

Weitere Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne, nebst Beobachtungen von ι Pegasi.

Von W. Zuhellen.

1. Die Ermittlung kleiner Exzentrizitäten.

Zur Bestimmung von e und ω bei kreisnahen Bahnen spektroskopischer Doppelsterne hat Herr Professor Wilsing bereits in A. N. 3198 zweckmäßige Formeln abgeleitet, die auch die Grundlage des Folgenden bilden werden. Es sei mir zunächst gestattet, sie auf andern Wege und in größerer Vollständigkeit noch einmal zu entwickeln.

In die Grundgleichung für die Radialgeschwindigkeiten

$$g - \gamma = D [\cos(\omega + v) + e \cos \omega] \quad (1)$$

führen wir die mittlere Anomalie M ein durch die Gleichung

$$v - M = 2e \sin M + \frac{5}{4}e^2 \sin 2M + \dots$$

und erhalten durch Entwicklung bis zur 2. Potenz von $(v - M)$

$$g - \gamma = D (\cos(\omega + M) - 2e \sin(\omega + M) \sin M + e \cos \omega - e^2 [2 \cos(\omega + M) \sin^2 M + \frac{5}{4} \sin(\omega + M) \sin 2M])$$

oder

$$g - \gamma = D \cos(\omega + M) + De \cos(\omega + 2M) + De^2 [\cos(\omega + 3M) - \cos(\omega + M) - \frac{1}{4} \sin(\omega + M) \sin 2M] \quad (2)$$

Die Vernachlässigung des Gliedes mit e^2 führt zu der Wilsingschen Formel. Die Extremwerte desselben liegen, wie die Durchrechnung zeigt, bei $\omega = +90^\circ$, $M = \pm 90^\circ$ und erreichen $\pm 2De^2$. Die Beschränkung auf die ersten beiden Glieder ist also gestattet, wenn $2De^2$ hinreichend klein ist. Andernfalls wird man wenigstens die Hälfte des Fehlers berücksichtigen, wenn man schreibt

$$g - \gamma = D(1 - e^2) \cos(\omega + M) + De \cos(\omega + 2M). \quad (3)$$

NB. Es könnte hiernach scheinen, als ob unter Umständen die Differenz zwischen Maximum und Minimum der Geschwindigkeitskurve von $2D$ verschieden sein dürfte. Aus der Bedingungsgleichung für die Extreme, nämlich

$$\sin(\omega + M) = -\frac{2e}{1 - e^2} \sin(\omega + 2M) = -\frac{\sin 2\varphi}{\cos^3 \varphi} \sin(\omega + 2M)$$

($\varphi =$ Exzentrizitätswinkel) folgt, daß dieselben nahe bei $\omega + M = 2\varphi \sin \omega$ bzw. $= 180^\circ - 2\varphi \sin \omega$ liegen. Wir erhalten an diesen Stellen

$$g - \gamma = \pm D(1 - e^2 \cos 2\omega) + De \cos \omega + (\text{Gl. mit } e^3) \dots$$

also z. B. für $\omega = 90^\circ$ eine noch größere Spannweite als $2D$. Das rührt indes nur von der Vernachlässigung des Gliedes $De^2 \cos(\omega + 3M)$ her; die von den Beobachtungen direkt gelieferte Kurve hat stets die Spannweite $2D$. Es ist aber festzuhalten, daß die beste Sinuskurve, die durch die Beobachtungen gelegt werden kann, die Spannweite $2D(1 - e^2)$ erhalten muß.

Um nun die Koeffizienten der abgekürzten Formel (2) zu ermitteln, empfiehlt Wilsing ein graphisches Verfahren, das auch sonst wohl bei Fourierschen Reihen angewendet wird, nämlich die Verwendung einer Reihe von äquidistanten Ordinaten der durch die Beobachtungen gelegten Kurve. Er setzt damit voraus, daß diese in allen Teilen gut verbürgt sei, und daß die Beobachtungen nirgends größere Lücken aufweisen. In einem solchen Fall scheint mir aber das folgende Verfahren wesentlich einfacher zu sein, das darauf hinausläuft, die übereinander gelagerten Kurven $D \cos(\omega + M)$

und $De \cos(\omega + 2M)$ zeichnerisch voneinander zu trennen. Man trage zu dem Zweck auf Pauspapier die gewöhnliche Sinuslinie $D \sin M$ auf (natürlich im Maßstab der gegebenen Kurve), wobei D , die Spannweite zwischen Maximum und Minimum, der Kurve zu entnehmen ist. Sodann schiebe man die Sinuslinie auf der gegebenen Kurve so lange hin und her, bis 1) die Abweichungen beider in möglichst engen Grenzen bleiben, 2) die beiden Kurven sich in vier möglichst äquidistanten Punkten schneiden. Bei diesen Versuchen müssen die Abszissenachsen stets einander parallel bleiben. In der günstigsten Lage gibt 1) die Abszissenachse der aufgelegten Sinuslinie die Lage der Schwerpunktsachse $g = \gamma$ an, 2) die vier maximalen Abstände der Kurven in vertikaler Richtung sind gleich De , 3) ω und T finden sich wie folgt: In den Schnittpunkten der beiden Kurven, d. h. den Nullpunkten der sekundären Kurve $De \cos(\omega + 2M)$ korrespondieren folgende Werte:

Nullpunkt der sekundären Kurve	aufsteigender	absteigender	aufsteigender	absteigender	Mittel
Abszisse $t =$	t_1	t_2	t_3	t_4	t_m
$\omega + 2M =$	-90°	$+90^\circ$	$+270^\circ$	$+450^\circ$	$+180^\circ$
Ordinate der Sinuslinie	g_1	g_2	g_3	g_4	
$\omega + M =$	$\pm \arccos \frac{g_1}{D}$	$\pm \arccos \frac{g_2}{D}$	$\pm \arccos \frac{g_3}{D}$	$\pm \arccos \frac{g_4}{D}$	$(\omega + M)_m$

Zur Entscheidung über das Vorzeichen berücksichtige man, daß dem positiven Maximum der Sinuslinie der Wert $\omega + M = 0^\circ$, dem negativen $\omega + M = 180^\circ$ entspricht.

Dann folgt:

$$M_m = 180^\circ - (\omega + M)_m$$

$$\omega = (\omega + M)_m - M_m = 2(\omega + M)_m - 180^\circ$$

$$(t - T)_m = \frac{M_m}{\mu}$$

und endlich $T = t_m - (t - T)_m$.

