') = (h'' h^{iv}), \quad (h' h^{iv}) = (h''' h'').$$

§ 11.

Gli involuppi $(\varphi \Delta)^2 = 0$, $(\psi \Delta)^2 = 0$, $(\chi \Delta)^2 = 0$.

41. Al n° 21 si è già rilevato come l'involuppo:

$$(T \Delta)^2 (T \Delta')^2 (T \Delta'')^2 = 0$$

si spezzi nei tre (di quarta classe):

$$(\varphi \Delta)^2 = 0, \quad (\psi \Delta)^2 = 0, \quad (\chi \Delta)^2 = 0,$$

dei quali è noto il significato.

Riprese le notazioni del n° 12 si ha:

$$\Delta_\lambda^2 = \sum (E^{(m)} \bar{E}^{(n)})^2 E_\lambda^{(m)} \bar{E}_\lambda^{(n)} u_m^2 u_n^2,$$

ove il sommatorio va esteso alle disposizioni con ripetizione $m n$ degli indici 1, 2, 3, 4; onde anche:

$$(F \Delta)^2 = \sum (E^{(m)} \bar{E}^{(n)})^2 (F E^{(m)}) (F \bar{E}^{(n)}) u_m^2 u_n^2.$$

Se dunque si osserva che, ad esempio, φ_λ^2 è la sola forma quadratica soddisfacente ad entrambe le:

$$(E' E'')^2 (\varphi E') (\varphi E'') = 0$$

$$(E''' E^{iv})^2 (\varphi E''') (\varphi E^{iv}) = 0$$

e si indicano, come altrove, con A_1, A_2, A_3, A_4 i vertici dei coni di $[f]$, si ha:

I piani dell'involuppo $(\varphi \Delta)^2 = 0$ passanti per lo spigolo $A_1 A_2$ (rispettivamente $A_3 A_4$) si distribuiscono in due coppie armoniche fra loro e rispetto alla coppia $A_1 A_2 A_3, A_1 A_2 A_4$ (rispettivamente $A_3 A_4 A_1, A_3 A_4 A_2$); fra gli involuppi $(F \Delta)^2 = 0$ esso è il solo che gode di questa proprietà rispetto ad entrambi gli spigoli.

Analoghi enunciati si hanno per $(\psi \Delta)^2 = 0$ e $(\chi \Delta)^2 = 0$. Ma questa proprietà verrà completata al n° seguente.

Considero intanto l'intersezione degli involuppi $(\varphi \Delta)^2 = 0$, $(\psi \Delta)^2 = 0$, $(\chi \Delta)^2 = 0$ presi a due a due. Poichè ad esempio $\varphi_\lambda^2 = (\xi \lambda)(\eta \lambda)$ è Jacobiano di $\psi_\lambda^2, \chi_\lambda^2$, la schiera individuata dagli involuppi $(\psi \Delta)^2 = 0$, $(\chi \Delta)^2 = 0$ lo è pure da $\Delta_\xi^2 = 0$, $\Delta_\eta^2 = 0$. Questa

(cfr. n° 16) ha quindi per base il fascio gobbo spezzantesi in quello dei piani osculatori e nel fascio gobbo di quarta classe $(\beta\varphi)^2\beta_\lambda \equiv 0$ [ident. rispetto a (λ)]. Segue:

I tre involuppi $(\varphi\Delta)^2 = 0$, $(\psi\Delta)^2 = 0$, $(\chi\Delta)^2 = 0$ contengono il fascio gobbo dei piani osculatori alla quartica base di $[f]$ ed hanno ulteriormente in comune a due a due i fasci gobbi basi delle tre schiere introdotte al n° 31, IV°.

42. Maggior interesse ha lo studio dell'intersezione di ciascuno dei tre involuppi con $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$.

