Über die diophantische Gleichung $x^3y + y^3z + z^3x = 0$.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In der Theorie der Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen spielt bekanntlich die Kurve vierter Ordnung

(1) $$x^3y + y^3z + z^3x = 0,$$

welche 168 Kollineationen in sich besitzt, eine hervorragende Rolle.*)

Liegen auf dieser Kurve Punkte, deren Koordinaten ganzen rationalen Zahlen proportional sind? Man sieht sofort, daß jedenfalls drei derartige Punkte, nämlich:

$$x : y : z = 1 : 0 : 0, \quad \text{resp. } 0 : 1 : 0, \quad \text{resp. } 0 : 0 : 1,$$

welche die Ecken des Koordinatendreiecks bilden, vorhanden sind. Ich will nun zeigen, daß es keine weiteren solche Punkte gibt, daß also folgender Satz gilt:

„*Die Gleichung* (1) *besitzt keine Auflösung in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen* x, y, z."

Man nehme an, es seien x, y, z drei von Null verschiedene ganze Zahlen, welche der Gleichung (1) genügen. Dann darf man diese Zahlen ohne einen allen dreien gemeinsamen Teiler (außer 1) voraussetzen, da man einen solchen Teiler unterdrücken könnte, ohne daß die Zahlen aufhören würden, der Gleichung (1) zu genügen. Die positiv genommenen größten gemeinsamen Teiler der Zahlen x, y, z, diese zu je zweien genommen, seien nun

(2) $$(y, z) = u, \quad (z, x) = v, \quad (x, y) = w.$$

Da v und w relative Primzahlen sind (denn ein gemeinsamer Teiler von v und w würde in x, y, z aufgehen) und x sowohl durch v wie durch w teilbar ist, so ist x auch durch vw teilbar. Analoges gilt für y und z, so daß man

(3) $$x = vwx', \quad y = wuy', \quad z = uvz'$$

*) F. Klein, Über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, diese Annalen, Bd. 14, S 428.

setzen kann.*) Trägt man diese Ausdrücke von x, y, z in (1) ein, so kommt nach Division mit uvw:

$$v^2 w^3 x'^3 y' + w^2 u^3 y'^3 z' + u^2 v^3 z'^3 x' = 0. \tag{4}$$

Dieser Gleichung zufolge ist $v^2 w^3 x'^3 y'$ durch u^2 teilbar. Da aber u zu den drei Zahlen v, w, x' teilerfremd ist, so muß y' durch u^2 teilbar sein. Andererseits ist nach Gleichung (4) auch $u^2 v^3 z'^3 x'$ durch y' teilbar, und da y' zu den drei Zahlen v, z', x' teilerfremd ist, notwendig u^2 durch y' teilbar. Jede der beiden Zahlen u^2 und y' ist also durch die andere teilbar und folglich

$$y' = \pm u^2.$$

Ebenso ergibt sich:

$$z' = \pm v^2, \qquad x' = \pm w^2.$$

Die vorstehenden Werte von x', y', z' setze man in die Gleichung (4) ein und dividiere die entstehende Gleichung durch $u^2 v^2 w^2$. Dadurch kommt:

$$\pm u^7 \pm v^7 \pm w^7 = 0. \tag{5}$$

Wenn also die Gleichung (1) eine Auflösung in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen besitzen würde, so hätte auch die Fermatsche Gleichung (5) eine solche Auflösung. Da die letztere Gleichung aber unlösbar ist, so ist es also auch die erstere, w. z. b. w.

Die vorstehende Betrachtung läßt sich wörtlich auf die allgemeinere diophantische Gleichung

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0 \tag{6}$$

übertragen, in welcher m, n zwei positive ganze Zahlen bezeichnen, die nicht beide gerade sind. Ohne die Allgemeinheit einzuschränken, darf man

$$m \geqq n$$

und überdies m und n teilerfremd voraussetzen.

Behält man die durch die Gleichungen (2) und (3) eingeführten Bezeichnungen bei, so ergibt sich zunächst

$$v^{m-n} w^m x'^m y'^n + w^{m-n} u^m y'^m z'^n + u^{m-n} v^m z'^m x'^n = 0, \tag{7}$$

und hieraus folgert man

$$x'^n = \pm w^{m-n}, \quad y'^n = \pm u^{m-n}, \quad z'^n = \pm v^{m-n}.$$

Aus den letzteren Gleichungen schließt man weiter (da die Exponenten n und $m-n$ teilerfremd sind)

$$\begin{cases} x' = \pm w_1^{m-n}, & y' = \pm u_1^{m-n}, & z' = \pm v_1^{m-n}, \\ w = w_1^n, & u = u_1^n, & v = v_1^n. \end{cases}$$

*) Vgl. R. Dedekind (Braunschweiger Festschrift 1897) und P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Leipzig 1902, S. 37.

Nunmehr geht die Gleichung (7) über in

$$(8) \qquad (\pm u_1)^{m^2-mn+n^2} + (\pm v_1)^{m^2-mn+n^2} + (\pm w_1)^{m^2-mn+n^2} = 0.$$

Aus einer Lösung der Gleichung (6) folgt daher eine Lösung der Gleichung (8).

Aber auch umgekehrt: Befriedigen $\pm u_1$, $\pm v_1$, $\pm w_1$ die Gleichung (8), so werden

$$x = \pm v_1^n w_1^m, \quad y = \pm w_1^n u_1^m, \quad z = \pm u_1^n v_1^m$$

die Gleichung (6) befriedigen.

Es gilt daher der Satz (in dessen Ausspruch die soeben mit $\pm u_1$, $\pm v_1$, $\pm w_1$ bezeichneten Zahlen durch u, v, w bez. ersetzt sind):

Die diophantischen Gleichungen

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$$

und

$$u^{m^2-mn+n^2} + v^{m^2-mn+n^2} + w^{m^2-mn+n^2} = 0$$

sind entweder beide in ganzen, nicht verschwindenden Zahlen lösbar oder beide nicht lösbar.

Setzt man also den „großen“ Fermatschen Satz für den Exponenten $m^2 - mn + n^2$ als bewiesen voraus, so folgt daraus die Unlösbarkeit der Gleichung (6).

Insbesondere würde die allgemeine Gültigkeit des Fermatschen Satzes die Folgerung gestatten, daß die Gleichung (6) nur in dem trivialen Fall $m = n = 1$ Lösungen in ganzen, von Null verschiedenen Zahlen x, y, z zuläßt.

Zürich, 20. November 1907.