Natürlich könnte man, statt mit den Mittelwerten zu arbeiten, ω und T in jeder Kolumne einzeln ableiten. Dies hat indes keinen Zweck, da die Abweichung dieser Einzel-

werte untereinander keinen Anhaltspunkt für die Unsicherheit des Mittels gibt. Hierfür ist vielmehr nur der Spielraum maßgebend, innerhalb dessen die Sinuslinie eine vertikale und horizontale Verschiebung zuläßt.

Als Beispiel greife ich wieder auf die *Rambautsche* Geschwindigkeitskurve von β Aurigae (cf. A. N. 4191) zurück. Eine mit der Amplitude 47.0 mm gezeichnete Sinuslinie ergibt die günstigste Lage, wenn ihre Abszissenachse mit der γ -Achse zusammenfällt, und die Schnittpunkte, die unten angegeben sind. Die maximalen Abweichungen sind dann 6.0, 3.2, 4.5 und 4.8 mm, im Mittel 4.6 mm; daraus folgt

$e = \frac{4.6}{47.0} = 0.098$. Das obige Schema füllt sich dann folgendermaßen aus:

Nullpunkt der sekund. Kurve	aufsteigender	absteigender	aufsteigender	absteigender	Mittel
$t =$	-0.050	$+0.140$	$+0.390$	$+0.707$	$+0.297$
$g =$	$+45.8$	$+27.8$	-38.0	-10.0	
$\omega + M =$	$-12^\circ 50'$	$+53^\circ 40'$	$+143^\circ 5'$	$+257^\circ 55'$	$+110^\circ 28'$

Also $M_m = +69^\circ 32'$, $\omega = +40^\circ 56'$, $t - T_m = \frac{69^\circ 32'}{360^\circ} = +0.193$, $T = 0.104$, während bisher die besten Werte waren: $e = 0.106$, $\omega = 37^\circ 5'$, $T = 0.093$.

Alle graphischen Methoden zur Ermittlung der Elemente haben das Unbefriedigende gemeinsam, daß dabei nicht die ursprünglichen Beobachtungsdaten, sondern die aus ihnen mit manchmal recht starker Willkür abgeleiteten Kurven benutzt werden. Ihr Zweck kann also nicht sein, die rechnerische Ausgleichung entbehrlich zu machen, sondern

nur, sie durch möglichst gute Annäherung vorzubereiten. So können auch im vorliegenden Fall die graphischen Methoden nur Näherungswerte liefern, die ein Urteil über die Anwendbarkeit der Wilsingschen Formel, bzw. der Gleichung (3) erlauben.

Zum Zweck der Rechnung schreibe man (3) in der Form:

$$g = \gamma + D(1 - e^2) \sin(M_1 + M') + De \sin(M_2 + 2M') \quad (4)$$

worin M' von irgend einem willkürlich angenommenen Nullpunkt an gezählt und gesetzt ist:

$$90^\circ + \omega + M = M_1 + M' \quad 90^\circ + \omega + 2M = M_2 + 2M'.$$

Oder:

$$g = \gamma + D(1 - e^2) \cos M_1 \sin M' + D(1 - e^2) \sin M_1 \cos M' + De \cos M_2 \sin 2M' + De \sin M_2 \cos 2M' \quad (5)$$

$$= \gamma + x \sin M' + y \cos M' + s \sin 2M' + t \cos 2M' \quad (6)$$

Die definitive Bestimmung der Bahnelemente erfordert also eine Ausgleichung mit mindestens fünf Unbekannten (es wird hier vorausgesetzt, daß die Umlaufszeit nicht verbessert werden soll). Die schon ziemlich beträchtliche Umständlichkeit einer solchen veranlaßte mich, den Gedanken einer Teilung in zwei Ausgleichungen, mit drei und zwei Unbe-

kannten, rechnerisch zu verfolgen. Es liegt ja nahe, Beobachtungen, die nur eine geringe Exzentrizität anzeigen, zunächst durch eine Kreisbahn auszugleichen, und erst wenn deren Reste unverhältnismäßig groß sind oder einen systematischen Verlauf zeigen, e und ω nachträglich einzuführen. Die Rechenarbeit einer Ausgleichung darf man wohl dem

Quadrat der Anzahl der Unbekannten proportional ansetzen; demnach verhält sich die Summe der beiden Teilausgleichungen zu der mit fünf Unbekannten etwa wie 13:25. Es entsteht

aber die Frage: Wie verhalten sich die beiden Lösungssysteme zueinander? Zur Beantwortung setzen wir die Normalgleichungen des vollständigen Systems an:

$$\left. \begin{aligned} \text{a)} \quad & n\gamma + x[\sin M'] + y[\cos M'] + \boxed{s[\sin 2M'] + t[\cos 2M']} = [g] \\ \text{b)} \quad & \gamma[\sin M'] + x[\sin^2 M'] + y[\sin M' \cos M'] + \boxed{s[\sin M' \sin 2M'] + t[\sin M' \cos 2M']} = [g \sin M'] \\ \text{c)} \quad & \gamma[\cos M'] + x[\sin M' \cos M'] + y[\cos^2 M'] + \boxed{s[\cos M' \sin 2M'] + t[\cos M' \cos 2M']} = [g \cos M'] \\ \text{d)} \quad & \gamma[\sin 2M'] + x[\sin M' \sin 2M'] + y[\cos M' \sin 2M'] + \boxed{s[\sin^2 2M'] + t[\sin 2M' \cos 2M']} = [g \sin 2M'] \\ \text{e)} \quad & \gamma[\cos 2M'] + x[\sin M' \cos 2M'] + y[\cos M' \cos 2M'] + \boxed{s[\sin 2M' \cos 2M'] + t[\cos^2 2M']} = [g \cos 2M'] \end{aligned} \right\} (7)$$

Die Teilung in zwei Ausgleichungen bedeutet nun nichts anderes als die Vernachlässigung der umrandeten Glieder. Die erste Ausgleichung berücksichtigt nur die drei ersten Glieder der Gleichungen a), b), c). Durch die Ausgleichung der Reste werden hingegen die letzten beiden Gleichungen vollständig erfüllt, wie man sofort sieht, wenn man z. B. d) in der Form schreibt:

$$s[\sin^2 2M'] + t[\sin 2M' \cos 2M'] = [(g - (\gamma + x \sin M' + y \cos M')) \sin 2M'] = [v_1 \sin 2M']$$

v_1 bedeutet die Reste der Kreisbahn.

