

SU LA RAPPRESENTAZIONE APPROSSIMATA DI UNA FUNZIONE CONTINUA DI VARIABILE REALE O COMPLESSA PER COMBINAZIONI LINEARI DI ASSEGNATE FUNZIONI.

Memoria di **Filippo Sibirani** (Bologna).

Adunanza del 26 maggio 1912.

Della rappresentazione approssimata delle funzioni continue di variabile reale o complessa mediante combinazioni lineari di assegnate funzioni mi sono altra volta occupato in un lavoro ¹⁾ che indicherò, quando m'occorra, con [S].

Nella sua tesi di laurea il sig. L. TONELLI ²⁾ aveva poco prima ripreso lo studio dei polinomi d'approssimazione di TCHEBYCHEV, estendendo la considerazione loro alle funzioni di più variabili e alle funzioni di variabile complessa, e dei polinomi trigonometrici d'approssimazione. La diversità e la minore semplicità dei processi di dimostrazione nel caso dei polinomi trigonometrici in confronto a quelli usati per i polinomi razionali, mi suggerirono l'idea di vedere se le dimostrazioni usate da TONELLI per questi ultimi potessero valere anche per quelli, e lo studio della questione mi permise non solo di rispondere affermativamente ad essa, ma di estendere largamente quei risultati nel modo a cui ora accennerò.

n funzioni limitate e continue in $a \dots b$

$$(1) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

costituiscono un *sistema regolare* in detto intervallo quando il determinante

$$(2) \quad \begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \dots & \varphi_n(x_1) \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \dots & \varphi_n(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

è diverso da zero qualunque sia il sistema di n punti x_1, x_2, \dots, x_n di $a \dots b$.

Se le n funzioni (1) sono periodiche di periodo $b - a$, si dice che costituiscono un *sistema regolare* se il determinante (2) è diverso da zero per qualunque sistema di n valori x_1, x_2, \dots, x_n non congrui rispetto al modulo $b - a$.

¹⁾ F. SIBIRANI, *Sulla rappresentazione approssimata delle funzioni* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XVI (1909), pp. 203-221].

²⁾ L. TONELLI, *I polinomi d'approssimazione di TCHEBYCHEV* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo XV (1908), pp. 48-94].

Chiamando *combinazione lineare delle* (1) ogni espressione

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x)$$

ove p_1, p_2, \dots, p_n sono costanti, si può definire la *combinazione lineare delle* (1) di *approssimazione*, nello stesso modo dei polinomi di approssimazione, per una funzione $f(x)$ limitata e continua in $a \dots b$; si dimostra l'esistenza e l'unicità della combinazione lineare d'approssimazione se le (1) costituiscono un sistema regolare in $a \dots b$, e si dimostrano per codeste combinazioni lineari di approssimazione teoremi analoghi a quelli sui polinomi di approssimazione di TCHEBYCHEV.

Date n funzioni finite e continue in un campo A

$$(3) \quad \varphi_1(xy), \varphi_2(xy), \dots, \varphi_n(xy)$$

per le quali si suppone che il determinante

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1 y_1) & \varphi_2(x_1 y_1) & \dots & \varphi_n(x_1 y_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1(x_n y_n) & \varphi_2(x_n y_n) & \dots & \varphi_n(x_n y_n) \end{vmatrix}$$

non sia sempre nullo per qualsiasi sistema di n punti scelti in A , si possono definire le combinazioni lineari delle (3) di approssimazione per una data funzione $f(xy)$ limitata e continua in A ; se ne dimostra l'esistenza e si stabiliscono proposizioni analoghe a quelle valide per i polinomi razionali d'approssimazione.

Ed ancora si possono considerare per funzioni di variabili complesse le combinazioni lineari d'approssimazione di n assegnate funzioni: se esse costituiscono in un campo della variabile complessa un sistema regolare di n funzioni, valgono teoremi analoghi a quelli per i polinomi d'approssimazione.