Pongo, per semplicità:

$$\Delta_\lambda^2 = (\mu\lambda)(\nu\lambda).$$

Se il piano (μ) appartiene, per esempio, a $(\varphi\Delta)^2 = 0$, è:

$$\varphi_\mu\varphi_\nu = 0$$

ed anche:

$$T_\mu^3 T_\nu^3 = 0.$$

D'altra parte, per $(\mu) \neq (\nu)$, deve essere:

$$\beta_\lambda^3 = d(\mu\lambda)^3 + d'(\nu\lambda)^3,$$

con d, d' costanti. Se è anche:

$$(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0,$$

si ha dunque:

$$d^2 T_\mu^6 + 2dd' T_\mu^3 T_\nu^3 + d'^2 T_\nu^6 = 0,$$

e, per quanto precede:

$$d^2 T_\mu^6 + d'^2 T_\nu^6 = 0.$$

Una prima serie di soluzioni è fornita da d, d' arbitrari e:

$$T_\mu^6 = T_\nu^6 = 0,$$

onde, per $\varphi_\mu\varphi_\nu = 0$ e $(\mu) \neq (\nu)$, si giunge a:

$$\psi_\mu^2 = \psi_\nu^2 = 0 \quad [\text{quindi } (\chi\Delta)^2 = 0],$$

oppure a:

$$\chi_\mu^2 = \chi_\nu^2 = 0 \quad [\text{quindi } (\psi\Delta)^2 = 0].$$

Una seconda serie è fornita da $T_\mu^6 \neq 0$, quindi $T_\nu^6 \neq 0$, e:

$$d:d' = \sqrt{T_\nu^6} : \pm \sqrt{-T_\mu^6}.$$

La prima serie di soluzioni conduce ai fasci gobbi di quarta classe comuni a $(\varphi\Delta)^2 = 0$ e rispettivamente a $(\psi\Delta)^2 = 0$, $(\chi\Delta)^2 = 0$, dei quali è appunto già noto come appartengano a $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$. Le condizioni relative alla seconda serie sussistono per i piani il cui combinante β_λ^3 appartenga [posto ancora $\varphi_\lambda^2 = (\xi\lambda)(\eta\lambda)$] ad una delle involuzioni:

$$(\xi\lambda)[M(\xi\lambda)^2 + N(\eta\lambda)^2] = 0,$$

$$(\eta\lambda)[M(\xi\lambda)^2 + N(\eta\lambda)^2] = 0,$$

e quindi soddisfi alle:

$$\alpha_\eta(\alpha\beta)^3 = 0, \quad H_\eta(H\beta)^3 = 0,$$

oppure alle:

$$\alpha_\xi(\alpha\beta)^3 = 0, \quad H_\xi(H\beta)^3 = 0,$$

come si deduce dalle note identità:

$$\alpha_{\xi} \alpha_{\eta}^3 = \alpha_{\eta} \alpha_{\xi}^3 = H_{\xi} H_{\eta}^3 = H_{\eta} H_{\xi}^3 = 0.$$

Si è così condotti alle basi delle schiere:

$$k p_{\eta} + l \pi_{\eta} = 0,$$

$$k p_{\xi} + l \pi_{\xi} = 0$$

già considerate al n° 34. Si conclude:

L'involuppo $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$ ha in comune con $(\varphi\Delta)^2 = 0$ i due fasci gobbi di quarta classe basi delle note schiere $(\psi\beta)^2\beta_{\lambda} = 0$, $(\chi\beta)^2\beta_{\lambda} = 0$ ed inoltre gli otto fasci di piani che hanno per assi le generatrici di f_{ξ} e di f_{η} secanti gli spigoli $A_1 A_2$, $A_3 A_4$.

Risultano così determinati anche i quattro piani di $(\varphi\Delta)^2 = 0$ passanti per $A_1 A_2$ (rispettivamente per $A_3 A_4$) e considerati al n° precedente.

Analoghe conclusioni si hanno per $(\psi\Delta)^2 = 0$ e $(\chi\Delta)^2 = 0$.

43. I tre involuppi $(\varphi\Delta)^2 = 0$, $(\psi\Delta)^2 = 0$, $(\chi\Delta)^2 = 0$ si possono mettere in relazione con altre forme.

Gli involuppi:

$$k p_{\lambda} + l \pi_{\lambda} = 0,$$

$$k s_{\lambda} + l \sigma_{\lambda} = 0$$

(rispettivamente di seconda e di sesta classe), al variare di $k:l$ descrivono due schiere riferite proiettivamente ai gruppi dell'involuzione sizigetica, quindi fra loro, e legate invariantivamente ad f_{λ} . Esse generano come luogo dei fasci gobbi comuni agli involuppi corrispondenti l'involuppo di ottava classe:

$$(1) \quad p_{\lambda} \sigma_{\lambda} - \pi_{\lambda} s_{\lambda} = 0.$$

Ora si ha:

$$\begin{aligned} p_{\lambda} \sigma_{\lambda} - \pi_{\lambda} s_{\lambda} &= \{(\alpha\beta)^3(HQ)^3 - (\alpha Q)^3(H\beta)^3\} \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \\ &= \{(\alpha\beta)^2(HQ)^2 + (\alpha\beta)(\alpha Q)(H\beta)(HQ) + (\alpha Q)^2(H\beta)^2\} (\alpha H)(\beta Q) \alpha_{\lambda} H_{\lambda}. \end{aligned}$$