Nun erinnern wir uns, daß das ganze Verfahren, d. h. die Gleichung (3), auf der Übereinkunft beruht, Größen von der Ordnung De^2 außer acht zu lassen; ferner, daß

$$\sqrt{s^2 + t^2} = De.$$

Dividiert man also z. B. a) durch n , so ist die Vernachlässigung des 4. und 5. Gliedes offenbar dann und nur dann gestattet, wenn die Koeffizienten $\frac{[\sin 2M']}{n}$ etc. von der Ordnung von e sind. Für e scheint mir 0.10 ein in der Regel völlig zulässiger Wert zu sein; daß die genannten Koeffizienten größer werden, ist unwahrscheinlich, um so mehr, je größer die Zahl der Beobachtungen ist, und je gleichmäßiger sie über einen Umlauf verstreut sind. (Im Fall idealer Verteilung, wie diese z. B. bei der oben angedeuteten Koeffizientenbestimmung der Fourierschen Reihen hergestellt wird, verschwinden die fraglichen Glieder vollständig; es bleiben nur die in der Diagonale des Systems stehenden übrig).

Das Resultat ist also: Die Teilung in zwei aufeinanderfolgende Ausgleichungen ist als erlaubt anzusehen.

Der wesentlichste Einwand, der erhoben werden könnte, scheint mir der zu sein, daß die Gewichte der Unbekannten, und damit ihre mittleren Fehler, nicht scharf bestimmt werden können; es muß vielmehr dem Takt des Rechners überlassen bleiben, sie nach dem Verlauf der beiden Algorithmen ab-

zuschätzen. Ein wesentlicher Fehler ist hierbei aber wohl kaum wahrscheinlich; die wahren Gewichte können sich, wenn die obige Annahme über das Verhältnis der Koeffizienten untereinander zutrifft, nur um wenige Hundertstel ihres Betrages von den durch die betr. Ausgleichung gelieferten unterscheiden.

Hat man die fünf Unbekannten ermittelt, so ist

$$\begin{aligned} x &= D(1 - e^2) \cos M_1 & y &= D(1 - e^2) \sin M_1 \\ s &= De \cos M_2 & t &= De \sin M_2 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} M_1 &= \frac{y}{x} & \operatorname{tg} M_2 &= \frac{t}{s} \\ D(1 - e^2) &= \sqrt{x^2 + y^2} & De &= \sqrt{s^2 + t^2}. \end{aligned}$$

Nun habe der Nullpunkt der M' die mittlere Anomalie M_0 . Es ist dann:

$$\begin{aligned} 90^\circ + \omega + M_0 &= M_1 \\ 90^\circ + \omega + 2M_0 &= M_2 \\ \hline M_0 &= M_2 - M_1 \\ 90^\circ + \omega &= 2M_1 - M_2. \end{aligned}$$

Aus M_0 ergibt sich die Perihelzeit T , welche um $\frac{M_0}{\mu}$ früher liegt als der angenommene Nullpunkt.

2. Die Lehmann-Filhéssche Formel zur Bahnverbesserung.

Die obigen Formeln sind, wie angegeben, nur bis zu Exzentrizitäten von etwa 0.1 anwendbar; darüber hinaus werden die quadratischen Glieder merklich und es wird notwendig, strenge Formeln anzuwenden. Hierzu ist bisher, soviel mir bekannt, immer noch die von Lehmann-Filhés (A. N. 3242) angegebene Gleichung benutzt worden:

$$\left. \begin{aligned} dg &= [\cos(\omega + v) + e \cos \omega] \delta D + \left(\cos \omega - \frac{\sin(\omega + v) \sin v}{1 - e^2} (2 + e \cos v) \right) D \delta e \\ &\quad - [\sin(\omega + v) + e \sin \omega] D \delta \omega - \sin(\omega + v) (1 + e \cos v)^2 (t - T) \frac{D \delta \mu}{\cos^3 \varphi} \\ &\quad + \sin(\omega + v) (1 + e \cos v)^2 \frac{D \delta M_0}{\cos^3 \varphi} \end{aligned} \right\} (8)$$

worin ich gesetzt habe: D statt K , $\cos \varphi$ statt $(1 - e^2)^{1/2}$, δM_0 statt $\mu \delta T$; letzteres in dem Sinne, daß für $t = T$ an Stelle von $M_0 = 0$ treten soll $M_0 = \delta M_0$.

Nun scheint mir zunächst, daß der Koeffizient von e für mäßige Exzentrizitäten eine passendere Form erhalten kann. Da nämlich

$$-\sin(\omega + v) \sin v = \frac{1}{2} [\cos(\omega + 2v) - \cos \omega]$$

so wird

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} \frac{\partial g}{\partial e} &= \frac{\cos(\omega + 2v)}{1 - e^2} + \frac{1/2 e}{1 - e^2} \cos v [\cos(\omega + 2v) - \cos \omega] - \frac{e^2}{1 - e^2} \cos \omega \\ &= \frac{\cos(\omega + 2v)}{1 - e^2} + \frac{1/4 e}{1 - e^2} [\cos(\omega + 3v) - \cos(-\omega + v)] - \frac{e^2}{1 - e^2} \cos \omega \end{aligned} \quad (9)$$

oder, wenn man als Unbekannte statt de einführt $\delta e = \frac{D}{1 - e^2} \cdot \delta e$,

$$\frac{\partial g}{\partial e} \delta e = (\cos(\omega + 2v) + \frac{1}{4} e [\cos(\omega + 3v) - \cos(-\omega + v)] - e^2 \cos \omega) \delta e. \quad (10)$$

In dieser Form ist sofort ersichtlich, welche Glieder eventuell vernachlässigt werden können. Das Hauptglied ist eine nach v (nicht, wie oben, nach M) fortschreitende Welle von der Periode $\frac{1}{2} U$, deren Schnittpunkte mit der Näherungskurve also nicht mehr äquidistant zu sein brauchen; doch muß ihre Zahl nach wie vor 4 sein. Das zweite, e proportionale, Glied bedeutet zwei kleine Wellen mit den Perioden $\frac{1}{3} U$ bzw. U .

Die vorstehende Form ist gegenüber der Lehmann-Filhéschen natürlich nur bei kleinen und mittleren Exzentrizitäten von Vorteil; man kann dann mit der Crelleschen Tafel rechnen, während nach Lehmann-Filhés unter allen Umständen logarithmisch gerechnet werden muß.

Eine zweite Bemerkung bezieht sich auf die Verbesserung von T und ω . Es ist m. E. durchaus irreführend, daß man diese beiden Unbekannten bisher stets voneinander zu trennen pflegte. Nur daher rühren die enormen wahrscheinlichen Fehler, die für jede einzelne dieser Unbekannten, anscheinend unabhängig voneinander, berechnet werden. Bestimmt man aber z. B. (wie ich es bei ι Pegasi zu tun genötigt war) aus T , e und ω den Moment der Nullstelle, so hängt deren w. F. in keiner Weise mit den für T und ω angegebenen Beträgen zusammen, ist vielmehr nur ein kleiner Bruchteil von ihnen.

