Sur les Opérations dans la théorie des formes algébriques.

Par

Mr. Alfredo Capelli à Naples.

Les choses que je vais exposer dans ce mémoire ne sont pas seulement un résumé systématique de partie des résultats plus importants auxquels je suis parvenu dans mes travaux sur la théorie générale des formes algébriques. On y trouvera quelqu' autre résultat et beaucoup de démonstrations nouvelles dont le but principal est de ramener, autant que possible, le mécanisme de la technique opérative des formes invariantives à ses éléments plus simples, c'est-à-dire aux opérations de polaire, les seules dont l'usage est essentiel dans ce qui va suivre.

On y trouvera aussi une démonstration simple et absolument rigoureuse de la possibilité de developper une fonction de n séries de variables suivant les puissances entières du déterminant des variables et les polaires de covariants qui contiennent seulement $n-1$ séries.*)

§ I.

Théorèmes fondamentaux sur les relations entre les opérations.

1. Dans ce qui va suivre nous désignerons ordinairement par une seule lettre, p. ex. x, l'ensemble de plusieurs variables indépendantes $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_\nu$, et nous dirons alors que x représente une série de variables de l'espèce ν, ou bien, tout court, que x est une variable de l'espèce ν.

*) J'ai cru d'autant plus utile de donner ici cette démonstration que j'ignore qu'on n'ait donné jusqu'à présent aucune autre démonstration de ce théorème depuis mon mémoire: „*Fondamenti di una teoria generale delle forme algebriche* (Memorie della R°. Acc. dei Lincei 1882)" où j'ai établi ce théorème par un procédé qui était peut être un peu pénible et qui se trouve considérablement simplifié dans la démonstration que je vais en donner ici.

Nous considérerons toujours plusieurs séries de variables de même espèce:

$$x \equiv x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\nu,$$
$$y \equiv y_0,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_\nu,$$
$$z \equiv z_0,\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_\nu$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et nous nous occuperons d'abord avec l'étude des opérations de la forme

$$D_{xy} \equiv y_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + y_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + y_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$
$$D_{yx} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + x_\nu \frac{\partial}{\partial y_\nu},$$
$$D_{xx} \equiv x_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + x_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

que nous appellerons opérations *élémentaires*. Nous dirons parfois qu'une opération élémentaire D_{pq} est *propre* ou *impropre* suivant que ses indices représentent deux séries différentes de variables ou la même série; car on sait, par le théorème d'Euler, qu'en effectuant une opération D_{pp} sur une fonction homogène f, de degré k, des variables $p_0, p_1, \ldots, p_\nu$, on obtient simplement

$$D_{pp} \cdot f = p_0 \frac{\partial f}{\partial p_0} + p_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + p_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu} = k \cdot f.$$

Mais, si l'on effectue une opération propre D_{pq} sur une fonction $f(p, q)$ entière, homogène et resp. des degrés k et h par rapport à chaque série, le résultat

$$D_{pq} \cdot f = q_0 \frac{\partial f}{\partial p_0} + q_1 \frac{\partial f}{\partial p_1} + \cdots + q_\nu \frac{\partial f}{\partial p_\nu}$$

sera évidemment une fonction entière et homogène de chaque série p et q, des degrés respectifs $k - 1$ et $h + 1$.

L'opération résultante de plusieurs opérations Δ', Δ'', Δ''', ... effectuées successivement sur une même fonction sera représentée par le produit

$$\ldots\ \Delta''' \cdot \Delta'' \cdot \Delta'$$

où les facteurs opératifs se trouvent rangés, en allant de droite à gauche, dans l'ordre suivant lequel ils doivent s'effectuer.

2. Dans le cours de ce mémoire nous ne considérerons ordinairement d'autres opérations que celles qui s'expriment par un *aggregat* rationnel et entier, à coefficients constants, des opérations élémentaires définies ci-dessus. Si l'on désigne donc par

$$D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N$$

les $N = n^2$ opérations élémentaires

$$
(1) \qquad \begin{array}{l}
D_{xx},\ D_{xy},\ D_{xz},\ \ldots,\ D_{xv},\\
D_{yx},\ D_{yy},\ D_{yz},\ \ldots,\ D_{yv},\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
D_{vx},\ D_{vy},\ D_{vz},\ \ldots,\ D_{vv},
\end{array}
$$

qu'on peut former avec n séries de variables $x, y, z, \ldots, v$, l'expression plus générale d'une opération sera donnée par

$$F(D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N).$$

F étant un symbole de fonction rationnelle entière. Cependant il est important de remarquer qu'elle ne sera pas seulement caractérisée par la *forme algébrique* de la fonction F, mais aussi par sa forme *actuelle*, c'est-à-dire par l'ordre suivant lequel se trouvent rangés dans chaque terme de F les facteurs opératifs $D_1, D_2, D_3, \ldots,$ qui ne sont pas en général *permutables* entre eux.

3. Relativement à une opération donnée

$$\Delta = F(D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_N)$$

on aura à distinguer des espèces différentes de degrés, c'est-à-dire:

a) le plus grand nombre de facteurs $D_1, D_2, \ldots$ égals ou distincts dont se composent les termes de F, ce que nous appellerons le *degré total* ou simplement *le degré* de Δ.

b) le plus grand nombre de fois que dans un même terme de F se présente, *comme premier indice*, une certaine variable x, ce que nous appellerons le *degré de dérivation en x.*

c) le plus grand nombre de fois qu'une même variable x se présente analoguement *comme second indice*, ce que nous appellerons le *degré de multiplication en x.*

Cependant il faut bien remarquer que les degrés ainsi définis se rattachent essentiellement à la *forme actuelle* de l'expression de Δ et qu'ils pourront quelquefois se diminuer en changeant opportunément la forme de l'expression de Δ.

4. Nous dirons que deux opérations Δ et Δ' sont *égales* si l'on ait identiquement

$$\Delta f = \Delta' f$$

pour toute fonction rationnelle entière*) f des variables qui entrent

*) On verra dans ce même paragraphe, que toute égalité entre deux opérations peut toujours se déduire au moyen des relations fondamentales des types I, II, III données ci-après. Or, ces relations pouvant s'appliquer à une fonction *quelconque*, il s'ensuit que, si deux opérations sont égales d'après notre définition, elles donneront aussi le même résultat lors même qu'on les appliquera à une fonction de nature quelconque satisfaisante aux conditions ordinaires de dérivabilité.

dans la composition de Δ et Δ', et nous appellerons *degré irréductible* d'une opération donnée Δ la plus petite valeur du degré total des différentes opérations qui lui sont égales.

On peut aussi définir d'une manière analogue le degré irréductible de dérivation ou de multiplication par rapport à une série de variables.

5. Les opérations élémentaires qu'on peut former avec des séries *distinctes* de variables de même espèce, $p, q, t, s, \ldots$ sont liées entre elles par des relations dont les plus simples sont données par les types suivants:

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} D_{sq} D_{pt} - D_{pt} D_{sq} = 0, \\ D_{sq} D_{st} - D_{st} D_{sq} = 0, \\ D_{sq} D_{pq} - D_{pq} D_{sq} = 0. \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} D_{tq} D_{pt} - D_{pt} D_{tq} = D_{pq}, \\ D_{pq} D_{pp} - D_{pp} D_{pq} = D_{pq}, \\ D_{qq} D_{pq} - D_{pq} D_{qq} = D_{pq}, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \{ D_{qp} D_{pq} - D_{pq} D_{qp} = D_{pp} - D_{qq}.$$

Ces relations sont fondamentales, car toute autre relation entre les opérations peut toujours se déduire de celles-ci, ainsi qu'on le reconnaîtra sans peine dans la suite de ce paragraphe.

On pourrait aussi démontrer*), à l'aide de ces relations, que les n^2 opérations élémentaires (1) qu'on peut former avec n séries $x, y, z, t, \ldots, u, v$ sont toujours exprimables comme un aggrégat rationnel entier de $n + 1$ d'entre elles, par exemple par les $n + 1$ opérations élémentaires:

$$D_{xx}, \quad D_{xy}, \quad D_{yz}, \quad D_{zt}, \ldots, \quad D_{uv}, \quad D_{vx}.$$

Mais nous ne nous arrêterons pas à la démonstration de ce point qui a peu d'importance pour ce qui va suivre.

6. Theorème I. *Si Π et Π' sont deux produits de λ opérations élémentaires, qui ne diffèrent que par l'ordre de succession des facteurs, on aura identiquement*

$$\Pi - \Pi' = \sum k_i \cdot \pi_i$$

où les coefficients constants k_i sont des nombres entiers, positifs ou négatifs, et les π_i sont des produits de $\lambda - 1$ opérations élémentaires.

Considérons d'abord le cas où Π et Π' ne diffèrent que par l'échange de deux facteurs consécutifs D_i et D_j, de la sorte qu'on ait:

*) V. *Osservazioni sopra le relazioni che possono aver luogo identicamente fra le operazioni invariantive.* (Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Napoli. Giugno 1887).

$$\Pi = \Delta \cdot D_i D_j \cdot \Delta', \quad \Pi' = \Delta \cdot D_j D_i \cdot \Delta',$$

Δ et Δ' désignant resp. les produits des facteurs qui précèdent et qui suivent. On tire de la

$$\Pi - \Pi' = \Delta \cdot \{D_i D_j - D_j D_i\} \cdot \Delta',$$

ce qui démontre le théorème pour le cas considéré, car le facteur de deuxième degré peut se remplacer, en vertu des relations fondamentales (I), (II), (III), par le zéro ou par un facteur de premier degré:

$$\varepsilon_1 \cdot D_\mu + \varepsilon_2 \cdot D_\nu.$$

ε_1 et ε_2 représentant l'unité positive ou négative, ou bien le zéro.

Maintenant, on peut ramener le cas général, où Π et Π' diffèrent par des échanges quelconques des facteurs, au cas précédent, en considérant, ce qui est évidemment toujours possible, une succession limitée de produits $\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k$, tous composés des mêmes facteurs de Π et Π', telle que deux produits consécutifs quelconques de la succession

$$\Pi, \Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_k, \Pi'$$

ne diffèrent que par une transposition de deux facteurs consécutifs. On aura alors d'après ce que précède

$$\begin{aligned}
\Pi - \Pi_1 &= \varepsilon_0 \pi_0 + \varepsilon_0' \pi_0', \\
\Pi_1 - \Pi_2 &= \varepsilon_1 \pi_1 + \varepsilon_1' \pi_1', \\
\Pi_2 - \Pi_1 &= \varepsilon_2 \pi_2 + \varepsilon_2' \pi_2', \\
&\cdots\cdots\cdots \\
\Pi_k - \Pi' &= \varepsilon_k \pi_k + \varepsilon_k' \pi_k',
\end{aligned}$$

les ε exprimant le zéro ou bien ± 1, et les π étant des produits de $\lambda - 1$ opérations élémentaires; et en sommant ces relations on en déduira

$$\Pi - \Pi' = \sum \varepsilon \cdot \pi$$

ainsi qu'il fallait démontrer.

7. Corollaire. *Si $\Delta = F(D_{px}, D_{xy}, D_{xz}, \ldots)$ est une fonction de degré total λ, et Δ' une opération qui coincide avec Δ si l'on a regard seulement à sa forme algébrique, mais qui en diffère par l'ordre des facteurs opératifs, leur différence $\Delta - \Delta'$ est une opération dont le degré irréductible ne peut supérer $\lambda - 1$, et dont les coefficients seront des fonctions linéaires (ou coefficients numériques entiers) des coefficients de Δ.*

Ça découle immédiatement du théorème démontré en l'appliquant successivement à chaque terme de Δ et au terme correspondant de Δ'.