Ma è:

$$\begin{aligned} &(\alpha\beta)(\alpha Q)(H\beta)(HQ)(\alpha H)(\beta Q) \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \{(\alpha\beta)^2(HQ)^2 + (\alpha Q)^2(H\beta)^2 - (\alpha H)^2(\beta Q)^2\} (\alpha H)(\beta Q) \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \\ &= \frac{1}{2} \{(\alpha\beta)^2(HQ)^2 + (\alpha Q)^2(H\beta)^2\} (\alpha H)(\beta Q) \alpha_{\lambda} H_{\lambda}, \end{aligned}$$

ove si è fatto uso della $(\alpha H)^3 \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \equiv 0$ ⁸⁴⁾. Segue:

$$(2) \quad p_{\lambda} \sigma_{\lambda} - \pi_{\lambda} s_{\lambda} = \frac{3}{2} \{(\alpha\beta)^2(HQ)^2 + (\alpha Q)^2(H\beta)^2\} (\alpha H)(\beta Q) \alpha_{\lambda} H_{\lambda}.$$

D'altra parte, se pongo per un momento:

$$\Xi_{\lambda}^4 = (\beta Q) \beta_{\lambda}^2 Q_{\lambda}^2,$$

si ha:

$$\begin{aligned} (\alpha H)(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_{\lambda} H_{\lambda} &= \frac{1}{6} (\alpha H)(\beta Q)(\alpha\beta)^2(HQ)^2 \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \\ &+ \frac{2}{3} (\alpha H)(\beta Q)(\alpha\beta)(H\beta)(\alpha Q)(HQ) \alpha_{\lambda} H_{\lambda} \\ &+ \frac{1}{6} (\alpha H)(\beta Q)(\alpha Q)^2(H\beta)^2 \alpha_{\lambda} H_{\lambda}, \end{aligned}$$

⁸⁴⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 40.

ossia :

$$(3) \quad (\alpha H)(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_\lambda H_\lambda = \frac{1}{2} \{(\alpha \beta)^2(HQ)^2 + (\alpha Q)^2(H\beta)^2\} (\alpha H)(\beta Q) \alpha_\lambda H_\lambda.$$

Dalle (2)(3) si deduce:

$$(4) \quad p_\lambda \sigma_\lambda - \pi_\lambda s_\lambda = 3(\alpha H)(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_\lambda H_\lambda.$$

Ora è:

$$\begin{aligned} (T\Xi)^4 T_\lambda^2 &= \frac{1}{5}(\alpha H) \{(\alpha \Xi)^3(H\Xi) H_\lambda^2 + 3(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_\lambda H_\lambda + (\alpha \Xi)(H\Xi)^3 \alpha_\lambda^2\} \\ &= (\alpha H)(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_\lambda H_\lambda + \frac{1}{5}(\alpha H)^3(\alpha \Xi)(H\Xi) \Xi_\lambda^2 = (\alpha H)(\alpha \Xi)^2(H\Xi)^2 \alpha_\lambda H_\lambda, \end{aligned}$$

onde, per la (4), anche:

$$p_\lambda \sigma_\lambda - \pi_\lambda s_\lambda = 3(T\Xi)^4 T_\lambda^2,$$

ed infine [per una formola ben nota ⁸⁵⁾];

$$(5) \quad p_\lambda \sigma_\lambda - \pi_\lambda s_\lambda = -\frac{3}{2}(T\Delta)^2(T\Delta')^2 T_\lambda^2 \text{ }^{86)}.$$

Risulta così: *L'inviluppo (1) è costituito dai piani secanti in coniche doppiamente conjugate le coppie di quadriche del fascio tangenti ai piani che toccano f_λ ed appartengono all'inviluppo $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$.*