Es ist selbstverständlich, daß bei mäßigen Exzentrizitäten die Lage des Perihels in der Bahn innerhalb eines

weiten Spielraums unsicher ist. Jede Veränderung von T involviert aber eine entsprechende von ω , wenn die Geschwindigkeitskurve nicht eine gänzlich andere Lage und Gestalt erhalten soll. Der w. F. von ω ist also nur unter gleichzeitiger Berücksichtigung desjenigen von T richtig zu verstehen; doch ergibt sich aus beiden kein Urteil über die Sicherheit der Lage des resultierenden Kurvenzuges.

Eine einfache Überlegung läßt die Unzweckmäßigkeit, δT und $\delta \omega$ als Unbekannte einzuführen, sofort erkennen. δT , oder was dasselbe sagt, δM_0 bedeutet eine Verschiebung des Nullpunkts der M ; $\delta \omega$ wirkt [cf. Formel (1)] wie eine Verschiebung des Nullpunkts der v (von der kleinen konstanten Vertikalverschiebung $e \sin \omega \delta \omega$ abgesehen); beides ist in erster Annäherung gleichbedeutend, d. h. der Effekt von $\delta \omega$ kombiniert sich in der Hauptsache mit dem von δM_0 zu einer Gesamtwirkung, die ich die »durchschnittliche« Horizontalverschiebung des Kurvenzuges nennen möchte. Es ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich δM_0 und $\delta \omega$ nur durch Glieder von der Ordnung der Exzentrizität trennen lassen; daher die großen scheinbaren wahrsch. Fehler beider, die auch dann auftreten, wenn die Gesamtlage der Kurve in t sehr scharf festgelegt ist.

Berücksichtigt man, daß

$$2 \sin(\omega + v) \cos v = \sin(\omega + 2v) + \sin \omega$$

so wird in (8)

$$\begin{aligned} & - [\sin(\omega + v) + e \sin \omega] D \delta \omega + \sin(\omega + v) (1 + e \cos v)^2 \frac{D \delta M_0}{\cos^3 \varphi} \\ &= \frac{D}{\cos^3 \varphi} [\sin(\omega + v) + e \sin \omega] [-\delta \omega \cos^3 \varphi + \delta M_0] + \frac{D e}{\cos^3 \varphi} [\sin(\omega + 2v) + e \sin(\omega + v) \cos^2 v] \delta M_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Die Kombination $-\delta \omega \cos^3 \varphi + \delta M_0$ ist nichts anderes als die oben erwähnte »durchschnittliche« Horizontalverschiebung des Kurvenzuges. Das wird auch folgendermaßen klar: Die Variation $\delta \omega$ wirkt, wie oben bemerkt, in der Abszissenrichtung wie eine konstante Vermehrung aller v , und diese wirkt wie eine Vermehrung von M_0 um den Betrag $\delta_1 M_0 = -\frac{\cos^3 \varphi}{(1 + e \cos v)^2} \delta \omega$.

Nehmen wir für $\cos v$ seinen Mittelwert 0, so ergibt sich als »durchschnittliche« Gesamtvermehrung der Abszissen $\delta M - \cos^3 \varphi \delta \omega$, wie oben. Bestimmt man also etwa, daß

bei einer Variation von T und ω die Punkte $v = \pm 90^\circ$ dieselben Abszissen und dieselben Ordinatendifferenzen gegen die Extremwerte behalten sollen, so erzeugt eine Verschiebung des Perihels nur die kleine Welle

$$\frac{D e}{\cos^3 \varphi} [\sin(\omega + 2v) + e \sin(\omega + v) \cos^2 v] \delta M_0.$$

Denn alsdann ist $\delta M_0 - \cos^3 \varphi \delta \omega = 0$ und die sekundäre Welle verschiebt die Punkte $v = \mp 90^\circ$ vertikal um denselben Betrag wie die Extreme, $v = -\omega$ und $= 180^\circ - \omega$.

Nach dem Gesagten möchte ich also die Verwendung folgender Formel befürworten:

$$\begin{aligned}
 dg = & x + [\cos(\omega + v) + e \cos \omega] y + (\cos(\omega + 2v) + \frac{1}{4}e [\cos(\omega + 3v) - \cos(-\omega + v)] - e^2 \cos \omega) z \\
 & + [\sin(\omega + v) + e \sin \omega] u + [\sin(\omega + 2v) + e \sin(\omega + v) \cos^2 v] v \\
 & - \sin(\omega + v) (1 + e \cos v)^2 (t - T') w
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{worin} \\ x = \delta\gamma \quad y = \delta D \quad z = \frac{D}{\cos^2 \varphi} \delta e \quad u = \frac{D}{\cos^3 \varphi} [-\delta\omega \cos^3 \varphi + \delta M_0] \\ v = \frac{De}{\cos^3 \varphi} \delta M_0 \quad w = \frac{D}{\cos^3 \varphi} \delta \mu \end{array} \right\} (12)$$

Wenn man will, kann man noch sämtliche konstanten Glieder der Formel zu einer Unbekannten zusammenfassen und schreiben:

$$\begin{aligned}
 dg = & x' + y \cos(\omega + v) + z (\cos(\omega + 2v) + \frac{1}{4}e [\cos(\omega + 3v) - \cos(-\omega + v)]) \\
 & + u \sin(\omega + v) + v [\sin(\omega + 2v) + e \sin(\omega + v) \cos^2 v] \\
 & - w \sin(\omega + v) (1 + e \cos v)^2 (t - T')
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{worin jetzt} \\ x' = \delta\gamma + e \cos \omega \delta D - e^2 \cos \omega \frac{D}{\cos^2 \varphi} \delta e + e \sin \omega \frac{D}{\cos^3 \varphi} [-\delta\omega \cos^3 \varphi + \delta M_0] \end{array} \right\} (13)$$

Die Ausrechnung von x' wird überflüssig, wenn man mit den übrigen verbesserten Elementen eine Ephemeride rechnet. Das neue γ ist dann nämlich einfach gleich dem Mittel aller Werte $g - D [\cos(\omega + v) + e \cos \omega]$. Infolgedessen ist Formel (13) wohl tatsächlich, nicht nur scheinbar, einfacher als (12).