8. Théorème II. *Si $D_1, D_2, \ldots, D_N$ sont les n^2 opérations élémentaires* (1) *rangées dans un ordre choisi arbitrairement, une opération*

quelconque Δ *composée par ces opérations élémentaires peut toujours s'exprimer par une somme de termes de la forme*

$$(2) \qquad \alpha \, . \, D_N^{\mu_N} \, . \, D_{N-1}^{\mu_{N-1}} \ldots D_3^{\mu_3} \, . \, D_2^{\mu_2} \, . \, D_1^{\mu_1},$$

α étant un coefficient constant (fonction linéaire à coefficients numériques entiers des coefficients de Δ) et $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_N$ des entiers positifs dont la somme ne peut dépasser le degré total de Δ.

Ce théorème étant évident pour les opérations Δ de degré égal à l'unité, supposons le déjà démontré pour toutes les opérations Δ dont le degré soit égal ou inférieur à $\lambda - 1$, et proposons nous de le démontrer pour les opérations de degré λ. Ça suffira évidemment pour établir la vérité du théorème.

A cet effet, étant donnée une opération quelconque Δ de degré λ, désignons par Δ' l'opération qui se déduit de Δ en permutant dans chaque terme de Δ l'ordre des facteurs de manière à les ranger dans l'ordre fixé (2). On aura:

$$\Delta' = \sum \beta \, . \, D_N^{\mu_N} \ldots D_2^{\mu_2} \, . \, D_1^{\mu_1},$$

les β étant les mêmes coefficients de Δ. Mais, les opérations Δ et Δ' coincidant entre elles par rapport à la forme algébrique, leur différence $\Delta - \Delta'$ sera une opération réductible au degré $\lambda - 1$, ainsi qu'on l'a vu tout à l'heure. On pourra donc l'exprimer, en vertu de notre hypothèse, sous la forme

$$\Delta - \Delta' = \sum \gamma \, . \, D_N^{\mu_N} \ldots D_2^{\mu_2} \, . \, D_1^{\mu_1},$$

es γ étant des fonctions linéaires (à coefficients numériques entiers) des coefficients de Δ et la somme des exposants $\mu_1 + \cdots + \mu_N$ ne pouvant dépasser $\lambda - 1$. On trouve donc en additionnant cette expression lavec la précédente

$$\Delta = \sum (\beta + \gamma) \cdot D_N^{\mu_N} \ldots D_2^{\mu_2} \, . \, D_1^{\mu_1},$$

ce qui démontre le théorème.

Nous allons en déduire quelques corollaires qui nous seront très utils dans la suite.

9. Corollaire A. *Si les séries de variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ne sont pas contenues dans une fonction f qui dépend seulement des $x, y, z, \ldots$, toute autre fonction déduite de f au moyen d'opérations formées avec les $x, y, z, \ldots$ et les $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ peut aussi s'en déduire plus simplement au moyen des seules opérations élémentaires qui ont pour premier indice les $x, y, z, \ldots$.*

En effet, si Δ est une opération quelconque formée avec les $x, y, z, \ldots$ et les $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on peut toujours l'écrire, d'après le théorème ci-dessus, sous la forme

$$\Delta = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, \Pi',$$

Π désignant un produit d'opérations élémentaires D_{pq} dont le premier indice p soit l'une des $x, y, z, \ldots$ et Π' un produit d'opérations élémentaires ayants pour premier indice les $\xi, \eta, \zeta, \ldots$. Mais la fonction f ne dépendant pas des $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, on aura évidemment

$$\Pi' \,.\, f = 0$$

à l'exception du cas où Π' se réduit à l'unité. Il reste donc précisément pour Δf une expression de la forme

$$\Delta f = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

c. q. f. d.

10. Corollaire B. *Si une fonction φ des séries $x, y, z, \ldots$ ait été déduite d'une fonction f des mêmes séries au moyen d'opérations composées avec les $x, y, z, \ldots$ et avec des nouvelles séries $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, elle pourrait aussi s'en déduire directement avec des opérations formées des seules $x, y, z, \ldots$.*

En effet, si après avoir représenté φ, comme tout à l'heure, sous la forme

$$\varphi = \sum \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

les Π ne contenant aux premiers indices que les $x, y, z, \ldots$, et après avoir effectuées les opérations indiquées par celles des Π qui contiennent le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ au seconds indices, on y substitue partout le zéro au lieu des $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ qui ne se trouvent qu'au second membre, il restera

$$\varphi = \sum{}' \alpha \,.\, \Pi \,.\, f,$$

où dans le second membre ne sont restées que les Π formées exclusivement avec les $x, y, z, \ldots$

11. Théorème III. *Toute fonction entière des n séries $x, y, \ldots, u, \ldots, v$*

$$f = \sum \alpha \,.\, x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_p^{\lambda_p} \,.\, y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \ldots y_p^{\sigma_p} \ldots v_1^{\varrho_1} v_2^{\varrho_2} \ldots v_p^{\varrho_p}, \quad p \gtreqless n,$$

homogène et de degré α_i par rapport à chaque indice i, c'est-à-dire telle que l'on ait dans tous les termes

$$\lambda_i + \sigma_i + \cdots + \varrho_i = \alpha_i$$

peut toujours s'écrire sous la forme

$$f = \Delta \,.\, E$$

en désignant par E la fonction monoterme:

$$E = x_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots u_p^{\alpha_p}$$

et par Δ une certaine opération, composée avec les séries $x, y, \ldots, u, \ldots, v$, *dont les degrés de dérivation par rapport aux séries* $x, y, \ldots, u$ *ne dépassent pas les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ *respectivement.*

En désignant en effet par

$$\begin{array}{l} \xi', \ \xi'', \ \xi''', \ \ldots, \ \xi^{(n)}, \\ \eta', \ \eta'', \ \eta''', \ \ldots, \ \eta^{(n)}, \\ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ \omega', \ \omega'', \ \omega''', \ \ldots, \ \omega^{(n)}, \end{array}$$

$n \,.\, p$ nouvelles séries de variables *auxiliaires* de même espèce que les $x, y, z, \ldots, u, \ldots, v$, indépendantes entre elles et des $x, y, \ldots, u, \ldots, v$, on peut écrire, ainsi qu'on peut le vérifier immédiatement

$$(3) \qquad x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_p^{\lambda_p} \,.\, y_1^{\sigma_1} y_2^{\sigma_2} \ldots y_p^{\sigma_p} \ldots v_1^{\varrho_1} v_2^{\varrho_2} \ldots v_p^{\varrho_p} = k \,.\, \Delta_2 \,.\, \Delta_1 \,.\, E,$$

où

$$\Delta_1 = D_{x\xi'}^{\lambda_1} D_{x\xi''}^{\sigma_1} \ldots D_{x\xi^{(n)}}^{\varrho_1} \,.\, D_{y\eta'}^{\lambda_2} D_{y\eta''}^{\sigma_2} \ldots D_{y\eta^{(n)}}^{\varrho_2} \ldots D_{v\omega'}^{\lambda_p} D_{v\omega''}^{\sigma_p} \ldots D_{v\omega^{(n)}}^{\varrho_p},$$

$$\Delta_2 = D_{\xi' x}^{\lambda_1} D_{\xi'' y}^{\sigma_1} \ldots D_{\xi^{(n)} v}^{\varrho_1} \,.\, D_{\eta' x}^{\lambda_2} D_{\eta'' y}^{\sigma_2} \ldots D_{\eta^{(n)} v}^{\varrho_2} \ldots D_{\omega' x}^{\lambda_p} D_{\omega'' y}^{\sigma_p} \ldots D_{\omega' v}^{\varrho_p}$$

et

$$k = \frac{1}{\underline{|\alpha_1} \, \underline{|\alpha_2} \ldots \underline{|\alpha_p}} \cdot \frac{1}{\underline{|\lambda_1} \, \underline{|\lambda_2} \ldots \underline{|\lambda_n} \ldots \underline{|\varrho_1} \, \underline{|\varrho_2} \ldots \underline{|\varrho_n}}.$$

Mais, d'après l'article 10, on peut toujours transformer l'opération $\Delta_2 \Delta_1$, à l'aide des formules fondamentales (I), (II), (III), jusqu'à en éliminer les variables auxiliaires, et l'on obtiendra alors

$$\Delta_2 \,.\, \Delta_1 \,.\, E = \Delta \,.\, E.$$

Δ étant une opération composée par les seules $x, y, z, \ldots, v$; et l'on voit immédiatement que les degrés de dérivation de Δ par rapport à ces séries ne supéreront les nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ qui représentent les degrés de dérivation de l'opération $\Delta_2 \,.\, \Delta_1$ par rapport à ces mêmes séries.

12. Corollaire. *Si* $D_1, D_2, \ldots, D_{N'}$, *sont les opérations élémentaires propres entre les* n *séries* $x, y, \ldots, v$, *et si* $Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ *sont tous les termes de la forme*

$$(4) \qquad D_{N'}^{\mu_{N'}} \ldots D_2^{\mu_2} \,.\, D_1^{\mu_1}$$

dont les degrés de dérivation en $x, y, \ldots, v$ *ne dépassent pas resp. les nombres* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, *et que l'on pose*

$$E = x_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots v_n^{\alpha_n},$$

entre les fonctions entières

$$Q_1 E, \ Q_2 E, \ \ldots, \ Q_t E$$

ne peut avoir lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

Il suffit de supposer dans le théorème que précède $p = n$ et d'observer 1°) qu'en vertu de ce théorème et du théorème II la fonction f peut se déduire de E par une opération composée de termes de la forme (4), 2°) que le nombre des termes distincts de f coincide précisément avec le nombre t des termes opératifs de cette forme (4).

13. Le théorème II peut se généraliser en deux sens différents au moyen de quelques modifications légères de la démonstration que nous en avons donné.

Soit ϑ l'un quelconque des produits que l'on peut former avec les n^2 opérations (1), et désignons en général par

$$i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n \tag{5}$$

les degrés de dérivation par rapport aux différents groupes de variables

$$x, y, z, \ldots, v$$

respectivement, et désignons analoguement par

$$j_1, j_2, j_3, \ldots, j_n, \tag{5'}$$

les degrés de multiplication par rapport aux mêmes séries.

Si nous imposons aux degrés (5) et (5)′ des conditions de la forme

$$\text{(A)} \quad \begin{array}{l} \varphi_1(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n) < e_1, \\ \varphi_2(i_1, i_2, \ldots, i_n, j_1, j_2, \ldots, j_n) < e_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

où les φ sont des fonctions rationnelles entières à coefficients réels et positifs, et les e des nombres positifs donnés, le nombre des termes ϑ qui satisfont à ces conditions sera évidemment *limité*. Maintenant nous imaginerons que l'on adjoigne, si l'on veut, à ces conditions des nouvelles conditions, de nature complètement arbitraire, pour les différences

$$i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n$$

et nous désignerons le système de ces nouvelles conditions par (B). On pourrait, p. exemple, imposer des conditions exprimables analytiquement par des équations de la forme:

$$\begin{array}{l} \psi_1(i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n) = 0, \\ \psi_2(i_1 - j_1, \; i_2 - j_2, \ldots, i_n - j_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

les ψ désignant des fonctions bien determinées quelconques. Ou bien, on pourrait imposer des conditions de nature arithmétique, p. exemple, que la somme

$$(i_1 - j_1)^2 + (i_2 - j_2)^2 + \cdots + (i_n - j_n)^2$$

fût un carré exact etc. etc.

Désignons par Θ l'ensemble de tous les termes ϑ qui satisfont simultanément aux conditions (A) et (B). Les termes dont se compose Θ peuvent s'écrire comme il suit:

$$(6)\qquad \begin{array}{l} \Theta_1,\ \Theta_1',\ \Theta_1'',\ \Theta_1''',\ \ldots, \\ \Theta_2,\ \Theta_2',\ \Theta_2'',\ \Theta_2''',\ \ldots, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Theta_\varrho,\ \Theta_\varrho',\ \Theta_\varrho'',\ \Theta_\varrho''',\ \ldots, \end{array}$$

en plaçant dans une même ligne horizontale tous les termes ϑ qui ne diffèrent entre eux que par l'ordre des facteurs élémentaires. Cela posé, on a le théorème suivant.