Ma, se si tengono presenti le:

$$\begin{aligned} (\varphi \Delta)(\varphi \Delta')(\psi \Delta)(\psi \Delta') &= (\varphi \Delta)^2(\psi \Delta')^2 - \frac{1}{2}(\varphi \psi)^2(\Delta \Delta')^2 = (\varphi \Delta)^2(\psi \Delta')^2, \\ (\varphi \Delta)(\psi \Delta) \varphi_\lambda \psi_\lambda &= \frac{1}{2}(\varphi \Delta)^2 \psi_\lambda^2 + \frac{1}{2}(\psi \Delta)^2 \varphi_\lambda^2 - \frac{1}{2}(\varphi \psi)^2 \Delta_\lambda^2 = \frac{1}{2} \{(\varphi \Delta)^2 \psi_\lambda^2 + (\psi \Delta)^2 \varphi_\lambda^2\}, \\ (\varphi \Delta)(\varphi \Delta')(\psi \Delta)(\chi \Delta') \psi_\lambda \chi_\lambda &= \frac{1}{2}(\varphi \Delta)(\varphi \Delta') \{(\psi \Delta)(\psi \Delta') \chi_\lambda^2 + (\chi \Delta)(\chi \Delta') \psi_\lambda^2 - (\psi \chi)^2 \Delta_\lambda \Delta'_\lambda\} \\ &= \frac{1}{2}(\varphi \Delta)(\varphi \Delta') \{(\psi \Delta)(\psi \Delta') \chi_\lambda^2 + (\chi \Delta)(\chi \Delta') \psi_\lambda^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{(\varphi \Delta)^2(\psi \Delta')^2 \chi_\lambda^2 + (\varphi \Delta)^2(\chi \Delta')^2 \psi_\lambda^2\}, \end{aligned}$$

insieme colle analoghe, si può scrivere:

$$(6) \quad (T\Delta)^2(T\Delta')^2 T_\lambda^2 = \frac{2}{3} \{(\psi \Delta)^2(\chi \Delta')^2 \varphi_\lambda^2 + (\chi \Delta)^2(\varphi \Delta')^2 \psi_\lambda^2 + (\varphi \Delta)^2(\psi \Delta')^2 \chi_\lambda^2\},$$

onde, per la (5), si deduce:

Gli inviluppi (1) appartengono al tessuto individuato dagli inviluppi che si spezzano in due dei tre $(\varphi \Delta)^2 = 0$, $(\psi \Delta)^2 = 0$, $(\chi \Delta)^2 = 0$.

⁸⁵⁾ CLEBSCH, Op. cit., [6]); § 35; form. (2).

⁸⁶⁾ Il covariante quadratico che compare nel secondo membro è fra quelli compresi nel sistema completo da GUNDELFINGER [³⁸], ma esclusi, mediante considerazioni indirette, da SYLVESTER [⁹]. La (5) dunque, mentre conferma il risultato di SYLVESTER, lo completa, assegnando l'espressione del covariante per mezzo di $p_\lambda \pi_\lambda s_\lambda \sigma_\lambda$. Alla (5) ero pervenuto fino dal 1902, applicando una formola di GORDAN già citata [⁵⁰] e precisamente gli sviluppi:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \sigma \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} H & \beta & s \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} H & Q & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & Q & H \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \\ \begin{pmatrix} H & Q & \alpha \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & Q & H \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} Q & T & \beta \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Da (6) si deduce in particolare, ad esempio:

$$\begin{aligned}(T\Delta)^2(T\Delta')^2T_{\xi}^2 &= \frac{2}{3}(\varphi\Delta)^2\{(\chi\Delta')^2\psi_{\xi}^2 + (\psi\Delta')^2\chi_{\xi}^2\} \\ &= \frac{4}{3}(\varphi\Delta)^2(\psi\Delta')\psi_{\xi}(\chi\Delta')\chi_{\xi} \\ &= \frac{4}{3}d(\varphi\Delta)^2\Delta_{\eta}^{\prime 2},\end{aligned}$$

ove d è una costante, e si ha quindi che l'involuppo (1) corrispondente ad f_{ξ} si spezza nei due $(\varphi\Delta)^2=0$, $\Delta_{\eta}^2=0$. Enunciati analoghi valgono per le rimanenti quadriche $T_{\lambda}^6=0$.