3. Sekundäre Wellen, insbesondere bei Y Ophiuchi.

Die vorigen Formeln zeigen, daß die Fehler der genäherten Elemente sich in den Abweichungen der tatsächlichen Geschwindigkeitskurve gegen die der Näherung durch mehrere Wellen aussprechen, von denen die wesentlichsten die Periode U und $\frac{1}{2}U$ haben. Betrachten wir an der Hand dessen die bisher empirisch gefundenen sekundären Wellen, so ergibt sich sofort, daß die von Y Ophiuchi (Lick Obs. Bull. Nr. 118), sofern sie überhaupt nachweisbar ist, durch eine Variation von e restlos beseitigt werden kann. Hierauf werde ich weiter unten ausführlich zurückkommen. Nicht so einfach liegt die Sache bei W Sagittarii; hier genügt in der Tat die bloße Variation von e nicht. Es ist aber meine Überzeugung, daß die gleichzeitige Veränderung von e , ω , T und D die sekundäre Welle mindestens bis auf einen kleinen im Bereich des Zufalls liegenden Rest beseitigt wird. Als einziger Fall, in dem eine sekundäre Welle verbürgt zu sein scheint, bleibt demnach ζ Geminorum (Astroph. Journ. 13 S. 92) übrig; hier fand Campbell eine Welle von der Periode $\frac{1}{3}U$. Zu ihrer Erklärung könnte man an das oben angegebene zweite Glied des Koeffizienten von δe , nämlich $\frac{1}{4}e \cos(\omega + 3v)$ denken,

doch ist dies wohl zu klein und kann überdies nicht ohne eine wesentlich größere Welle von $\frac{1}{2}U$ auftreten. Trotzdem wird ein gewisses Mißtrauen in die Realität der $\frac{1}{3}U$ -Welle solange berechtigt sein, als die besten Werte der Elemente nicht durch eine korrekte Ausgleichung ermittelt sind. Denn die Möglichkeit ist nicht ohne weiteres von der Hand zu weisen, daß die Summation der verschiedenen, durch die Fehler der vorläufigen Elemente bedingten Wellen zufällig das Bild einer Kurve von $\frac{1}{3}U$ ergeben haben könnte.

Im Fall von Y Ophiuchi hatte S. Albrecht nach einigen Versuchen eine Kurve mit der Exzentrizität $e = 0.10$ durch die Beobachtungen gelegt, dann aber eine sekundäre Welle von $\frac{1}{2}U$ zu erkennen geglaubt, deren Hinzufügung zu der ersten Näherungskurve diese offenbar einer einfachen Sinuslinie noch mehr nähert. Jedenfalls hatte sich gezeigt, daß Exzentrizität und Amplitude klein genug sind, um die Anwendung der Wilsingschen Formel, bezw. der Gleichung (3) zu gestatten. Demnach glich ich die sämtlichen Beobachtungen zunächst unter Annahme einer Kreisbahn aus, indem ich als Nullpunkt für M' die Epoche: Licht-Maximum $+5^d$ wählte, und erhielt die Gleichung (Einheit = 1 km)

$$\begin{aligned}
 g = & -5.08 + 7.49 \sin M' - 1.65 \cos M' = -5.08 + 7.665 \sin(M' - 12^\circ 25') \\
 \text{wahrsch. Fehler} & \pm 0.23 \pm 0.32 \quad \pm 0.32 \quad \pm 0.23 \pm 0.32
 \end{aligned}$$

Die damit berechneten Werte sind in der folgenden Tabelle unter g_1 aufgeführt; ihre Reste sind v_I . Indem ich diese als Ordinaten zur Abszisse $t = \text{Intervall nach dem Lichtmaximum auftrag}$, ergab sich in der Tat eine Welle von der Periode $\frac{1}{2}U$, wenn auch nur unsicher angedeutet. Ich sah mich daher veranlaßt, die Reste v_I noch einmal mit zwei Unbekannten auszugleichen, und erhielt:

$$\begin{aligned}
 v_I = & +0.935 \sin 2M' + 0.453 \cos 2M' = +1.039 \sin(2M' + 25^\circ 51') \\
 \text{wahrsch. Fehler} & \pm 0.34 \quad \pm 0.28 \quad \pm 0.33 \quad \pm 16^\circ 3'
 \end{aligned}$$

Daraus folgte: $e = 0.136 \pm 0.029$ und $D = D(1 - e^2) + De^2 = 7.665 \text{ km} \times 1.0185 = 7.81 \text{ km}$.

Ferner:

$$\begin{aligned}
 M_2 = & 90^\circ + \omega + 2M_0 = +25^\circ 51' \\
 M_1 = & 90^\circ + \omega + M_0 = -12^\circ 25' \\
 M_0 = & +38^\circ 16'
 \end{aligned}$$

also

$$T = 5^d - \frac{38^{\circ}27'}{21^{\circ}03'} = 3^d15 \text{ nach dem Licht-Maximum}$$

$$90^{\circ} + \omega = 2M_1 - M_2 = -50^{\circ}41'$$

$$\omega = -140^{\circ}41' \text{ oder } = +219^{\circ}19'.$$

Im folgenden sind die Elemente der Näherungskurve von Albrecht (A_1) mit den soeben angegebenen (Z) zusammengestellt.

	A_1	Z
T	2^d6	3^d15 nach dem Licht-Max.
ω	$209^{\circ}2$	$219^{\circ}19'$
D	8.5 km	7.81 km
e	0.10	0.136
γ	-5.0	-5.08

also eine auffallende Übereinstimmung, die beweist, daß die von Albrecht vermutete Welle von $\frac{1}{2}U$ tatsächlich bereits bei der Näherungskurve nicht vorhanden war. Denn die Elemente Z dürfen eine solche unter keinen Umständen mehr aufweisen; dasselbe muß also von den Elementen A_1 gelten.

Ich lasse nun die Zusammenstellung der Beobachtungen und der Ausgleichungsergebnisse folgen.