Théorème III. *Si* $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\varrho$ *sont* ϱ *termes choisis arbitrairement resp. dans chacune des* ϱ *lignes horizontales* (6), *tous les termes* (6) *peuvent s'exprimer par une somme de ces* ϱ *termes* $\Theta_1, \ldots, \Theta_\varrho$ *multipliés resp. par des nombres entiers positifs ou négatifs.*

Supposons, en effet, qu'on ait déjà démontré que tous les termes de Θ, dont le degré total ne dépasse pas $\lambda - 1$, sont exprimables par une somme de la forme

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho,$$

les α étant des nombres entiers. Il suffira alors de démontrer, comme à l'art. 8, qu'un terme quelconque de degré λ, appartenant à Θ, sera aussi exprimable par une somme de la même forme.

Soit $\Theta_\nu^{(\mu)}$ un terme quelconque de Θ de degré λ. Le théorème I nous apprend que la différence $\Theta_\nu^{(\mu)} - \Theta_\nu$ est exprimable par une somme, à coefficients numériques entiers, de termes de degré $\lambda - 1$. Mais en examinant la démonstration du théorème I il est facile de s'apercevoir que ces termes de degré $\lambda - 1$ feront eux mêmes partie de Θ. Car les formules fondamentales (I), (II), (III), en substituant aux termes de deuxième degré des premiers membres des termes de degré inférieur, n'augmentent jamais par cette substitution ni les degrés de derivation $i_1, i_2, \ldots, i_n$, ni les degrés de multiplication $j_1, j_2, \ldots, j_n$, et laissent complètement inaltérées les différences $i_1 - j_1$, $i_2 - j_2, \ldots,$ $i_n - j_n$. Donc, les termes $\Theta_\nu^{(\mu)}$ et Θ_ν satisfaisant déjà aux conditions (A) et (B), les termes de degré $\lambda - 1$, par lesquels s'exprime leur différence, devront y satisfaire de même. Ces derniers termes appartiendront donc à Θ et conséquemment ils pourront s'exprimer, d'après notre hypothèse, en fonction linéaire, à coefficients numériques entiers, des $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_\varrho$. On aura alors:

$$\Theta_\nu^{(\mu)} - \Theta_\nu = \alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho$$

d'où

$$\Theta_\nu^{(\mu)} = \beta_1\Theta_1 + \beta_2\Theta_2 + \cdots + \beta_\varrho\Theta_\varrho,$$

les β étant des entiers positifs ou négatifs.

14. Une opération quelconque Δ, dont les termes appartiennent à Θ, pourra donc s'exprimer sous la forme

$$\alpha_1\Theta_1 + \alpha_2\Theta_2 + \cdots + \alpha_\varrho\Theta_\varrho,$$

les α étant des fonctions linéaires (à coefficients numériques entiers) des coefficients de l'opération Δ.

Si l'on n'impose aux termes de Θ que la condition $\sum i < k$, on a en particulier:

Théorème IV. *Une opération quelconque de degré k peut aussi s'exprimer par les mêmes termes de la forme*

$$\alpha \,.\, D_N^{\mu_N} \ldots D_3^{\mu_3} \,.\, D_2^{\mu_2} \,.\, D_1^{\mu_1},$$

considérés au théorème II, avec la condition $\sum \mu \gtreqless k$, lors même qu'on ait exécuté dans quelq'un ou dans chacun de ces termes une permutation quelconque des facteurs élémentaires qui le composent. Seulement les valeurs des coefficients numériques entiers αx ne resteront en générale pas les mêmes.

On pourrait p. exemple dans l'expression d'une opération donnée par le théorème II substituer au terme $D_3^\mu D_2^\mu D_1^\mu$ le terme $D_3^{\mu-1} D_2^{\mu-1} D_1^{\mu-1} \,.\, D_3 D_2 D_1$ ou bien la puissance $[D_3 D_2 D_1]^\mu$ pourvu qu'on change convenablement les coefficients de l'expression.

15. Théorème V. *Entre les opérations monômes de la forme*

$$D_N^{\mu_N} \ldots D_3^{\mu_3} D_2^{\mu_2} D_1^{\mu_1} \tag{7}$$

(ou entre ces mêmes termes après avoir effectué dans chacun une permutation quelconque des facteurs $D_1, D_2, \ldots$) ne peut avoir lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

Nous considérerons d'abord les termes de la forme (7) et supposerons aussi que les n premières opérations élémentaires $D_1, D_2, \ldots, D_n$ coincident avec les n opérations impropres $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$.

Désignons par Θ l'ensemble de tous les termes de la forme (7) dont les degrés de dérivation par rapport aux $x, y, z, \ldots, v$ ne dépassent pas respectivement certains nombres $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$, et supposons, s'il est possible, qu'ils soient liés par une relation linéaire à coefficients constants. Soient, maintenant, $Q_1^0, Q_2^0, Q_3^0, \ldots, Q_h^0$ les termes appartenants à Θ qui ne contiennent pas d'opérations élémentaires impropres $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$; et $Q_i', Q_i'', Q_i''', \ldots$ les autres termes de Θ qui ne diffèrent de Q_i que par des facteurs impropres $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$.

Soit, s'il est possible

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}\, Q_i^{(j)} = 0\,, \tag{8}$$

une relation linéaire à coefficients constants α_{ij} dont on veut supposer l'existence, Si on l'applique à la fonction monôme $F = x_1^{\lambda'} y_2^{\mu'} \ldots v_n^{\varrho'}$, on aura en particulier

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} \,.\, Q_i^{(j)} F = 0. \tag{9}$$

Mais il est aisé de voir que les résultats

$$Q_i^0 F, \quad Q_i' F, \quad Q_i'' F, \ \ldots$$

ne diffèrent entre eux que par un facteur numérique. On a, en effet, d'après notre hypothèse:

$$Q_i^{(j)} = Q_i^0 \,.\, D_{vv}^{t_n} \ldots D_{yy}^{t_2} D_{xx}^{t_1},$$

$t_n, t_2, \ldots, t_1$ étant des exposants resp. inférieurs à $\lambda, \sigma, \ldots, \varrho$, et par conséquent

$$Q_i^{(j)} F = \lambda'^{t_1} \,.\, \mu'^{t_2} \ldots \varrho'^{t_n} \,.\, Q_i^0 F.$$

On peut donc écrire:

$$\alpha_{i0} Q_i^0 F + \alpha_{i1} Q_i' F + \alpha_{i2} Q_i'' F + \cdots = \varphi_i(\lambda', \sigma', \cdots, \varrho') \cdot Q_i^0 F,$$

où φ_i est le symbole d'une fonction rationnelle entière des arguments $\lambda', \mu', \ldots, \varrho'$ dont les degrés par rapport à $\lambda', \mu', \ldots, \varrho'$ ne peuvent supérer resp. les nombres $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$, et dont les coefficients sont les $\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots$

La relation (9) devient ainsi

$$\sum_{i=1}^{i=h} \varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \varrho') \,.\, Q_i^0 F = 0.$$

Mais pour toutes les F qui ont des exposants $\lambda', \mu', \ldots, \varrho'$, resp. égals ou supérieurs aux nombres $\lambda, \mu, \ldots, \varrho$, ne peut subsister (art. 12) aucune relation linéaire à coefficients constants entre les résultats $Q_1^0 F, Q_2^0 F, \ldots, Q_h^0 F$. On aura donc nécessairement pour tous ces systèmes de valeurs

$$\varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \varrho') = 0.$$

Maintenant, la fonction entière $\varphi_i(\lambda', \mu', \ldots, \varrho')$ devant s'annuler pour un nombre infini de systèmes de valeurs de ses arguments, chaque argument pouvant prendre un nombre infini de valeurs indépendamment des autres, elle doit être identiquement nulle, d'après un théorème bien connu d'algèbre. On aura donc:

$$\alpha_{i0} = 0, \quad \alpha_{i1} = 0, \quad \alpha_{i2} = 0, \cdots$$

La relation (8) ne peut donc se vérifier que pour des valeurs nulles des coefficients c. q. f. d.

16. Désignons maintenant par Θ' l'ensemble des mêmes termes Θ après avoir effectué dans chacun d'eux une permutation quelconque des facteurs élémentaires, et supposons, s'il est possible, que les termes Θ' soient liés par une relation linéaire à coefficients constants. Alors, les termes Θ pouvant toujours s'exprimer (art. 14) en fonction linéaire

des Θ' et réciproquement, une relation linéaire devrait aussi avoir lieu entre les termes Θ contrairement à ce que nous avons démontré ci-dessus. Le théorème V se trouve ainsi complètement démontré:

17. Théorème VI. *Pour que le degré d'une opération:*

$$\Delta = F(D_1, D_2, \ldots, D_N)$$

composée d'une manière quelconque avec les opérations élémentaires $D_1, D_2, \ldots, D_N$ *soit irréductible* (art. 4), *il faut et il suffit que ce degré coincide avec le degré de la fonction* $F(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N)$ *considérée comme fonction des variables indépendantes* $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N$.

En effet, Δ_λ étant une opération quelconque de degré λ, soit Δ_0 l'aggregat de tous ses termes de degré λ. On aura

$$\Delta_\lambda = \Delta_0 + \Delta'_{\lambda-1}.$$

$\Delta'_{\lambda-1}$ étant une opération de degré non superieur à $\lambda - 1$. Si nous désignons maintenant par Δ_0' ce que devient Δ_0 quand on y permute dans chaque terme les opérations élémentaires de manière à les ranger dans l'ordre préfixé $D_1, D_2, D_3, \ldots$, nous pouvons écrire (art. 7):

(10) $$\Delta_0 = \Delta_0' + \Delta''_{\lambda-1}.$$

$\Delta''_{\lambda-1}$ étant une nouvelle opération dont le degré ne dépasse $\lambda - 1$. Nous avons donc

(11) $$\Delta_\lambda = \Delta_0' + (\Delta'_{\lambda-1} + \Delta''_{\lambda-1}).$$

Supposons maintenant que le degré de Δ_λ soit réductible, c'est-à-dire que l'on ait

$$\Delta_\lambda = \Delta_{\lambda-1}$$

où $\Delta_{\lambda-1}$ soit une opération de degré égal ou inférieur $\lambda - 1$. On tire alors de (10)

$$\Delta_0' = \Delta_{\lambda-1} - \Delta'_{\lambda-1} - \Delta''_{\lambda-1}.$$

Maintenant, le second membre de cette égalité pouvant toujours s'exprimer (art. 8) par des termes dont les facteurs élémentaires se suivent dans l'ordre préfixé et dont le degré ne supère $\lambda - 1$, pendant que les termes du premier membre sont tous de degré λ et composés de facteurs qui se suivent déjà dans le même ordre, cette égalité nous donne une relation linéaire qui ne peut se vérifier (art. 15) que dans le cas où chaque membre soit nul séparément. On aura donc

$$\Delta_0' = 0.$$

Mais Δ_0' n'est autre chose que l'ensemble des termes de degré λ de la fonction $F(D_1, D_2, \ldots, D_N)$ considérée comme fonction des variables indépendantes $D_1, D_2, \ldots$. Cette fonction sera donc, de ce point de vue, une fonction de degré $\lambda - 1$.

La condition énoncée dans notre théorème est donc nécessaire. Mais elle est aussi suffisante. Car si l'on suppose $\Delta_0' = 0$, on tire de (11)

$$\Delta_\lambda = \Delta'_{\lambda-1} + \Delta''_{\lambda-1},$$

ce qui donne une réduction de l'opération Δ_λ à une opération de degré $\lambda - 1$.

Exemple. L'opération de 6^{me} degré:

$$\Delta = D_{xy}^2 D_{yz}^2 D_{zx}^2 - D_{yz} D_{xy} D_{zx}^2 D_{yz} D_{xy} + 2 D_{xy} D_{yz} D_{zx} + D_{xy}^2 D_{yx}^2$$

a son degré réductible, parce qu'en substituant aux symboles D_{xy}, D_{yz}, D_{zx}, D_{yx} resp. des variables indépendantes ξ, η, ζ, τ on obtient la fonction

$$\xi^2\eta^2\zeta^2 - \xi^2\eta^2\zeta^2 + 2\xi\eta\zeta + \xi^2\tau^2$$

c'est-à-dire

$$2\xi\eta\zeta + \xi^2\tau^2,$$

qui est seulement du quatrième degré. On trouverait donc que Δ se réduit au cinquième degré ou à un degré plus petit.