Casi particolari delle combinazioni lineari d'approssimazione sono i polinomi razionali d'approssimazione o i polinomi trigonometrici di approssimazione. Invero un polinomio razionale è combinazione lineare delle funzioni $1, x, x^2, \dots, x^n$ le quali costituiscono in un qualunque intervallo un sistema regolare: un polinomio trigonometrico è combinazione lineare di $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx$ le quali in $-\pi \dots \pi$ costituiscono un sistema regolare ³⁾.

Il sig. CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN ha ripreso, sulla fine del 1910, lo studio dei polinomi d'approssimazione ⁴⁾ per una funzione reale limitata e continua sopra un gruppo qualunque chiuso o no di punti, ritrovando per altra via i risultati già contenuti nella memoria di TONELLI ed ottenendo alcuni altri belli risultati. È messa in evidenza l'importanza che nella quistione ha il polinomio di approssimazione in un gruppo di punti speciali in numero superiore di 2 al grado del polinomio: notevole la determinazione di una formola che offre un limite inferiore per l'approssimazione minima, che si può utilmente usare nella ricerca per approssimazione del polinomio d'approssimazione.

³⁾ Ciò risulta anche dalla mia Nota: *Sopra i polinomi trigonometrici ed un determinante relativo* [Giornale di Matematiche di Battaglini, vol. XLVII (1909), pp. 125-131].

⁴⁾ CH.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur les polynomes d'approximation et la représentation approchée d'un angle* [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1910, pp. 808-844].

In questo mio lavoro io dimostro, relativamente alle combinazioni di approssimazione di n assegnate funzioni, tutte le proposizioni contenute nella Nota suddetta, pervenendo a parecchie di esse con diversi procedimenti, ed altre proprietà di queste combinazioni aggiungo; metto poi in luce — più di quanto possa apparire da [S] — la portata dell'ipotesi che le n funzioni date formino un sistema regolare.

In una Nota successiva il DE LA VALLÉE POUSSIN ⁵⁾ si è occupato ancora dei polinomi d'approssimazione per le funzioni di variabile complessa. Anche queste proposizioni estendo qui alle combinazioni lineari di approssimazione di n assegnate funzioni. Dovendo citare i due lavori del DE LA VALLÉE POUSSIN, li indicherò ordinatamente con $[V_1]$ e con $[V_2]$.

Nell'ultima parte del presente lavoro, definisco la combinazione lineare di n assegnate funzioni di approssimazione per una data funzione e per le sue derivate fino ad un certo ordine, e ne dimostro l'esistenza. In quest'ordine di idee credo che nulla sia stato fatto: qui ne do, come ho detto, poco più della definizione, ma mi riservo di riprendere lo studio della quistione.

I.

1. Denoteremo con $f(x)$ una funzione reale continua e limitata in $a \dots b$.

Se $P_n(x)$ è una combinazione lineare delle (1), si dirà *residuo* di $f(x)$ relativo a $P_n(x)$ la differenza

$$r(x) = f(x) - P_n(x)$$

e si dirà residuo assoluto $|r(x)|$.

Se E è un insieme di punti di $a \dots b$ (in particolare l'intervallo totale) si dirà *approssimazione* di $P_n(x)$ in E il limite superiore dei residui assoluti in E . Si dirà *approssimazione minima* di $f(x)$ in E e si indicherà con ρ il limite inferiore dell'insieme delle approssimazioni della totalità delle combinazioni lineari $P_n(x)$. A meno che $f(x)$ non coincida con una combinazione lineare delle (1) in tutto E , è manifestamente $\rho > 0$.

Una combinazione lineare $P_n(x)$ è detta *combinazione lineare delle (1) di approssimazione* se la sua approssimazione è uguale all'approssimazione minima.