Gli involuppi (1) sono posti altrimenti in rapporto con

$$(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2 = 2(\varphi\Delta)^2(\psi\Delta')^2(\chi\Delta'')^2 = 0,$$

mediante la (5), dal seguente enunciato:

Un piano (u) tocca due involuppi (1), ai quali corrispondono due quadriche $f_{\lambda}, f_{\lambda''}$; condizione necessaria e sufficiente perchè (u) seghi $f_{\lambda}, f_{\lambda''}$ in due coniche conjugate come involuppo ad una stessa del fascio sezione è che (u) appartenga a $(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2=0$.

44. Termino il presente § con qualche semplice osservazione dedotta dalla nota sizigia ⁸⁷⁾:

$$-2[Q_{\lambda}^3]^2 = R[\beta_{\lambda}^3]^2 + [\Delta_{\lambda}^3]^2.$$

Da questa, spingendo su T_{λ}^6 , si ha:

$$-2(TQ)^3(TQ')^3 = R(T\beta)^3(T\beta')^3 + (T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2,$$

od anche

$$-2(TQ)^3(TQ')^3 = R(T\beta)^3(T\beta')^3 + 2(\varphi\Delta)^2(\psi\Delta')^2(\chi\Delta'')^2.$$

L'involuppo (di dodicesima classe) spezzantesi in quello dei piani tangenti alla quartica base di $[f]$ ed in $(T\beta)^3(T\beta')^3=0$, e l'involuppo spezzantesi nei tre $(\varphi\Delta)^2=0$, $(\psi\Delta')^2=0$, $(\chi\Delta'')^2=0$, individuano dunque una schiera alla quale appartiene anche:

$$(7) \quad (TQ)^3(TQ')^3 = 0.$$

Il fascio gobbo dei piani osculatori alla quartica è doppio e costituito da piani stazionari per tutti gli involuppi della schiera (come per R); i 48 piani osculatori alla quartica e tangenti alle quadriche $T_{\lambda}^6=0$ sono tripli per ogni involuppo della schiera. Da precedenti risultati (n° 18 e n° 42) si ricava inoltre:

La base della schiera individuata dagli involuppi

$$R(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0 \quad e \quad (\varphi\Delta)^2(\psi\Delta')^2(\chi\Delta'')^2 = 0$$

si compone delle seguenti parti:

a) Fascio gobbo (di dodicesima classe) dei piani osculatori alla quartica, contato sei volte.

b) Sei fasci gobbi (di quarta classe) dei piani tangenti alle singole quadriche $T_{\lambda}^6=0$ nei punti della quartica.

c) Tre fasci gobbi (di quarta classe) basi delle tre schiere introdotte al n° 31, IV°, ciascuno contato due volte.

⁸⁷⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 35, form. (7).

d) Ventiquattro fasci ordinari di piani i cui assi sono le generatrici delle singole quadriche $T_\lambda^6 = 0$ secanti gli spigoli (del tetraedro fondamentale) appartenenti alla coppia di spigoli opposti « annessa » alla quadrica.

Dell'involuppo (7) risulta direttamente il significato seguente:

Se le tre quadriche segate dal piano (u) in tre coniche sulle quali la quaterna sezione della quartica base è armonica sono toccate da uno stesso piano (quindi da otto) dell'involuppo $(T\beta)^3(T\beta')^3 = 0$, e, solo allora, il piano (u) appartiene all'involuppo (7).

Ma lo stesso procedimento che conduce dalla (1) alla (2) del n° 38 permette di porre (7) sotto la forma:

$$(s\sigma) = 0,$$

onde si deduce:

Il sistema ∞^2

$$ks_\lambda + l\sigma_\lambda = 0$$

di involuppi di sesta classe contiene due serie ∞^1 di schiere descritte mantenendo costante $k:l$ e variando (λ) , o viceversa. Due schiere della prima serie sono riferite proiettivamente ad $[f]$, quindi fra loro; due della seconda lo sono all'involuzione sizzigetica, quindi fra loro; dal riferimento ora detto di due schiere di prima serie o di due di seconda serie viene generato l'involuppo (7). Ecc. ecc.

§ 12.

Il combinante τ_λ^2 ed il sistema invariante simultaneo di α_λ^4 e τ_λ^2 .

45. Se $[f]$ è ben determinato non può essere $\tau_\lambda^2 \equiv 0$, rispetto a (λ) ed alle $(u')(u'')$. Se è $\tau_\lambda^2 \equiv 0$ rispetto alle $(u')(u'')$, per un certo valore di (λ) , la f_λ corrispondente è un piano doppio: In ogni altro caso $\tau_\lambda^2 = 0$ rappresenta il complesso (quadratico) delle tangenti ad f_λ .