19. Théorème VII. *Le degré irréductible du produit de plusieurs opérations, différentes de zéro, est égal à la somme des degrés irréductibles de ces opérations.*

Il suffit évidemment de démontrer ce théorème pour le cas du produit de deux opérations. Soit donc

$$F_1(D_1, D_2, D_3, \ldots) \,.\, F_2(D_1, D_2, D_3, \ldots)$$

le produit de deux opérations, des degrés irréductibles μ_1 et μ_2, exprimées resp. par des fonctions entières F_1 et F_2 de ces mêmes degrés; et supposons, s'il est possible, que le degré irréductible de ce produit soit inférieur à $\mu_1 + \mu_2$. Ça revient à dire (art. 17) que la fonction entière

$$F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots) \,.\, F_2(\omega_1, \omega_2, \ldots),$$

des variables indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots$ est aussi d'un degré inférieur à $\mu_1 + \mu_2$, et, par conséquent, que les deux fonctions $F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ et $F_2(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ ne peuvent être simultanément des degrés respectifs μ_1 et μ_2. Mais si l'on supposait, par exemple, que la fonction $F_1(\omega_1, \omega_2, \ldots)$ était de degré inférieur à μ_1, il s'ensuivrait (art. 17) que l'opération $F_1(D_1, D_2, \ldots)$ serait de degré irréductible inférieur à μ_1, ce qui est contraire à notre hypothèse.

19. Corollaire A. *Pourque le produit de deux opérations soit identiquement nul, l'une ou l'autre d'entre-elles doit être nulle identiquement.*

Soient, en effet, μ_1 et μ_2 les degrés irreductibles des deux opérations Δ_1 et Δ_2 et supposons, s'il est possible, qu'on ait

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 0,$$

sans que Δ_1 ou Δ_2 soient séparément nulles. Le second membre étant une opération de degré nul, on aurait par le théorème précédent $\mu_1 + \mu_2 = 0$ et par conséquent

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0.$$

Le produit $\Delta_1 \Delta_2$ serait donc le produit de deux simples constantes différentes de zéro, ce qui serait absurde, ce produit étant supposé égal à zéro.

20. Corollaire B. *Les puissances différentes d'une même opération ne peuvent être liées par aucune relation linéaire à coefficients constants.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$a_0 + a_1 \Delta + a_2 \Delta^2 + \cdots + a_h \Delta^h = 0,$$

les coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots$ étant des constantes et Δ une opération quelconque différente de zéro, dont le degré irréductible soit μ. On en déduirait

$$a_h \cdot \Delta^h = -(a_{h-1}\Delta^{h-1} + a_{h-2}\Delta^{h-2} + \cdots + a_1 \Delta + a_0)$$

et l'on voit que le coefficient a_h doit être nul, car autrement le premier membre serait, par notre théorème, une opération de degré irréductible $\mu \cdot h$, pendant que le second membre serait une opération d'un degré évidemment inférieur. Le coefficient a_h étant donc nul, il restera

$$a_0 + a_1 \Delta + \cdots + a_{h-1}\Delta^{h-1} = 0$$

et l'on démontrerait de même que $a_{h-1} = 0$, etc.

§ II.

L'Opération H.

1. L'opération de M. Cayley

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial v_n} \end{vmatrix} = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

formée avec n séries de variables n^{aires}: $x, y, \ldots, v$, opération qui joue un rôle très important dans la théorie des formes invariantives, peut toujours se ramener à des simples opérations élémentaires, telles que nous les avons considéré dans le § qui précède. A cet effet il suffit de considérer l'opération

$$(1) \qquad \mathsf{H} = (xy \cdots v) \cdot \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n},$$

qui ne diffère de la précédente qu'en ce que le résultat de l'opération Ω doit être encore multiplié par le déterminant

$$\sum \pm x_1 y_2 \ldots v_n = (xy \ldots v)$$

des n séries de variables.

Nous allons démontrer que l'opération H ainsi définie peut être remplacée par un aggregat des n^2 opérations élementaires:

(2) $$D_{xx}, D_{xy}, \ldots, D_{xv}, \ldots, D_{vx}, D_{vy}, \ldots, D_{vv},$$

qu'on peut former avec les mêmes séries de variables.

2. Pour ramener l'opération H à ces dernières opérations nous introduirons pour le moment dans les calculs n nouvelles séries de variables $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \omega$ de même espèce que les $x, y, \ldots, v$, complètement indépendantes entre-elles et de celles-ci. A l'aide de ces nouvelles variables, qu'on pourrait appeler *auxiliaires* l'opération H peut s'écrire sous la forme suivante

$$\mathsf{H} = D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \left\{ (\xi \eta \ldots \omega) \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n} \right\}$$

parce qu'on a

$$D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} (\xi \eta \ldots \omega) = (xy \ldots v)$$

et parce qu'on peut évidemment toujours supposer que la fonction, sur laquelle on doit effectuer l'opération H, soit indépendante des variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$.

Mais, d'après la règle de multiplication des déterminants, on a

$$(\xi \eta \ldots \omega) \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n} = \begin{vmatrix} D_{x\xi} & D_{y\eta} & \ldots & D_{x\omega} \\ D_{y\xi} & D_{y\eta} & \ldots & D_{y\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{v\xi} & D_{v\eta} & \ldots & D_{v\omega} \end{vmatrix}.$$

On peut donc écrire

(a) $$\mathsf{H} = D_{\omega v} \ldots D_{\eta y} D_{\xi x} \cdot \sum \pm D_{x\xi} D_{y\eta} \ldots D_{v\omega},$$

où le second membre se compose avec les $2n$ séries:

$$x, y, \ldots, v; \quad \xi, \eta, \ldots, \omega.$$

Maintenant il s'agit seulement d'éliminer les variables auxiliaires par le procédé indiqué au §. précédent (voir le théorème II, corollaire B).

On parviendra ainsi à un résultat de la forme suivante:

$$\mathsf{H} = \sum C \cdot D_{vv'}^{\varepsilon_n} \ldots D_{yy'}^{\varepsilon_2} D_{xx'}^{\varepsilon_1},$$

où $x', y', \ldots, v'$ est une permutation quelconque des lettres $x, y, \ldots, v$, les exposants $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ n'ayant que les valeurs 0 et 1, et les coefficients C étant des nombres entiers positifs ou négatifs.

3. Pour $n = 2$ on trouve:

$$H_{xy} = (x_1y_2 - x_2y_1)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial y_1}\right) + D_{xx} + D_{xx}D_{yy} - D_{yx}D_{xy}$$

et pour $n = 3$:

$$H_{xyz} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & \frac{\partial}{\partial z_2} & \frac{\partial}{\partial z_3} \end{vmatrix}$$

$$= D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz}) + D_{zx}D_{xy}D_{yz} + D_{yx}D_{zy}D_{xz}$$
$$- D_{xx}D_{zy}D_{yz} - D_{zx}(1+D_{yy})D_{xz} - D_{yx}D_{xy}(2+D_{zz}).$$

Ces expressions de H peuvent se représenter d'une manière très-simple sous forme de déterminant en écrivant

$$H_{xy} = \begin{vmatrix} D_{xy} & D_{xy} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} \end{vmatrix}, \quad H_{xyz} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} \\ D_{yx} & 1+D_{yy} & D_{yz} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2+D_{zz} \end{vmatrix}, \text{ etc.}$$

pourvu que dans chaque terme du développement on ait soin de ranger les facteurs opératifs dans le même ordre des lignes verticales auxquelles ils appartiennent.*)

4. Au lieu de partir de l'expression (a) de H composée avec les variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$, on peut partir de l'expression suivante:

$$\text{(b)} \qquad H = \left\{\sum \pm D_{\xi x}D_{\eta y}\ldots D_{\omega v}\right\} \cdot D_{v\omega}\ldots D_{y\eta}D_{x\xi}$$

ou bien de l'expression

$$\text{(c)} \quad H = \frac{1}{\underline{n}}\left\{\sum \pm D_{\xi x}D_{\eta y}\ldots D_{\omega v}\right\} \cdot \left\{\sum \pm D_{x\xi}D_{y\eta}\ldots D_{v\omega}\right\}$$

qui se deduit de (a) ou de (b) en y permutant de toutes les manières possibles les variables auxiliaires $\xi, \eta, \ldots, \omega$. Cette dernière expression nous apprend que *l'opération H est symmétrique par rapport aux séries de variables $x, y, \ldots, u$ dont elle dépend; ce qu'on pouvait d'ailleurs déduire immédiatement de l'expression* (1).

5. L'expression de H au moyen des opérations élémentaires (2) a un sens parfaitement déterminé quel que soit le nombre m des variables dont se compose chacune des séries $x, y, \ldots, v$. Dans le cas où le nombre m est égal au nombre n des séries $x, y, \ldots, v$ nous avons vu qu'on a identiquement

*) Voir le tome XXIX de ces annales: Ueber die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen.

$$H = (xy\cdots v) \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_n} \Big\},$$

mais il est aisé de voir qu'on aura une expression analogue aussi pour le cas de $m \gtrless n$. Si l'on pose en effet pour $m \gtrless n$

$$(3) \qquad H = \begin{Vmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \\ y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_1 & v_2 & \dots & v_m \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_m} \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial y_m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \frac{\partial}{\partial v_2} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_m} \end{Vmatrix}$$

$$= \sum_i (x_{i_1} y_{i_2} \dots v_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial v_{i_n}} \right)$$

on pourra transformer le second membre, par l'introduction des séries auxiliaires $\xi, \eta, \dots, \omega$, d'une manière tout à fait analogue à celle de l'art. 1. On trouvera ainsi:

$$H = D_{\omega v} \dots D_{\eta y} D_{\xi x} \sum_i (\xi_{i_1} \eta_{i_2} \dots \omega_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial v_{i_n}} \right)$$

$$= D_{\omega v} \dots D_{\eta y} D_{\xi x} \sum \pm D_{x\xi} D_{y\eta} \dots D_{v\omega} \cdot$$

expression qui ne diffère point dans sa forme de celle que l'on avait pour le cas de $m = n$. Cependant il est évident que *dans le cas de $m < n$ le résultat de l'opération H sera toujours nul identiquement.*

6. *L'opération H entre des séries de variables $x, y, z, \dots, v$ est permutable avec toutes les opérations qu'on peut former avec ces séries.*

Pour démontrer ce théorème il suffit évidemment de montrer que H est permutable avec chacune des opérations élémentaires (2), et on pourra se borner aux opérations de la forme D_{xp}, p étant une quelconque des variables $x, y, \dots, v$ parce que l'opération H est symétrique par rapport aux variables $x, y, \dots, v$ dont elle dépend, ainsi que nous l'avons déjà remarqué (art. 4).