Nr. n. Al- brecht	M'	g Beob.	1. Ausgleichung		2. Ausgleichung		Nr. n. Al- brecht	M'	g Beob.	1. Ausgleichung		2. Ausgleichung	
			g_1 Rechn.	$g - g_1$ $= v_1$	v_r Rechn.	$v_1 - v_r$ $= v_2$				g_1 Rechn.	$g - g_1$ $= v_1$	v_r Rechn.	$v_1 - v_r$ $= v_2$
ID	$+177^{\circ}26'$	-3.0	-3.10	$+0.10$	$+0.37$	-0.27	34 A	$-9^{\circ}45'$	-7.2	-7.97	$+0.77$	$+0.12$	$+0.65$
10 E	$+0^{\circ}28'$	-9.2	-6.67	-2.53	$+0.47$	-3.00	36 A	$+10^{\circ}13'$	-5.0	-5.37	$+0.37$	$+0.75$	-0.38
12 A	$+37^{\circ}50'$	-2.8	-1.79	-1.01	$+1.02$	-2.03	37 A	$+30^{\circ}52'$	-1.4	-2.66	$+1.26$	$+1.04$	$+0.22$
14 A	$+59^{\circ}8'$	-1.4	$+0.50$	-1.90	$+0.61$	-2.51	38 A	$+52^{\circ}11'$	$+2.7$	-0.18	$+2.88$	$+0.79$	$+2.09$
15 B	$+79^{\circ}44'$	$+0.4$	$+1.99$	-1.59	-0.10	-1.49	39 A	$+73^{\circ}26'$	$+4.9$	$+1.62$	$+3.28$	$+0.13$	$+3.15$
16 A	$+142^{\circ}16'$	-1.6	$+0.80$	-2.40	-0.79	-1.61	40 A	$+94^{\circ}5'$	$+4.3$	$+2.50$	$+1.80$	-0.58	$+2.38$
17 A	$+162^{\circ}54'$	-0.9	-1.28	$+0.38$	-0.15	$+0.53$	41 A	$+179^{\circ}59'$	-0.9	-3.43	$+2.53$	$+0.45$	$+2.08$
18 A	$+184^{\circ}0'$	-0.9	-3.96	$+3.06$	$+0.58$	$+2.48$	42 A	$+199^{\circ}3'$	-3.8	-5.96	$+2.16$	$+0.93$	$+1.23$
19 A	$+205^{\circ}12'$	-6.7	-6.78	$+0.08$	$+1.01$	-0.93	43 A	$-97^{\circ}55'$	-13.4	-12.27	-1.13	-0.18	-0.95
20 A	$-91^{\circ}50'$	-10.1	-12.51	$+2.41$	-0.39	$+2.80$	44 A	$-76^{\circ}8'$	-13.3	-12.74	-0.56	-0.84	$+0.28$
21 A	$-70^{\circ}30'$	-12.2	-12.69	$+0.49$	-0.94	$+1.43$	45 A	$-56^{\circ}5'$	-15.4	-12.21	-3.19	-1.04	-2.15
22 A	$-29^{\circ}14'$	-7.1	-10.17	$+3.07$	-0.56	$+3.63$	47 A	$-35^{\circ}6'$	-9.5	-10.73	$+1.23$	-0.73	$+1.96$
23 A	$-7^{\circ}58'$	-5.2	-7.75	$+2.55$	$+0.18$	$+2.37$	49 A	$-13^{\circ}12'$	-6.0	-8.39	$+2.39$	-0.01	$+2.40$
24 A	$+13^{\circ}24'$	-4.2	-4.95	$+0.75$	$+0.83$	-0.08	50 A	$+8^{\circ}1'$	-6.4	-5.67	-0.73	$+0.69$	-1.42
25 A	$+95^{\circ}50'$	$+3.0$	$+2.54$	$+0.46$	-0.63	$+1.09$	51 A	$+91^{\circ}38'$	$+4.1$	$+2.45$	$+1.65$	-0.51	$+2.16$
26 A	$+117^{\circ}58'$	$+0.8$	$+2.31$	-1.51	-1.03	-0.48	53 A	$-38^{\circ}1'$	-13.0	-10.99	-2.01	-0.80	-1.21
27 A	$+138^{\circ}59'$	-2.0	$+1.08$	-3.08	-0.86	-2.22	54 A	$+45^{\circ}55'$	-2.8	-0.85	-1.95	$+0.92$	-2.87
28 A	$+160^{\circ}10'$	-0.7	-0.99	$+0.29$	-0.25	$+0.54$	59 A	$+172^{\circ}6'$	-5.4	-2.42	-2.98	$+0.18$	-3.16
29 A	$+222^{\circ}49'$	-6.6	-8.96	$+2.36$	$+0.97$	$+1.39$	63 A	$+213^{\circ}48'$	-7.9	-7.87	-0.03	$+1.04$	-1.07
30 A	$+243^{\circ}40'$	-10.4	-11.06	$+0.66$	$+0.47$	$+0.19$	112 B	$+103^{\circ}35'$	-0.5	$+2.58$	-3.08	-0.83	-2.25
31 A	$-95^{\circ}4'$	-11.3	-12.39	$+1.09$	-0.28	$+1.37$	121 A	$-67^{\circ}21'$	-18.0	-12.62	-5.38	-0.98	-4.40
32 A	$-74^{\circ}7'$	-16.9	-12.73	-4.17	-0.88	-3.29	(44)				$+39.39$		$+38.35$
33 A	$-30^{\circ}45'$	-9.0	-10.32	$+1.32$	-0.61	$+1.93$					-39.23		-37.77

Es läßt sich mit Bestimmtheit sagen, daß in den Resten v_2 keine Welle von der Periode $\frac{1}{3}U$ vorhanden ist; doch scheint eine solche von $\frac{1}{4}U$ angedeutet zu sein.

Um deren Realität zu prüfen, gleich ich die Reste v_2 nach der Formel aus:

$$v_2 = u \sin 4M' + w \cos 4M'$$

und erhielt:

$$v_2 = -0.870 \sin 4M' + 0.537 \cos 4M' = 1.022 \sin (4M' + 148^{\circ}20')$$

wahrsch. Fehler ± 0.32 ± 0.28 ± 0.30 .

Die Gewichte von u und w lassen sich nun, nach drei aufeinanderfolgenden Ausgleichungen, allerdings schwer abschätzen. Die letzte Ausgleichung ergab für u : 19.85, für w : 24.05. Ich glaube nicht wesentlich fehlzugehen, wenn ich für u : 19.5, für w : 23.5 annehme. Das ergibt die oben hinzugeschriebenen wahrsch. Fehler.

Im ganzen ergibt sich also die Gleichung:

$$g = -5.08 + 7.665 \sin (M' - 12^{\circ}25') + 1.039 \sin (2M' + 25^{\circ}51') + 1.022 \sin (4M' + 148^{\circ}20')$$

w. F. $< \pm 0.23 \pm 0.32$ ± 0.33 ± 0.30

(M' gezählt von dem Moment: 5^d nach dem Lichtmaximum).

Ferner ist

	1. Ausgl.	2. Ausgl.	3. Ausgl.
[$\nu\nu$]	202.8	178.8	153.9
(Anzahl der Unbekannten)	(3)	(5)	(7)
Mittl. Fehler einer Platte	± 2.22	± 2.14	± 2.04

Die Einführung der zweiten und dritten Welle verringert den mittleren Fehler der Gewichtseinheit also verhältnismäßig wenig. Ihre Amplituden übersteigen das dreifache ihres wahrscheinlichen Fehlers kaum; man hat also die Realität beider Wellen nicht als vollständig verbürgt, sondern höchstens als wahrscheinlich anzusehen. Es ist aber festzustellen, daß die dritte Welle ($\frac{1}{4}U$) nicht geringer, und nicht schlechter verbürgt ist, als die zweite, durch die Exzentrizität erklärbare.