Segue che, in generale, $\tau_\mu \tau_\nu = 0$ rappresenta il complesso di BATTAGLINI individuato dalle quadriche $f_\mu f_\nu$.

Posto:

$$F_\lambda^2 = F_\lambda'^2 = \dots = (\mu\lambda)(\nu\lambda),$$

l'equazione del complesso diviene:

$$(1) \quad (F\tau)^2 = 0.$$

Risulta inoltre in modo semplice⁸⁸⁾ che il complesso (1) è in generale armonico alle due quadriche di $[f]$ fornite dall'equazione:

$$(\alpha F)^2 \alpha_\lambda^2 = 0;$$

ma se F_λ^2 è apolare ad α_λ^4 , il complesso (1) è armonico ad ogni quadrica di $[f]$.

Quest'ultima condizione (supposto $\alpha_\lambda^4 \not\equiv 0$) si verifica solo se $[f]$ è un fascio ar-

⁸⁸⁾ Cfr. R., n° 16.

monico, $j=0$ (in particolare dotato di cono triplo o quadruplo), e per la coppia $F_\lambda^2=0$ separante armonicamente gli elementi coniugati nella quaterna dei coni (rispettivamente per la coppia costituita dal cono triplo contato due volte o per le coppie contenenti il cono quadruplo).

Considerata F_λ^2 come forma parametrica, risulta che (1) varia in un sistema lineare e precisamente in quello al quale appartiene il sistema algebrico delle quadriche di $[f]$ pensate come complesso delle rispettive tangenti, fatta astrazione delle quadriche indeterminate come tali (piani doppi).

Se $[f]$ non possiede piani doppi, il sistema (1) è una rete e la corrispondenza fra i gruppi $F_\lambda^2=0$ ed i complessi è biunivoca senza eccezione. Se $[f]$ contiene un piano doppio, ma non è un'involuzione di piani, il sistema (1) è un fascio, salvo l'indeterminazione relativa al piano doppio; ad un gruppo $F_\lambda^2=0$ corrisponde in generale un complesso (1), ma al complesso (1) corrispondono in $[f]$ i gruppi di una g_2^1 avente come elemento doppio il piano doppio; in particolare il complesso delle tangenti ad f_λ è complesso di BATTAGLINI per ogni coppia di quadriche separanti armonicamente in $[f]$ il piano doppio e la stessa f_λ . Se infine $[f]$ è un'involuzione di piani, il sistema (1) si riduce ad un complesso lineare speciale contato due volte, salvo l'indeterminazione per le ∞^1 coppie di quadriche separanti armonicamente in $[f]$ i due piani doppi, se l'involuzione è generica, e per le ∞^1 coppie contenenti il piano doppio se l'involuzione è parabolica.

46. Se il gruppo $F_\lambda^2=0$ percorre una g_2^1 , in generale $(F\tau)^2=0$ percorre un fascio. Se la g_2^1 ha elementi doppi distinti $f_\mu f_\nu$, il fascio di complessi è rappresentato da:

$$(2) \quad d_1 \tau_\mu^2 + d_2 \tau_\nu^2 = 0$$

e la congruenza base da:

$$(3) \quad \tau_\mu^2 = 0, \quad \tau_\nu^2 = 0.$$

Se la g_2^1 è parabolica ed f_μ ne è l'elemento doppio, il fascio è rappresentato da

$$(4) \quad \tau_\mu \tau_\lambda = 0 \quad [(\lambda) \text{ variabile}]$$

e la congruenza base da:

$$(5) \quad \tau_\mu \tau_\lambda \equiv 0 \quad [\text{ident. rispetto a } (\lambda)].$$

Tale congruenza è la *varietà caratteristica* del complesso $\tau_\mu^2=0$ nel sistema ∞^1 algebrico $\tau_\lambda^2=0$, cioè la posizione limite di (3) quando f_ν tende, in $[f]$, a coincidere con f_μ ed è costituita dalle tangenti ad f_μ nei punti della quartica base.