En partant de l'expression (6):

$$H = \left\{ \sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} D_{\zeta z} \dots D_{\omega v} \right\} \cdot D_{v\omega} \dots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi}$$

au moyen des formules

$$D_{xp} D_{\xi x} = D_{\xi x} D_{xp} + D_{\xi p},$$
$$D_{xp} D_{\eta x} = D_{\eta x} D_{xp} + D_{\eta p},$$
$$\dots\dots\dots$$

on trouve aisément:

$$D_{xp} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} D_{xp}$$
$$+ \sum \pm D_{\xi p} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}.$$

Maintenant, si p coincide avec y, ou z, ... ou v, on a évidemment

$$\sum \pm D_{\xi p} D_{\eta y} D_{\zeta z} \ldots D_{\omega v} = 0$$

et on conclut immédiatement

$$D_{xp} H = H D_{xp}.$$

Dans le cas où p coincide avec x l'égalité précédente devient

$$D_{xx}\left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} = \left\{\sum \pm D_{\xi x} D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\right\} (D_{xx} + 1)$$

et l'on aura, encore $D_{xx} H = H D_{xx}$, car

$$(D_{xx} + 1) D_{\omega v} \ldots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi} = D_{v\omega} \ldots D_{z\zeta} D_{y\eta} D_{x\xi} \cdot D_{xx} \text{ *)}$$

9. *L'opération H entre les n séries $x, y, z, \ldots, t, u$ peut toujours s'écrire sous la forme*

$$(4) \qquad \Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \cdots + \Delta_{n-1} D_{tu}$$

les Δ_i étant des opérations composées opportunément avec les mêmes séries, et

$$\Delta_0 = D_{xx}(1 + D_{yy})(2 + D_{zz}) \ldots (n - 1 + D_{uu})$$

Ce théorème est évident, d'après l'article 3, pour le cas de deux séries x, y. On peut donc le démontrer en le supposant vrai pour le cas de $n - 1$ séries et en l'étendant au cas de n séries. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'on l'ait démontré pour le cas de trois séries x, y, z c'est-à-dire que l'on ait

$$(5) \qquad H_{xyz} = D_{xx}(1 + D_{yy})(2 + D_{zz}) + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz}$$

et qu'on cherche à le démontrer pour le cas de quatre séries x, y, z, t. En développant l'expression donnée à l'art. 3:

$$H_{xyzt} = \begin{vmatrix} D_{xx} & D_{xy} & D_{xz} & D_{xt} \\ D_{yx} & 1 + D_{yy} & D_{yz} & D_{yt} \\ D_{zx} & D_{zy} & 2 + D_{zz} & D_{zt} \\ D_{tx} & D_{ty} & D_{tz} & 3 + D_{tt} \end{vmatrix}$$

---

*) Pour n séries il y a, en dehors de l'opération H, $n - 1$ autres opérations fondamentales qui jouissent de la même propriété d'être permutables à toute autre opération formée avec les n séries, ainsi que je l'ai démontré dans mon mémoire: *Ricerca delle operazioni invariantive fra più serie di variabili permutabili con ogni altra operazione. (Atti della R^a. Acc. delle Scienze fis. e mat. di Napoli. Vol. I, Serie 2^a).*

§ III.

Sur la dérivabilité des fonctions rationnelles entières les unes des autres et sur l'impossibilité de dériver une fonction de plusieurs séries de variables, exactement divisible par le déterminant des séries, de fonctions d'un nombre plus petit de séries.

1. Théorème I. *Si deux fonctions rationnelles entières des mêmes séries de variables, homogènes par rapport aux variables de chaque série, ne diffèrent l'une de l'autre que par une permutation quelconque des séries, elles seront toujours dérivables l'une de l'autre au moyen d'opérations.*

Soit p. ex. $f(x, y, z)$ une fonction des trois séries x, y, z homogène par rapport aux variables de chaque série et resp. des degrés λ, μ, ν. Je dis que la fonction $f(y, z, x)$ peut se déduire de $f(x, y, z)$ par des opérations formées avec les séries x, y, z. Soient en effet ξ, η, ζ trois nouvelles séries *auxiliaires* indépendantes des précédentes. On reconnait sans peine que

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \cdot D^{\lambda}_{x\xi} D^{\mu}_{y\eta} D^{\nu}_{z\zeta} f(x, y, z),$$

$$f(y, z, x) = \frac{1}{\underline{|\lambda}\,\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \cdot D^{\lambda}_{\xi y} D^{\mu}_{\eta z} D^{\nu}_{\zeta x} f(\xi, \eta, \zeta)$$

d' où:

$$f(y, z, x) = \frac{1}{(\underline{|\lambda})^2 (\underline{|\mu})^2 (\underline{|\nu})^2} \cdot D^{\lambda}_{\xi y} D^{\mu}_{\eta z} D^{\nu}_{\zeta x} D^{\lambda}_{x\xi} D^{\mu}_{y\eta} D^{\nu}_{z\zeta} f(x, y, z).$$

Maintenant on peut éliminer les séries auxiliaires par le procédé que nous avons indiqué au § I. (Théorème II, Cor. B), et on obtiendra

$$f(y, z, x) = \Delta \,.\, f(x, y, z)$$

l'opération Δ étant composée avec les opérations élémentaires $D_{xy}, D_{xz}, \ldots$ qui ne dépendent que des x, y, z.

2. Théorème II. *Si une fonction φ de $n - 1$ séries de variables peut se dériver, au moyen d'opérations, d'une fonction f rationnelle entière (homogène en chaque série) de n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$, on pourra toujours déterminer des opérations Δ_i telles que l'on ait:*

$$\varphi = \sum \Delta_i \,.\, D^{\alpha_i}_{xy} D^{\beta_i}_{xt} \ldots D^{\lambda_i}_{xu} \,.\, f$$

le symbole $\sum$ s'étendant aux systèmes de valeurs des $n - 1$ exposants $\alpha_i, \beta_i, \ldots, \lambda_i$ dont la somme $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i$ est égale au degré de f en x.

Soit p. ex. y la série qui n'est pas contenue dans la fonction $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ dérivée de $f(x, y, z, t, \ldots, u)$. On a d'abord d'après le théorème précédent on trouve d'abord

$$H_{xyzt} = (3+D_{tt})H_{xyz} + \Delta_1' D_{xt} + \Delta_2' D_{yt} + \Delta_3' D_{zt} \,.$$

Mais en appliquant plusieurs fois de suite l'identité

$$D_{pq} = D_{tq} D_{pt} - D_{pt} D_{tq}$$

on peut facilement exprimer les opérations D_{xt}, D_{yt}, D_{zt} par les trois opérations D_{xy}, D_{yz}, D_{zt}. On obtient alors évidemment, après avoir substitué pour H son expression (5), un résultat de la forme

$$H_{xyzt} = D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz})(3+D_{tt}) + \Delta_1'' D_{xy} + \Delta_2'' D_{yz} + \Delta_3'' D_{zt}$$

ainsi qu'on le désirait. La démonstration reste absolument la même pour un nombre quelconque de séries.

9. *Si une fonction rationnelle entière des n séries $x, y, z, \ldots, t, u$, homogène par rapport à chaque série, est annulée par chacune des $n-1$ opérations:*

$$D_{xy}, D_{yz}, \ldots, D_{tu}\,,$$

elle est identiquement égale à une puissance du déterminant $(xyz\ldots u)$ multipliée par une fonction entière des $y, z, \ldots, t$ qui sera aussi annulée par les opérations $D_{yz}, \ldots, D_{tu}$.

En effet, si l'on opère sur une fonction f, qui jouit de ces propriétés, avec l'opération H, le théorème de l'art. précédent nous donnera

$$Hf = \Delta_0 f$$

où le second membre n'est autre chose que la fonction f même multipliée par un nombre entier, positif et différent de zéro. Mais le premier membre Hf est une fonction exactement divisible par le déterminant $(xy \ldots tu)$ ainsi qu'il s'ensuit immédiatement de la définition même (1) de H. On aura donc

$$f = (xyz \ldots tu) \,.\, \varphi$$

φ étant une fonction entière qui satisfait encore aux égalités

$$D_{xy}\varphi = 0,\ D_{yz}\varphi = 0, \ldots, D_{tu}\varphi = 0$$

puisqu'on a identiquement

$$D_{xy}f = (xyz \ldots tu) \,.\, D_{xy}\varphi,\quad D_{yz}f = (xyz \ldots tu) \,.\, D_{yz}\varphi, \ldots$$

Maintenant, si φ dépende encore de x, on démontrera de la même manière que φ est de la forme $(xyz \ldots tu) \,.\, \psi$, ψ étant une fonction entière des $x, y, z, \ldots$ qui satisfait aux égalités:

$$D_{xy}\psi = 0,\ D_{yz}\psi = 0, \ldots, D_{tu}\psi = 0.$$

On obtient ainsi

$$f = (xyz \ldots tu)^2 \,.\, \psi$$

et on peut continuer de la même manière jusqu'à ce qu'on ait séparé de f une puissance de $(xy \ldots u)$ dont l'exposant soit égal au degré de f en x.

$$\varphi(y, z, t, \ldots, u) = \Delta\varphi(x, z, t, \ldots, u) \cdot$$

Maintenant, la $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ pouvant, d'après notre hypothèse, se dériver de $f(x, y, z, t, \ldots, u)$, on peut toujours écrire, ainsi que nous l'avons démontré au § I (Théorème II):

$$\varphi(y, z, t, \ldots, u) = \sum \Delta_i \,.\, D_{xy}^{\alpha_i} D_{xt}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \cdot f$$

les Δ_i ne contenant plus la variable x aux premiers indices. La somme $\alpha_i + \beta_i + \cdots + \delta_i$ doit donc être égale dans tous les termes de $\sum$ au degré de f en x, sans quoi le second membre ne pourrait être de degré nul en x. Le théorème est donc demontré parce que la fonction $\varphi(x, z, t, \ldots, u)$ peut à son tour se déduire de $\varphi(y, z, t, \ldots, u)$ au moyen d'opérations en vertu du théorème précédent.

3. Dans ce qui va suivre nous dirons qu'une fonction entière f des n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$ est *impropre* (ou bien qu'elle est *dérivable d'un nombre plus petit de séries*), lorsqu'elle peut se déduire, au moyen d'opérations, de certaines fonctions de $n - 1$ séries de variables. Ça revient à dire que la fonction f doit pouvoir se représenter identiquement sous la forme

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

les Δ_i étant des opérations entre les n séries $x, y, z, \ldots, u$.

En effet, on peut toujours supposer, sans nuire à la généralité, que les $n - 1$ séries qui entrent dans les φ_i soient partout les mêmes, et l'on pourra toujours les choisir arbitrairement. Car, s'il soit, p. ex., pour le cas de quatre séries de variables x, y, z, t:

$$f(x, y, z, t) = \Delta_1 \varphi_1(y, z, t) + \Delta_2 \varphi_2(x, z, t) + \Delta_3 \varphi_3(y, z, x)$$

on peut toujours écrire, ainsi que nous l'avons vu ci-dessus:

$$\varphi_2(x, z, t) = D_2 \,.\, \varphi_2(y, z, t),$$
$$\varphi_3(y, z, x) = D_3 \,.\, \varphi_3(y, z, t)$$

D_2, D_3 étant des opérations entre x, y, z, t; et si l'on pose

$$\Delta_2 D_2 = \Delta', \qquad \Delta_3 D_3 = \Delta''$$

on aura pour f la forme:

$$f(x, y, z, t) = \Delta_1 \varphi_1(y, z, t) + \Delta' \varphi_2(y, z, t) + \Delta'' \varphi_3(y, z, t).$$

4. **Théorème III.** *Une fonction impropre f des n séries de variables $x, y, z, \ldots, u$ est toujours de la forme:*

$$f = \sum_i D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{zx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \cdot \psi_i(y, z, \ldots, u).$$

On a d'abord d'après l'article précédent

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u).$$

Maintenant on peut toujours arranger (§ I, art. 8) les n^2 opérations élémentaires dont se compose Δ_i de manière que l'on ait identiquement

$$\Delta_i = \sum D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{zx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j' D_{xu}^{\beta_{n-1}} \ldots D_{xz}^{\beta_2} D_{xy}^{\beta_1}$$

Δ_j' étant une opération qui dépend seulement des $y, z, \ldots, u$. **Mais,** la fonction φ_i ne contenant pas les x, on aura

$$D_{xu}^{\beta_{n-1}} \ldots D_{xz}^{\beta_2} D_{xy}^{\beta_1} \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u) = 0$$

à l'excéption du cas

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-1} = 0.$$

On pourra donc écrire simplement

$$\Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u) = \sum_j D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{zx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j' \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

$$= \sum_j D_{ux}^{\alpha_{n-1}} \ldots D_{zx}^{\alpha_2} D_{yx}^{\alpha_1} \Delta_j \cdot \chi_j(y, z, \ldots, u)$$

parce que $\Delta_j' \cdot \varphi_i$ est évidemment une fonction des seules $y, z, \ldots, u$. Le théorème reste ainsi démontré.