Ordnet man die letzten Reste ν_3 nach M und faßt sie

zu je dreien zum Mittel zusammen, so zeigen sich immer noch eigentümliche, aber unregelmäßige Gänge, die eben wegen ihrer Unsymmetrie auch durch weitere Ausgleichungen nicht getroffen werden können. Inwieweit sie als reell anzusehen sind, möchte ich unentschieden lassen.

Durch die vorstehende Untersuchung gewann ich den Eindruck, daß man in der Feststellung sekundärer Wellen erheblichen Täuschungen ausgesetzt und geneigt ist, die Sicherheit, mit der sie verbürgt sind, bedeutend zu überschätzen. Man wird daher gut tun, in allen Fällen zunächst das Resultat einer regelrechten Ausgleichung abzuwarten. Die Beobachtungen haben demnach m. E. noch keine hinreichend sicheren Anhaltspunkte gegeben, um daran weitgehende Untersuchungen über den Einfluß eines dritten Körpers, Gezeitenwirkung und dergl. anknüpfen zu können.*)

4. 13 Bonner Beobachtungen des spektroskopischen Doppelsterns ι Pegasi.

Im folgenden sind die Resultate von 13 mit dem Bonner Spektrographen gewonnenen Aufnahmen des Doppelsterns ι Pegasi ($\alpha = 22^h 2^m$, $\delta = +24^\circ 51'$; Nr. 132 des Katalogs im Lick Obs. Bull. 79) mitgeteilt. Die Bahn ist von Heber D. Curtis im Lick Obs. Bull. 53 auf Grund von 43 Aufnahmen aus den Jahren 1897–1903 eingehend bearbeitet, und ich bemerke vorweg, daß sich seine Elemente vollkommen bestätigt haben. — Da eine Kontrolle der geringen Exzentrizität, die schon bei Curtis das doppelte ihres w. Fehlers nicht erreicht (0.0080 ± 0.0043) von vornherein aussichts-

los erschien, nahm ich eine Kreisbahn an, rechnete also mit der Formel:

$$g = \gamma + D \sin(M_0 + M') = \gamma + x \sin M' + y \cos M'$$

worin $x = D \cos M_0$, $y = D \sin M_0$.

Nachdem alle Beobachtungen mit Hilfe des Curtisschen Wertes $U = 10^4 21312$ in den einen, zwischen 1907 Sept. 19 und Sept. 29 liegenden Umlauf hineinverlegt waren, wählte ich für M' den Nullpunkt Sept. 20.470, und erhielt folgende Daten:

Platte	Datum der Beobachtungen (M. Z. Greenwich)	reduziertes Datum	M'	Gleichungen			$g_{\text{Beob.}}$	$g_{\text{Rechn.}}$	B — R
				$\sin M'$	$\cos M'$				
518	1905 Dez. 6.226 + 64U =	1907 Sept. 20.866	+ 13°95	+0.241	+0.970	$x + y + \gamma =$	-17.75	-16.72	-1.03
734	1906 Aug. 8.481 40 =	» 21.006	+ 18.89	+0.324	+0.946	=	-20.54	-20.69	+0.15
762	Sept. 8.460 37 =	» 21.345	+ 30.84	+0.512	+0.859	=	-29.17	-29.73	+0.56
768	» 24.430 36 =	» 27.102	+233.77	-0.806	-0.591	=	+36.52	+36.01	+0.51
979	1907 Sept. 7.496 2 =	» 27.922	+262.68	-0.992	-0.128	=	+45.92	+44.40	+1.52
986	» 19.437		- 36.41	-0.593	+0.805	=	+23.81	+23.92	-0.11
987	» 20.444		- 0.92	-0.016	+1.000	=	- 3.25	- 4.30	+1.05
988	» 22.422		+ 68.81	+0.932	+0.362	=	-50.32	-49.43	-0.89
990	» 23.410		+103.63	+0.972	-0.235	=	-49.39	-50.59	+1.20
994	» 24.405		+138.70	+0.660	-0.751	=	-35.36	-34.83	-0.53
996	» 25.433		+174.94	+0.088	-0.996	=	- 7.43	- 6.82	-0.61
998	» 26.419		+209.70	-0.496	-0.868	=	+21.50	+21.29	+0.21
1001	» 28.412		+279.95	-0.985	+0.172	=	+41.69	+43.68	-1.99

Die Ausgleichung ergab:

$$\gamma = -3.81 \text{ km} \quad D \cos M_0 = -48.44 \text{ km} \quad D \sin M_0 = -1.27 \text{ km}$$

also die Formel:

$$g_{\text{Rechn.}} = -3.81 - 48.46 \sin(M' + 1^\circ 50')$$

oder, da $1^\circ 50'$ äquivalent ist mit 0.042 Tagen:

$$g_{\text{Rechn.}} = -3.81 - 48.46 \sin \left(\frac{t - 1907 \text{ Sept. } 20.428}{10.21312} \cdot 360^\circ \right).$$

Hiermit sind die beiden letzten Kolonnen der Tabelle berechnet.

*) Auch das »Geheimnis« von η Virginis (Astroph. Journ. 26, S. 282) würde sich einfach lösen, wenn es erlaubt wäre, bei der zweiten Komponente die Platten B 493 und B 580 auszuschließen. Dann lassen die Elemente S. 287 unter Hinzunahme von $\gamma = 0.0 \text{ km}$ (für beide Komponenten!) und $m_1 : m_2 = 7 : 5$ nur noch in zwei Fällen Fehler von mehr als 10 km übrig, nämlich bei g_2 von Platte 717 (B — R = -19.7) und B 539 (+19.0), gerade zwei, auf verhältnismäßig wenigen Linien beruhenden Werten. Unter Voraussetzung der angegebenen Elemente fällt Platte 493 genau, und Platte 580 nahezu in den Moment der Koinzidenz, in dem Täuschungen erfahrungsgemäß besonders leicht möglich sind.

Als wahrsch. Fehler einer Platte folgt daraus ± 0.74 km (Lick: ± 0.56), ferner als w. F. von γ : ± 0.21 km, von D : ± 0.31 km (Lick: ± 0.11 bzw. ± 0.15). Da ferner die Reste keine Spur einer Welle erkennen lassen, reichen die drei Unbekannten, d. h. die Kreisbahn, zur Darstellung der hier vorgelegten Beobachtungen vollkommen aus.