L'equazione $(\tau\tau')^2=0$ è condizione perchè l'involuzione segnata da $[f]$ sulla retta $(u')(u'')$ sia parabolica, onde segue che $(\tau\tau')^2=0$ rappresenta il complesso (di quarto grado) delle secanti la quartica base di $[f]$; mentre $\tau_\lambda^2 \equiv 0$ [ident. rispetto a (λ)] rappresenta la rigata delle tangenti alla quartica stessa, rigata base del sistema (1).

47. A completare quanto precede stabilisco l'equazione (tangenziale) del tetraedroide superficie singolare per il complesso $(F\tau)^2=0$.

Posto:

$$\beta_\lambda^3 = b'_\lambda b''_\lambda b'''_\lambda$$

e fissato nel piano (u) un sistema $U_1 U_2 U_3$ di coordinate tangenziali, assumendo come

fondamentale il triangolo polare del fascio sezione e scegliendo opportunamente il punto unità, l'involuppo delle rette appartenenti ad $(F\tau)^2 = 0$ e giacenti in (u) è rappresentato (n° 5) da:

$$(Fh'')(Fh''')U_1^2 + (Fh''')(Fh')U_2^2 + (Fh')(Fh'')U_3^2 = 0.$$

Se il piano è singolare deve verificarsi una delle condizioni

$$(Fh'')(Fh''') = 0, \quad (Fh''')(Fh') = 0, \quad (Fh')(Fh'') = 0,$$

o, complessivamente la:

$$(6) \quad (F'h'')(F'h''')(F''h''')(F''h')(F'''h')(F'''h'') = 0.$$

Ma, come risulta in modo semplice, si ha:

$$\begin{aligned} & 9(F'\beta)^2(F'''\beta)(F''\beta')^2(F'''\beta') \\ &= 6(F'h'')(F'h''')(F''h''')(F''h')(F'''h')(F'''h'') \\ &+ (F'h')^2(F''h'')(F''h''')(F'''h'')(F'''h'') \\ &+ (F''h'')^2(F'''h''')(F'''h')(F'h'')(F'h') \\ &+ (F'''h'')^2(F'h')(F'h'')(F''h')(F''h''), \end{aligned}$$

e, con un calcolo simbolico che ometto per brevità, si ottiene pure:

$$\begin{aligned} & 9(F'F'')^2(F''' \Delta)^2 \\ &= 12(F'h'')(F'h''')(F''h''')(F''h')(F'''h')(F'''h'') \\ &- 4(F'h')^2(F''h'')(F''h''')(F'''h'')(F'''h'') \\ &- 4(F''h'')^2(F'''h''')(F'''h')(F'h'')(F'h') \\ &- 4(F'''h'')^2(F'h')(F'h'')(F''h')(F''h''). \end{aligned}$$

Segue che (6) può scriversi:

$$(7) \quad 4(F'\beta)^2(F'''\beta)(F''\beta')^2(F'''\beta') + (F'F'')^2(F''' \Delta)^2 = 0,$$

e viene così espressa mediante forme del sistema invariantivo simultaneo di β_λ^2 ed F_λ^2 , secondo CLEBSCH {Op. cit. [6]}; § 59}.

Introducendo i fattori lineari di F_λ^2 , la (7) si può porre sotto l'aspetto:

$$(8) \quad 8\beta_\mu^2\beta_\nu\beta'_\mu\beta'^2_\nu - (\mu\nu)^2\Delta_\mu\Delta_\nu = 0.$$

Onde: *Il tetraedroide superficie singolare del complesso $(F\tau)^2 = 0$ è rappresentato tangenzialmente dalla (7) [o dalla (8)] ed appartiene alla schiera individuata dall'involuppo dei piani secanti $f_\mu f_\nu$ in due coniche conjugate ad una stessa del fascio sezione e da quello spezzantesi nei due involuppi di seconda classe dei piani secanti $f_\mu f_\nu$, rispettivamente $f_\nu f_\mu$, in due coniche conjugate come luogo ed involuppo.*

Da considerazioni svolte al n° 16 e dal teorema precedente risulta che al tetraedroide considerato come involuppo appartengono i due fasci gobbi dei piani tangenti rispettivamente $f_\mu f_\nu$ nei punti della quartica base, il che è noto ed è geometricamente evidente.