5. Théorème IV. *Une fonction entière impropre des n séries de variables n^{aires} $x, y, z, \ldots, u$ est toujours annulée par l'opération de Cayley*

$$\Omega = \sum \pm \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial u_n}.$$

Soit en effet

$$f(x, y, z, \ldots, u) = \sum \Delta_i \cdot \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

une fonction impropre des $x, y, z, \ldots, u$. On a (§ II):

$$(x\, y\, z \ldots u) \cdot \Omega f = H \cdot \sum_i \Delta_i \varphi_i(y, z, \ldots, u).$$

Mais les φ_i, ne contenant pas les variables x, seront évidemment annulées par l'opération H. Le second membre de la dernière égalité est donc nul et l'on a par conséquent:

$$\Omega f = 0$$

6. Nous allons maintenant démontrer le théorème suivant qui est d'une importance fondamentale pour notre théorie:

Théorème V. *Une fonction rationnelle entière $F(x, y, z, \ldots, u)$ des n séries de variables n^{aires} $x, y, z, \ldots, u$ qui soit exactement divisible par le déterminant des variables est toujours une fonction propre. En d'autres termes: il ne peut subsister un identité de la forme:*

$$(xyz \ldots u) \,.\, F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

que dans le cas évident où chaque membre est nul séparément.

Évidemment on peut toujours supposer que la fonction F soit homogène par rapport à chacune des n séries $x, y, z, \ldots, u$.

En nous bornant, pour mieux fixer les idées, à cinque séries de variables x, y, z, t, u, soient resp. l, m, n, r, s les degrés dans ces séries de la fonction F qui satisfait par hypothèse à une identité de la forme:

(a) $$(xyztu) \,.F\,(x, y, z, t, u) = \sum_i \Delta_i \,.\, f_i\,(y, z, t, u).$$

Nous considérerons toutes les fonctions dont le degré total est égal au degré total

$$k = l + m + n + r + s$$

de F et nous les rangerons d'après la règle suivante. Qu'on prenne au hasard deux fonctions quelconques Φ et Ψ; soient $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5$ les degrés de Ψ par rapport aux cinque séries, écrits dans l'ordre de leur valeur croissante, de sorte que l'on ait:

$$\mu_1 \lesseqqgtr \mu_2 \lesseqqgtr \mu_3 \lesseqqgtr \mu_4 \lesseqqgtr \mu_5$$

et soient $\nu_1 \lesseqqgtr \nu_2 \lesseqqgtr \nu_3 \lesseqqgtr \nu_4 \lesseqqgtr \nu_5$ les degrés analogues pour Φ. Nous dirons alors que la fonction Ψ est *inférieure* à Φ si l'on ait: $\mu_1 < \nu_1$; ou si, étant $\mu_1 = \nu_1$, il soit $\mu_2 < \nu_2$; ou s'il on ait $\mu_1 = \nu_1$, $\mu_2 = \nu_2$, $\mu_3 = \nu_3$ et ainsi de suite.

Cela posé nous allons démontrer que, si une identité de la forme (a) est impossible pour toutes les fonctions Ψ inférieures à une certaine fonction Φ, elle sera de même impossible pour Φ.

Admettons en effet, s'il est possible, qu'on ait identiquement

(6) $$(xyztu) \,.\, \Phi(\overset{\lambda}{x}\overset{\mu}{y}\overset{\nu}{z}\overset{\varrho}{t}\overset{\sigma}{u}) = \sum_i \Delta_i \,.\, \varphi_i\,(y, z, t, u)$$

et supposons, ce qui est toujours permis, que l'on ait:

$$\lambda \lesseqqgtr \mu \lesseqqgtr \nu \lesseqqgtr \varrho \lesseqqgtr \sigma.$$

Si nous opérons sur les deux membres de cette identité avec l'opération élémentaire D_{xy}, nous en déduirons

(c) $$(xyztu)\,\{D_{xy}\Phi\} = \sum_i \Delta_i' \varphi_i(y, z, t, u)$$

où

$$\Delta_i' = D_{xy}\Delta_i$$

Cette identité est de la même forme de (b), la fonction Φ y étant remplacée par la fonction $D_{xy}\,\Phi$ qui lui est inférieure, parce que les degrés de cette dernière fonction en x, y, z, t, u sont évidemment $\lambda - 1$, $\mu + 1, \nu, \varrho, \sigma$. On aura donc identiquement d'après notre hypothèse:

(d) $$D_{xy}\Phi = 0$$

Si l'on opère maintenant de la même manière sur l'identité (b) avec les operations élémentaires D_{yz}, D_{zt}, D_{tu} successivement, on en déduira par un raisonnement semblable

(e) $$D_{yz}\Phi = 0, \quad D_{zt}\Phi = 0, \quad D_{tu}\Phi = 0$$

car il est aisé de reconnaître que les fonctions $D_{yz}\Phi$, $D_{zt}\Phi$, $D_{tu}\Phi$ sont toutes inférieures à Φ.

En effectuant désormais sur l'identité (b) l'opération H qu'on peut mettre d'après un théorème démontré précédemment (§ II art 8) sous la forme:

$$H = \Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \Delta_3 D_{zt} + \Delta_4 D_{tu}$$

où

$$\Delta_0 = D_{xx}(1+D_{yy})(2+D_{zz})(3+D_{tt})(4+D_{uu}),$$

et ayant égard aux identités (d) et (e) on obtient:

$$\Delta_0 \left\{(xyztu) \cdot \Phi\right\} = H \sum_i \Delta_i \varphi_i = 0.$$

Mais, l'opération H étant permutable (§ II, art. 6) aux Δ_i, on a

$$H \sum_i \Delta_i \varphi_i = \sum_i \Delta_i \,.\, H\varphi_i = 0$$

puisque l'opération H annule évidemment les fonctions φ_i qui ne contiennent pas les x. Il reste donc:

$$\Delta_0 \left\{xyztu) \,.\, \Phi\right\} = 0.$$

Mais on a évidemment, $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ étant les dégrés de Φ dans les cinque séries:

$$\Delta_0 \left\{(xyztu) \,.\, \Phi\right\} = (\lambda+1)(\mu+2)(\nu+3)(\varrho+4)(\sigma+5) \,.\, (xyztu) \,.\, \Phi$$

où le facteur numérique est nécessairement différent de zéro. On doit donc avoir identiquement $\Phi = 0$ ainsi qu'il fallait démontrer.

7. Cela posé, le nombre des systèmes différents de dégrés qui peuvent se présenter pour les fonctions inférieures à F et de degré total égal au degré total k de F est toujours limité, car les systèmes de nombres entiers et positifs $\lambda, \mu, \nu, \varrho, \sigma$ satisfaisant à l'égalité

$$\lambda + \mu + \nu + \varrho + \sigma = k$$

sont en nombre évidemment fini. Soit N le nombre de ces systèmes et soient

$$\begin{matrix} \lambda_1, & \mu_1, & \nu_1, & \varrho_1, & \sigma_1, \\ \lambda_2, & \mu_2, & \nu_2, & \varrho_2, & \sigma_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_N, & \mu_N, & \nu_N, & \varrho_N, & \sigma_N \end{matrix}$$

les systèmes eux-mêmes rangés dans l'ordre des fonctions dont il représentent les degrés, de sorte qu'une fonction des degrés:

$$\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i, \sigma_i$$

sera supérieure à une fonction des degrés

$$\lambda_{i+1}, \mu_{i+1}, \nu_{i+1}, \varrho_{i+1}, \sigma_{i+1}.$$

Le dernier système aura évidemment les valeurs

(g) $$\lambda_N = 0, \mu_N = 0, \nu_N = 0, \varrho_N = 0, \sigma_N = k.$$

Maintenant, si une identité de la forme (a) est impossible pour les fonctions F dont les systèmes des degrés soient:

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_{i+1}, & \mu_{i+1}, & \nu_{i+1}, & \varrho_{i+1}, & \sigma_{i+1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_N, & \mu_N, & \nu_N, & \varrho_N, & \sigma_N \end{array}$$

la démonstration donnée à l'art. préc. nous apprend qu'elle sera de même impossible pour une fonction F dont les degrés soient:

$$\lambda_i, \mu_i, \nu_i, \varrho_i, \sigma_i.$$

On voit donc que la démonstration de l'impossibilité d'une relation de la forme (a) est réduite à démontrer qu'une relation semblable est impossible pour une fonction F des degrés (g), c'est-à-dire pour une fonction d'une seule série de variables.

Mais si l'on avait p. ex. dans ce cas:

$$(xyztu) \,.\, F(u) = \sum_i \Delta_i f_i(y, z, t, u)$$

on pourrait opérer sur les deux membres avec l'opération H et l'on en déduirait comme à l'art. précédent:

$$H\{(xyztu) \,.\, F(u)\} = 0$$

ce qui revient encore à l'identité

$$F(u) = 0;$$

car, la fonction $F(u)$ ne contenant pas les variables x, y, z, t est annulée par les opérations élémentaires $D_{xy}, D_{yz}, D_{zt}, D_{tu}$. Notre théorème est donc complètement démontré.

8. Le même procédé qui nous a conduit à la démonstration du théorème précédent peut servir, sans modifications essentielles, à démontrer le théorème suivant:

Théorème VI. *Si $x, y, z, \ldots, u$ sont n séries de variables, n'importe de quelle espèce m, et H est l'opération:*

$$H = \sum_i (x_{i_1} y_{i_2} \ldots u_{i_n}) \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial}{\partial u_{i_n}} \right)$$

il ne peut subsister aucune identité de la forme

$$(\alpha) \qquad H \,.\, F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_i \Delta_i \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

sans que les deux membres soient nuls séparément.

On démontrera, comme ci-dessus, que si une identité de la forme (α) est impossible pour des fonctions F inférieures à une certaine fonction Φ, l'identité supposée

$$(\beta) \qquad H \,.\, \Phi\,(x, y, z, \ldots, u) = \sum \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

entraîne les identités

$$(\gamma) \qquad D_{xy}\Phi = 0,\; D_{yz}\Phi = 0, \ldots, D_{tu}\Phi = 0.$$

Si l'on opère alors sur l'identité (β) avec l'opération

$$H = \Delta_0 + \Delta_1 D_{xy} + \Delta_2 D_{yz} + \cdots$$

on obtiendra d'abord:

$$H \,.\, H \,.\, \Phi = 0.$$

Mais, en vertu des (γ), on a (§ II, art. 8):

$$H\Phi = \Delta_0\Phi, \quad H \,.\, H\Phi = \Delta_0 \,.\, \Delta_0\Phi.$$

On doit donc avoir

$$\Delta_0^{\,2} \,.\, \Phi = 0$$

ou, ce qui est la même chose, $\Phi = 0$. Abstraction faite de ces petites modifications la démonstration reste donc la même des articles précédents.

§ IV.

Développement d'une fonction de n séries de variables suivant les puissances du déterminant des séries et les polaires de covariants qui contiennent seulement $n - 1$ séries.

1. En partant des théorèmes démontrés ci-dessus nous allons maintenant établir le théorème suivant.

Théorème I. *Une fonction rationnelle entière quelconque*

$$F(x, y, z, \ldots, u)$$

des n séries $x, y, z, \ldots, u$, d'espèce n, peut toujours s'exprimer sous la forme

$$F(x, y, z, \ldots, u) = (xyz \ldots u) \,.\, \Phi\,(x, y, z, \ldots, u) + \sum \Delta_i \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

où le second membre est la somme de deux fonctions rationnelles entières dont la première est exactement divisible par le déterminant $(x, y, z, \ldots, u)$ des variables, et dont la seconde est une fonction dérivable (par nos opérations) de fonctions $f_i(y, z, \ldots, u)$ qui contiennent seulement les séries $y, z, \ldots, u$.

Une fonction quelconque F pouvant toujours s'écrire sous la forme

$$F = F_0 + F_1 + \cdots + F_h$$

où les termes d'une même fonction F_i sont tous du même degré par rapport à chacune des séries $x, y, z, \ldots, u$ et du même *poids* par rapport à chacun des indices $1, 2, \ldots n$, qui affectent les variables, il nous sera évidemment suffisant de démontrer le théorème pour une fonction quelconque qui jouit de cette propriété.