Um durch Vergleichung mit den Curtisschen Elementen die Umlaufzeit kontrollieren zu können, mußte aus letzteren zunächst die absteigende Nullstelle t_0 (obere Konjunktion) berechnet werden. Es zeigte sich, daß hierbei der Einfluß der Exzentrizität nicht in Betracht kommt, wozu der Umstand beiträgt, daß ω nicht sehr weit von 270° entfernt ist. —

Für die Kreisbahn würde gelten: $t_0 - T = \frac{90^\circ - \omega}{\mu}$ bzw. $\frac{45^\circ - \omega}{\mu}$, also $t_0 = T + 5^d 623$. Für die Ellipse hat man

hingegen die Bedingungs-gleichung: $\operatorname{tg} E_0 = \operatorname{ctg} \omega \cos \varphi$ (vgl. A. N. 4191, S. 254), und $M_0 = E_0 - e \sin E_0$. Das liefert $t_0 = T + 5^d 627 = 1899$ Juni 20.593, und unter Hinzufügung von 295 Umläufen: 1907 Sept. 20.463. Die Unsicherheit dieses Wertes ist nach dem früher Gesagten (S. 327) aus den wahrsch. Fehlern der Elemente in keiner Weise zu ermitteln.

Nach Curtis hätte sich also die Formel ergeben:

Bonn, 1908 Februar 17.

(Nachtrag).

Die Verwendung des „Hodographen“ bei der Bahnbestimmung.

In den kürzlich erschienenen Arbeiten von K. Laves (Astroph. Journ. 26, S. 164) und W. F. King (27, S. 125) ist als Hilfsmittel zur Darstellung der Bahn deren Hodograph eingeführt worden (übrigens in verschiedener Form). So sehr ich diesen Gedanken für wertvoll und fruchtbar halte, so scheint mir doch in der Arbeit von Laves, wenigstens bezüglich der Ermittlung der Elemente, kein Fortschritt erreicht zu sein. Es kommt jetzt eben alles darauf an, die Lage des Hodographenkreises zur Apsiden- und Knotenlinie scharf zu bestimmen; dazu scheint mir das Verfahren von Laves nicht empfehlenswert. Es läuft einfach auf eine geometrische Konstruktion der bekannten und bereits von Schwarzschild angegebenen Formeln hinaus:

$$\cos \omega = \frac{\zeta_{\text{Per.}}}{D} \quad e = \frac{1/2 (z_{\text{max.}} + z_{\text{min.}})}{D \cos \omega}$$

[vgl. A. N. 4191, Gleichung (7) und (15)]; und zwar ist die Berechnung von ω bei Laves genau dieselbe wie bei Schwarz-

Bonn, 1908 April 23.

$$g = -4.12 - 47.99 \sin \left(\frac{t - 1907 \text{ Sept. } 20.463}{10.21312} \cdot 360^\circ \right) \\ \text{w. F. } \pm 0.11 \pm 0.15$$

also eine hinreichende Übereinstimmung mit der obigen Gleichung.

Die Epochen t_0 unterscheiden sich um $0^d 035$, was eine Verkürzung der Umlaufzeit um 1.2 Zehntausendstel des Tages bedeuten würde. Diese ist natürlich ganz illusorisch; höchstens aus Gründen der Bequemlichkeit wird man vielleicht dem Wert $U = 10^d 21300$ den Vorzug geben.

Trotz eifrigen Suchens ergab sich auch aus den Bonner Platten keine Spur der zweiten Komponente; nur bei einzelnen Platten glaubte ich eine schwache Veränderung im Gesamtcharakter des Spektrums wahrzunehmen, und zwar in dem Sinne, daß die Linien ohne erkennbaren Grund matt, grau und verwaschen wurden. Gleichwohl möchte ich das Vorhandensein eines hellen Begleiters nicht behaupten. — Das Spektrum ist im übrigen vom Mauryschen Typus XII und erforderte mit dem 30 cm-Objektiv des Bonner Refraktors und einer Spaltweite von 0.025 mm durchschnittlich 90–100^m Exposition; Anzahl und Qualität der meßbaren Linien (im Mittel sind 16 auf einer Platte gemessen) erreicht nicht ganz den Durchschnitt.

schild, die zeichnerische Ermittlung von e enthält dagegen noch einige Fehlerquellen mehr als das gewöhnliche Verfahren. Daß Laves in den angeführten Beispielen eine befriedigende Genauigkeit erzielt hat, ist deswegen nicht beweiskräftig, weil ω beidemale einen günstigen Wert hat. In der Nähe von $\omega = 0^\circ$ wird ω , bei $\omega = 90^\circ$ wird e unsicher, letzteres in der Zeichnung noch mehr als in der Rechnung.

Im übrigen bin ich nach wie vor der Meinung, daß die Anwendung eines einzigen Verfahrens überhaupt unzureichend ist; erst die Häufung verschiedener möglichst unabhängiger Bestimmungen der vorläufigen Elemente kann eine Sicherung gegen zufällige Täuschungen bringen. Infolgedessen ist die Arbeit von King sehr zu begrüßen, die eine von allen bisherigen unabhängige, den ganzen Kurvenzug benutzende Bestimmung der Periastronzeit darbietet. Ob die Vorteile seiner Methode zur Bestimmung von e die Mühe der weitläufigen Vorbereitungen aufwiegen, möchte ich dahingestellt sein lassen.

W. Zuhellen.

Anzeige betr. Nr. 14 der Ergänzungshefte zu den Astr. Nachrichten.

Nr. 14 der als Ergänzungshefte zu den Astronomischen Nachrichten herausgegebenen Astronomischen Abhandlungen, enthaltend *H. Boegehold*, Bestimmung der Bahn des Kometen 1825 I, und *C. E. Furness* und *E. P. Waterman*, Definitive Orbit of Comet 1886 III, ist erschienen und kann zum Preise von 2,50 M. direkt von der Expedition in Kiel, Moltkestr. 80 oder durch die Buchhandlung W. Mauke Söhne in Hamburg bezogen werden.

Inhalt zu Nr. 4244. *W. Zuhellen*. Weitere Bemerkungen zur Bahnbestimmung spektroskopischer Doppelsterne, nebst Beobachtungen von ι Pegasi. 321. — Anzeige betr. Nr. 14 der Ergänzungshefte zu den Astr. Nachrichten. 335.

Geschlossen 1908 April 27. Herausgeber: H. Kobold. Druck von C. Schaidt. Expedition: Kiel, Moltkestr. 80.