48. In questo n° mi propongo di studiare il significato geometrico delle forme appartenenti al sistema invariantivo simultaneo di α_λ^4 e τ_λ^2 , attenendomi all'opera più volte citata del CLEBSCH [§ 60], salvo qualche cambiamento di notazione. Riunisco

perciò le formazioni del sistema nel quadro seguente:

Grado nei coefficienti di τ_λ^2	Ordine	Grado nei coefficienti di α_λ^4 .			
		0	1	2	3
0	0	—	—	i	j
0	4	—	α_λ^4	H_λ^4	—
0	6	—	—	—	T_λ^6
1	2	τ_λ^2	$d_\lambda^2 = (\alpha\tau)^2 \alpha_\lambda^2$	$\delta_\lambda^2 = (H\tau)^2 H_\lambda^2$	—
1	4	—	$(\alpha\tau) \alpha_\lambda^3 \tau_\lambda$	$(H\tau) H_\lambda^3 \tau_\lambda$	$(Hd) H_\lambda^3 d_\lambda$
2	0	$(\tau\tau')^2$	$(d\tau)^2 = (\alpha\tau)^2 (\alpha\tau')^2$	$(\delta\tau)^2 = (H\tau)^2 (H\tau')^2$	—
2	2	—	$(d\tau) d_\lambda \tau_\lambda$	$(\delta\tau) \delta_\lambda \tau_\lambda$	$t_\lambda^2 = (d\delta) d_\lambda \delta_\lambda$
3	0	—	—	—	$(t\tau)^2 = (d\delta)(d\tau)(\delta\tau)$

Le forme invariantive della sola α_λ^4 (n° 8, 9, 10) o della sola τ_λ^2 (n° 45, 46) sono già studiate.

Da quanto è esposto al n° 8 sulle forme polari di α_λ^4 si deduce inoltre:

L'equazione $d_\lambda^2 = 0$ rappresenta il complesso di BATTAGLINI individuato dalle due quadriche di $[f]$ biarmoniche ad f_λ .

L'equazione $(\alpha\tau)\alpha_\lambda^3\tau_\lambda = 0$ rappresenta il complesso di BATTAGLINI individuato da f_λ e dalla quadrica di $[f]$ che le è coniugata come luogo.

L'equazione $(d\tau)^2 = 0$ rappresenta il complesso (di quarto grado) delle rette tangenti a quadriche di $[f]$ fra loro biarmoniche.

Ogni retta tocca due quadriche di $[f]$ ed individua la quadrica f_μ quarta armonica dopo di esse ed f_λ ; se le quadriche nominate formano quaterna ad invariante quadrilineare nullo, e solo allora, la retta giace nel complesso (di quarto grado) $(d\tau)d_\lambda\tau_\lambda = 0$.

In modo analogo, da quanto è noto sulle polari di H_λ^4 (cfr. n° 9) si deduce l'interpretazione delle forme:

$$\delta_\lambda^2, \quad (H\tau)H_\lambda^3\tau_\lambda, \quad (\delta\tau)^2, \quad (\delta\tau)\delta_\lambda\tau_\lambda.$$

Se poi si osserva che $d_\lambda d_\mu = 0$ è il complesso (di BATTAGLINI) delle rette tangenti a coppie di quadriche formanti con $f_\lambda f_\mu$ quaterna ad invariante quadrilineare nullo, risulta anche il significato di $(Hd)H_\lambda^3 d_\lambda$. Inoltre, stabilito in modo analogo il significato di $\delta_\lambda \delta_\mu = 0$, il complesso di quarto grado $t_\lambda^2 = 0$ nasce al variare di f_μ dal riferimento proiettivo dei due fasci di complessi $d_\lambda d_\mu = 0$, $\delta_\lambda \delta_\mu = 0$.

Infine, secondo un'osservazione del CLEBSCH⁸⁹⁾, $(t\tau)^2$ differisce solo per un fat-

⁸⁹⁾ CLEBSCH, Op. cit., ⁶⁾, § 60, pag. 217.

tore da

$$(T\tau)^2(T\tau')^2(T\tau'')^2,$$

ossia da

$$(\varphi\tau)^2(\chi\tau')^2(\psi\tau'')^2,$$

come si ottiene con procedimento analogo a quello applicato all'invariante

$$(T\Delta)^2(T\Delta')^2(T\Delta'')^2$$

(cfr. n° 21). Segue che il complesso $(t\tau)^2=0$ si spezza nei tre complessi di BATTAGLINI individuati dalle tre coppie di quadriche di $[f]$ conjugate in doppio modo.

Sondrio, 25 maggio 1908.

LUIGI BRUSOTTI.