Nous supposerons donc que tous les termes de F soient des degrés $q_1, q_2, \ldots, q_n$ et des poids $p_1, p_2, \ldots, p_n$, de sorte que l'on ait:

$$(1) \qquad F = \sum_i A_i \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \ldots y_n^{\beta_n} \ldots u_1^{\lambda_1} u_2^{\lambda_2} \ldots u_n^{\lambda_n}$$

les A_i étant des coefficients constants et les exposant satisfaisant pour chaque terme de F aux conditions:

$$(2) \qquad \begin{array}{ll} \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = q_1, & \alpha_1 + \beta_1 + \cdots + \lambda_1 = p_1, \\ \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = q_2, & \alpha_2 + \beta_2 + \cdots + \lambda_2 = p_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = q_n, & \alpha_n + \beta_n + \cdots + \lambda_n = p_n. \end{array}$$

Le nombre M des termes

$$(3) \qquad E_1, E_2, \ldots, E_M,$$

qui peuvent se trouver en F, sera donné par

$$M = \psi(p_1, p_2, \ldots, p_n;\ q_1, q_2, \ldots, q_n)$$

en désignant par ψ la fonction arithmétique qui exprime combien il y a de systèmes de solutions pour les (2).

Parmi les fonctions des mêmes degrés et poids que F il y en a évidemment

$$M_1 = \psi(p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_n - 1;\ q_1 - 1, q_2 - 1, \ldots, q_n - 1)$$

qui sont exactement divisibles par le déterminant $(x\,y\,z \ldots u)$ et entre lesquelles il ne peut subsister aucune relation linéaire à coefficients constants. Mais ces dernières fonctions sont linéairement indépendantes des fonctions *impropres* c'est-à-dire des fonctions de la forme

$$\sum \Delta_{tf}(y, z, \ldots, u)$$

ainsi que nous l'avons démontré (§ III, art. 6). Il suffira donc pour démontrer le théorème énoncé ci-dessus de démontrer qu'il y a au moins $M - M_1$ fonctions impropres des mêmes degrés et poids que F, entre lesquelles il n'ait lieu aucune relation linéaire à coefficients constants.

2. Désignons respectivement par

$$\begin{array}{l} D_{11},\ D_{12},\ldots,D_{1n}, \\ D_{21},\ D_{22},\ldots,D_{2n}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{n1},\ D_{n2},\ldots,D_{nn} \end{array}$$

les opérations qui occupent la place correspondante dans le tableau

$$\begin{array}{l} 1\ \ ,\ D_{xy},\ D_{xz},\ldots,D_{xu}, \\ D_{yx},\ \ 1\ \ ,\ D_{yz},\ldots,D_{yu}, \\ D_{zx},\ D_{zy},\ \ 1\ \ ,\ldots,D_{zu}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ D_{ux},\ D_{uy},\ D_{uz},\ldots,\ \ 1 \end{array}$$

et rappelons nous (§ I, art. 11) que les différents termes (3) peuvent tous se déduire du terme

$$E_0 = x_1^{p_1} y_2^{p_2} \ldots u_n^{p_n}$$

au moyen d'opérations. Et, plus précisément, si l'on indique par $\Delta_2, \Delta_2, \ldots, \Delta_M$ les M opérations de la forme

$$(4)\qquad \Delta_i = D_{nn}^{\lambda_n} \ldots D_{n2}^{\beta_n} D_{n1}^{\alpha_n} \ldots D_{2n}^{\lambda_2} \ldots D_{22}^{\beta_2} D_{21}^{\alpha_2} D_{1n}^{\lambda_1} \ldots D_{12}^{\beta_1} D_{11}^{\alpha_1},$$

où les exposants satisfont aux mêmes conditions (2) considérées ci-dessus, nous savons que les termes (3) s'expriment en fonction linéaire à coefficients constants de

$$(5)\qquad \Delta_1 E_0,\ \Delta_2 E_0, \ldots, \Delta_M E_0$$

et réciproquement.

Nous savons de plus (§ I, art. 14) que l'on peut substituer au système (5) le système

$$(6)\qquad \Delta_1' E_0,\ \Delta_2' E_0, \ldots, \Delta_M' E_0$$

où Δ_i' diffère de Δ_i par une permutation arbitraire des facteurs élémentaires D_{pq} qui la composent.

Maintenant nous nous servirons de ce principe pour permuter, de la manière qu'on va expliquer, l'ordre des facteurs des opérations Δ_i dont les exposants (4) satisfont à l'une *au moins* des équations:

$$(7)\qquad \alpha_1 = 0,\ \beta_2 = 0,\ \gamma_3 = 0, \ldots, \lambda_n = 0.$$

Dans ces opérations il y aura, évidemment un produit de la forme

$$(8)\qquad D_{i1}^{\Theta_1} D_{i2}^{\Theta_2} \ldots D_{i,i-1}^{\Theta_{i-1}} D_{i,i+1}^{\Theta_{i+1}} \ldots D_{i,n}^{\Theta_n}$$

avec la condition

$$\Theta_1 + \Theta_2 + \cdots + \Theta_{i-1} + \Theta_{i+1} + \cdots + \Theta_n = p_i$$

et, si l'on prend pour Δ_i' ce que devient Δ_i quand on y permute

$$E_0 = (x\,y\,z\,\ldots\,u)\,.\,\Phi + \sum_i \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$f_i(y, z, \ldots, u) = \Delta_i E_0.$$

D'autre coté, Φ étant une fonction rationnelle entière des degrés $q_1 - 1, \ldots, q_n - 1$ et des poids $p_1 - 1, \ldots, p_n - 1$, on a (§ I, art. 11):

$$\Phi = \Delta E_1$$

en prenant

$$E_1 = x_1^{p_1-1}\, y_2^{p_2-1} \ldots u_n^{p_n-1}$$

où, ce qui est la même chose à moins d'un facteur numérique:

$$E_1 = \Omega\,.\,E_0.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$(9) \qquad E_0 = \Delta\,.\,H\,.\,E_0 + \sum_i \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i E_0.$$

Mais, si l'on a une identité de la forme:

$$F(x_1, x_2, \ldots;\, y_1, y_2; \ldots; \ldots) = \Delta\,.\,F_1(x_1, x_2, \ldots;\, y_1, y_2, \ldots; \ldots)$$

il est aisé de reconnaître que l'on a aussi:

$$F(a_x, b_x, \ldots;\, a_y, b_y, \ldots; \ldots) = \Delta\,.\,F_1(a_x, a_y, \ldots;\, b_x, b_y, \ldots; \ldots)$$

où

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$
$$b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \cdots$$

les $a, b, c, \ldots$ étant des constantes arbitraires. On peut donc tirer de l'identité (9) la suivante:

$$F = a_x^{p_1}\, b_y^{p_2}\, c_z^{p_3} \ldots e_u^{p_n} = \Delta H\,.\,F + \sum_i \Delta_i' f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i F.$$

Maintenant il suffit de remarquer que les opérations Δ, H, Δ_i', Δ_i sont indépendantes des $a, b, c, \ldots$ pour reconnaître que cette identité aura lieu pour une fonction rationnelle entière quelconque $F(x, y, \ldots, u)$ resp. homogène et des degrés $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par rapport à chaque série, car

$$a_x^{p_1}\, b_y^{p_2} \ldots e_u^{p_n}$$

est précisément l'expression symbolique d'une fonction générale de ces degrés. Si nous remettons à la place de H son expression en Ω, nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Si $F(x, y, \ldots, u)$ est une forme algébrique générale de certains degrés par rapport à chaque série $x, y, \ldots, u$, on a une identité de la forme:*

$$(10) \quad F(x, y, \ldots, u) = (xy \ldots u)\,.\,\Phi(x, y, \ldots, u) + \sum \Delta_i'\,.\,f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$(11) \qquad \Phi = \Delta \,.\, \Omega F \quad \text{et} \quad f_i = \Delta_i F$$

Ω *étant l'opération de Cayley et les* Δ *des aggrégats des opérations élémentaires* D_{xy}, D_{yx}, $D_{xz}, \ldots$ *Cette identité a lieu indépendamment des valeurs des coefficients de* F *qui restent absolument arbitraires. En d'autres termes les opérations* Δ, Δ_i, Δ_i' *dépendent seulement des degrés de* F *par rapport aux différentes séries.*

7. La forme donnée dans ce théorème aux fonctions Φ et f_i nous dit qu'elles sont des *covariants* de la forme F. Quant aux f_i on voit aisément, d'après un théorème précédent (§ III, art. 2) qu'on peut toujours les déterminer de la manière plus simple en prenant:

$$f_i = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, F$$

α_i, $\beta_i, \ldots, \lambda_i$ étant un système quelconque de nombres entiers et positifs qui satisfont à la condition

$$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i = p_1.$$

En appliquant la formule (10) p_1 fois successivement on obtient donc, d'après cette remarque, le théorème suivant:

Théorème IV. *Si* $F(x, y, \ldots, u)$ *est une forme algébrique générale des* n *séries d'espèce* n, *de degré* p *par rapport à la série* x, *et de certains degrés donnés par rapport aux autres séries, on a toujours une identité de la forme:*

$$(12) \qquad F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_{\mu, i} (xy \ldots u)^{\mu} \,.\, \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$(13) \qquad \varphi_i(y, z, \ldots, u) = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \ldots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, \Omega^{\mu} \,.\, F$$

le signe $\sum$ *s'étendant à tout les systèmes de valeurs des* n *nombres entiers et positifs* α_i, $\beta_i, \ldots, \lambda_i$, μ *qui satisfont à la condition:*

$$\alpha_i + \beta_i + \cdots + \lambda_i + \mu = p.$$

L'opération Δ_i *qui corresponde à chaque fonction* f_i *ne dépend nullement des coefficients de* F *mais seulement de ses degrés.**)

8. Corollaire A. *Une forme algébrique* F *de* n *séries* $x, y, \ldots, u$ *d'espèce* n, *de degré* p *par rapport à une série* x, *est toujours équivalente au système des* $\binom{n+p-1}{p}$ *formes algébriques:*

$$D_{xy}^{\alpha} D_{xz}^{\beta} \ldots D_{xu}^{\lambda} \Omega^{\mu} \,.\, F$$

$$\alpha + \beta + \cdots + \lambda + \mu = p.$$

*) Dans le cas de deux seules séries binaires x, y la formule (12) coïncide avec une formule bien connue de Clebsch et Gordan. Voir: Clebsch *Theorie der bin. alg. Formen* 1872. pag. 15, ou bien: Kerschensteiner; *Gordan's Vorlesungen* 1887. pag. 81.

$$E_0 = (x\,y\,z \ldots u) \,.\, \Phi + \sum_i \Delta_i' \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$f_i(y, z, \ldots, u) = \Delta_i E_0.$$

D'autre coté, Φ étant une fonction rationnelle entière des degrés $q_1 - 1, \ldots, q_n - 1$ et des poids $p_1 - 1, \ldots, p_n - 1$, on a (§ I, art. 11):

$$\Phi = \Delta E_1$$

en prenant

$$E_1 = x_1^{p_1-1} y_2^{p_2-1} \ldots u_n^{p_n-1}$$

où, ce qui est la même chose à moins d'un facteur numérique:

$$E_1 = \Omega \,.\, E_0.$$

Nous pouvons donc écrire:

$$(9) \qquad E_0 = \Delta \,.\, H \,.\, E_0 + \sum_i \Delta_i' \,.\, f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i E_0.$$

Mais, si l'on a une identité de la forme:

$$F(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2; \ldots; \ldots) = \Delta \,.\, F_1(x_1, x_2, \ldots; y_1, y_2, \ldots; \ldots)$$

il est aisé de reconnaître que l'on a aussi:

$$F(a_x, b_x, \ldots; a_y, b_y, \ldots; \ldots) = \Delta \,.\, F_1(a_x, a_y, \ldots; b_x, b_y, \ldots; \ldots)$$

où

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n,$$
$$b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n, \ldots$$

les $a, b, c, \ldots$ étant des constantes arbitraires. On peut donc tirer de l'identité (9) la suivante:

$$F = a_x^{p_1} b_y^{p_2} c_z^{p_3} \ldots e_u^{p_n} = \Delta H \,.\, F + \sum_i \Delta_i' f_i(y, z, \ldots, u), \quad f_i = \Delta_i F.$$

Maintenant il suffit de remarquer que les opérations Δ, H, Δ_i', Δ_i sont indépendantes des $a, b, c, \ldots$ pour reconnaître que cette identité aura lieu pour une fonction rationnelle entière quelconque $F(x, y, \ldots, u)$ resp. homogène et des degrés $p_1, p_2, \ldots, p_n$ par rapport à chaque série, car

$$a_x^{p_1} b_y^{p_2} \ldots e_u^{p_n}$$

est précisément l'expression symbolique d'une fonction générale de ces degrés. Si nous remettons à la place de H son expression en Ω, nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème III. *Si $F(x, y, \ldots, u)$ est une forme algébrique générale de certains degrés par rapport à chaque série $x, y, \ldots, u$, on a une identité de la forme:*

$$(10) \quad F(x, y, \ldots, u) = (xy \ldots u) \,.\, \Phi(x, y, \ldots, u) + \sum \Delta_i' \,.\, f_i(y, z, \ldots, u)$$

où

$$(11) \qquad \Phi = \Delta \,.\, \Omega F \quad \text{et} \quad f_i = \Delta_i F$$

Ω étant l'opération de Cayley et les Δ des aggrégats des opérations élémentaires D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, ... Cette identité a lieu indépendamment des valeurs des coefficients de F qui restent absolument arbitraires. En d'autres termes les opérations Δ, Δ_i, Δ_i' dépendent seulement des degrés de F par rapport aux différentes séries.

7. La forme donnée dans ce théorème aux fonctions Φ et f_i nous dit qu'elles sont des *covariants* de la forme F. Quant aux f_i on voit aisément, d'après un théorème précédent (§ III, art. 2) qu'on peut toujours les déterminer de la manière plus simple en prenant:

$$f_i = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \dots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, F$$

α_i, β_i, ..., λ_i étant un système quelconque de nombres entiers et positifs qui satisfont à la condition

$$\alpha_i + \beta_i + \dots + \lambda_i = p_1.$$

En appliquant la formule (10) p_1 fois successivement on obtient donc, d'après cette remarque, le théorème suivant:

Théorème IV. *Si $F(x, y, \dots, u)$ est une forme algébrique générale des n séries d'espèce n, de degré p par rapport à la série x, et de certains degrés donnés par rapport aux autres séries, on a toujours une identité de la forme:*

$$(12) \qquad F(x, y, z, \dots, u) = \sum_{\mu, i} (xy \dots u)^{\mu} \,.\, \Delta_i \,.\, \varphi_i(y, z, \dots, u)$$

où

$$(13) \qquad \varphi_i(y, z, \dots, u) = D_{xy}^{\alpha_i} D_{xz}^{\beta_i} \dots D_{xu}^{\lambda_i} \,.\, \Omega^{\mu} \,.\, F$$

le signe $\sum$ s'étendant à tout les systèmes de valeurs des n nombres entiers et positifs α_i, β_i, ..., λ_i, μ qui satisfont à la condition:

$$\alpha_i + \beta_i + \dots + \lambda_i + \mu = p.$$

*L'opération Δ_i qui corresponde à chaque fonction f_i ne dépend nullement des coefficients de F mais seulement de ses degrés.**)

8. Corollaire A. *Une forme algébrique F de n séries $x, y, \dots, u$ d'espèce n, de degré p par rapport à une série x, est toujours équivalente au système des $\binom{n+p-1}{p}$ formes algébriques:*

$$D_{xy}^{\alpha} D_{xz}^{\beta} \dots D_{xu}^{\lambda} \Omega^{\mu} \,.\, F$$

où

$$\alpha + \beta + \dots + \lambda + \mu = p.$$

*) Dans le cas de deux seules séries binaires x, y la formule (12) coincide avec une formule bien connue de Clebsch et Gordan. Voir: Clebsch *Theorie der bin. alg. Formen* 1872. pag. 15, ou bien: Kerschensteiner: *Gordan's Vorlesungen* 1887. pag. 81.

Ces formes ne contiennent plus que les $n - 1$ *séries* $y, z, \ldots, u$ *et sont des covariants de* F.

Il suit, en effet, des formules (12) et (13) que tout invariant ou covariant de F est un invariant ou covariant du système des φ_i et réciproquement.

9. Corollaire B. *Si une forme algébrique* F *des* n *séries* $x, y, z, \ldots, u$ *d'espèce* n *est annulée par chacune des* $n - 1$ *opérations élémentaires:*

$$D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{xu},$$

elle se réduit au produit d'une puissance du déterminant $(x\,y\,z \ldots u)$ *par une forme algébrique qui contient seulement les séries* $y, z, \ldots, u$, *et réciproquement.*

La formule (12) devient en effet dans cette hypothèse

$$F(x, y, z, \ldots, u) = (x\,y\,z \ldots u)^p \,.\, \Delta_p \,.\, \varphi_p(y, z, \ldots, u)$$

où la fonction $\Delta_p \,.\, \varphi_p(y, z, \ldots, u)$ ne peut contenir les x, p étant le degré de F par rapport aux x. La proposition réciproque est évidente.

§ V.

Extension au cas de fonctions analytiques quelconques.

1. L'extension de notre développement (§ IV, art. 3):

$$F(x, y, z, \ldots, u) = \sum_{\mu, i} (x y z \ldots u)^\mu \,.\, \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

au cas où F n'est pas une fonction rationnelle entière mais une fonction *analytique**) quelconque des n séries $x, y, z, \ldots, u$, se presente de la manière la plus naturelle si l'on substitue à la définition que nous avons donné de fonction *impropre*, c'est-à-dire d'être dérivable, par nos opérations Δ, de fonctions d'un nombre plus petit de séries, la propriété absolument équivalente d'être annulée par l'opération Ω.

Nous avons démontré en effet (§ III, art. 5) qu'une fonction impropre est toujours annulée par cette opération. D'autre côté les formules (10) et (11) du § préc. nous montrent évidemment que, si une fonction F est annulée par l'opération Ω, elle se réduit à la forme

$$\sum \Delta_i f_i(y, z, \ldots, u)$$

c'est-à-dire qu'elle est nécessairement une fonction impropre. Donc: *pour qu'une fonction rationnelle entière de* u *séries soit dérivable de fonctions de* $n - 1$ *séries, il est nécessaire et suffisant qu'elle soit annulée par l'opération* Ω.**)

*) Dans les sens bien connu de M. Weierstrass.

**) Si l'*espèce* des séries est supérieure au nombre n des séries, on peut dire

De ce point de vue la généralisation du premier théorème (§ IV, art. 1) est donnée par le théorème suivant.

2. *Soit $F(x, y, \ldots, u)$ une fonction analytique quelconque des variables $x_1, \ldots, x_n$; $y_1, \ldots, y_n$; $\ldots$; $u_1, \ldots, u_n$, monodrôme et continue pour toutes les valeurs des variables dont le modul est égal où inférieur à un certain nombre positif ϱ. On a alors identiquement*

$$(1)\quad F(x, y, \ldots, u) = \Psi(x, y, \ldots, u) + (xy \ldots u) \,.\, \Phi(x, y, \ldots, u)$$

les deux fonctions Φ et Ψ étant monodrômes et continues pour les mêmes valeurs des variables et la première satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$(2)\qquad \sum \pm \frac{\partial^n \Psi}{\partial x_1 \partial y_2 \cdots \partial u_n} = 0.$$

D'après l'hypothèse on peut toujours représenter la fonction $F(x,y,\ldots,u)$ par une série ordonnée suivant les puissances entières et positives des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots$

$$(3)\qquad P_1 + P_2 + P_3 + \cdots$$

en désignant par une lettre unique P_i l'ensemble de tous les termes de la série qui sont de même degré total par rapport aux variables. Cette série sera convergente pour toutes les valeurs des variables dont les moduls sont égals ou inférieurs à ϱ.

P_i étant une fonction rationnelle entière des variables, on peut poser d'après le § IV:

$$P_i = \psi_i + (xy \ldots u) \,.\, \varphi_i$$

ψ_i et φ_i étant aussi deux fonctions rationnelles entières dont la première satisfait à l'équation (2):

$$\Omega \psi_i = 0.$$

Maintenant je dis que la série

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 +$$

qu'on peut évidemment considérer comme une série ordonnée suivant les puissances des variables, est convergente pour toutes les valeurs des variables dont les moduls ne surpassent pas ϱ. Nous avons en effet

$$F = \lim_{n=\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i + (x\, y \cdots u) \sum_{i=1}^{i=n} \varphi_i \right\}$$

d'où

$$F' = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{i=n} \psi_i'$$

---

qu'il est nécessaire et suffisant que F soit annulée par l'opération H (dont l'expression est indépendente de l'espèce des séries: cfr. § II, art. 5).

en désignant par F', ψ_i' ce que deviennent F, ψ_i quand on y substitue pour toutes les variables le nombre ϱ. F' ayant par supposition une valeur finie, on voit que la série

$$\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots$$

est convergente pour $x_1 = x_2 = \cdots = \varrho$. D'après un théorème bien connu elle sera donc convergente pour toutes les valeurs des variables dont les modules ne surpassent pas ϱ, et l'on aura pour toutes ces valeurs

$$\Psi = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \cdots$$

Ψ étant une fonction monodrôme et continue. Le reste de la démonstration ne présente désormais de difficulté.

3. *L'expression d'une fonction analytique $F(x, y, \ldots, u)$ sous la forme* (1) *considérée au théorème précédent ne peut s'effectuer que d'une seule manière.*

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on déduirait évidemment de deux expressions supposées possibles une identité de la forme:

$$f(x, y, \ldots, u) = (xy \ldots u) \cdot \varphi(x, y, \ldots, u) \tag{3}$$

f et φ étant deux fonctions analytiques continues aux environs des valeurs nulles des variables, dont la première f satisferait à l'équation aux dérivées partielles

$$\Omega f = 0, \tag{4}$$

et les deux membres de (2) ne seraient pas nuls séparément.

Cela supposé, soient

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + \cdots,$$
$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \varphi_2 + \cdots$$

les développements de f et φ suivant les puissances des variables, f_i et φ_i désignant l'ensemble de tous les termes de même degré total i dans toutes les variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots$. De la condition (4)

$$\Omega f = \Omega f_0 + \Omega f_1 + \Omega f_2 + \cdots = 0$$

on déduit évidemment

$$\Omega f_i = 0. \tag{5}$$

D'autre côté l'identité (3) nous donne évidemment les identités

$$f_i = (xy \ldots u) \cdot \varphi_{i-1}.$$

Mais, les f_i et φ_{i-1} étant deux fonctions rationnelles entières dont la première satisfait à la condition (5), cette identité ne peut avoir lieu (§ III, art. 6) que dans le cas où:

$$f_i = 0, \quad \varphi_{i-1} = 0.$$

On aurait donc identiquement

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

contrairement à ce qui a été supposé.

4. Nous n'insisterons ici pas davantage sur l'étude complète du développement des fonctions analytiques de plusieurs séries. Il nous semble même superflu d'énoncer le théorème plus générale qu'on déduit du théorème précédent dans le cas où la fonction analytique F serait donnée aux environs de certaines valeurs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ des variables $x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots$ pour lesquelles elle est continue. Il suffit à cet objet d'appliquer le théorème démontré à la fonction F considérée comme fonction des nouvelles variables $x_1', x_2', \ldots, y_1', y_2', \ldots$ liées aux précédentes par des substitutions linéaires qui changent leurs valeurs nulles dans les valeurs $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$.

Naples, avril 1890.