2. Una combinazione lineare $P_n(x)$ delle (1) *costituenti in E un sistema regolare* è determinata dai valori $P_n(x_1), P_n(x_2), \dots, P_n(x_n)$ che essa assume in n punti x_1, x_2, \dots, x_n di E , i suoi coefficienti ottenendosi col risolvere il sistema normale di equazioni

$$p_1 \varphi_1(x_i) + p_2 \varphi_2(x_i) + \dots + p_n \varphi_n(x_i) = P_n(x_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Una combinazione lineare $P_n(x)$ è dunque anche determinata quando si conoscono i residui di $f(x)$ relativi a P_n in n punti di E .

⁵⁾ Ch.-J. DE LA VALLÉE POUSSIN, *Sur les polynomes d'approximation à une variable complexe* [Bulletins de la classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1911, pp. 199-211].

Si prendano in E , ad arbitrio, n punti x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Indichiamo con $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, \dots, P_n^{(m)}, \dots$ una successione di combinazioni lineari delle n funzioni (1) in cui l'approssimazione tende a ρ , al tendere di m all'infinito, successione che, per definizione stessa di approssimazione minima, esiste. Indichiamo con $r_0^{(m)}, r_1^{(m)}, \dots, r_{n-1}^{(m)}$ i residui di $P_n^{(m)}$ rispettivamente in x_0, x_1, \dots, x_{n-1} ; essi possono considerarsi le coordinate di un punto di uno spazio S_n . L'insieme dei punti $I(r_0^{(m)}, r_1^{(m)}, \dots, r_{n-1}^{(m)})$ è limitato ed avrà un punto limite almeno $(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{n-1})$ in guisa che si potrà estrarre una successione di punti aventi per limite il punto $(\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{n-1})$ mentre che la corrispondente successione di combinazioni lineari

$$(4) \quad P_n^{(m_1)}, P_n^{(m_2)}, \dots, P_n^{(m_s)}, \dots$$

è tale che al tendere di m_s all'infinito l'approssimazione tende a ρ .

Se si osserva che i coefficienti $p_1^{(m_s)}, p_2^{(m_s)}, \dots, p_n^{(m_s)}$ di $P_n^{(m_s)}$ sono funzioni lineari di $r_0^{(m_s)}, r_1^{(m_s)}, \dots, r_{n-1}^{(m_s)}$, che sono tutte finite (cfr. [S], pag. 208), segue che esistono determinati e finiti i limiti di $p_h^{(m_s)}$ per $m_s = \infty$ e, chiamati questi π_h , che

$$\pi_1 \varphi_1(x) + \pi_2 \varphi_2(x) + \dots + \pi_n \varphi_n(x)$$

è il limite di (4), che avrà in x_0, x_1, \dots, x_{n-1} i residui $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_{n-1}$ e sarà combinazione lineare d'approssimazione.

Non costituiscano le (1) un sistema regolare in E . Se vi sono n punti in cui il determinante (2) è diverso da zero, la dimostrazione di dianzi vale ancora a provare l'esistenza della combinazione lineare d'approssimazione.

Non vi sia un sistema di n punti in cui il determinante (2) è diverso da zero: vi sarà un sistema di m punti $x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_m}$ con $n - 1 \geq m \geq 1$ in cui m funzioni $\varphi_{i_1}, \varphi_{i_2}, \dots, \varphi_{i_m}$ daranno luogo al determinante

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \varphi_{i_1}(x_{q_1}) & \varphi_{i_2}(x_{q_1}) & \dots & \varphi_{i_m}(x_{q_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i_1}(x_{q_m}) & \varphi_{i_2}(x_{q_m}) & \dots & \varphi_{i_m}(x_{q_m}) \end{vmatrix} \neq 0$$

mentre è nullo ogni determinante d'ordine $m + 1$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} \varphi_{i_1}(x_{q_1}) & \varphi_{i_2}(x_{q_1}) & \dots & \varphi_{i_m}(x_{q_1}) & \varphi_{\alpha_h}(x_{q_1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{i_1}(x_{q_m}) & \varphi_{i_2}(x_{q_m}) & \dots & \varphi_{i_m}(x_{q_m}) & \varphi_{\alpha_h}(x_{q_m}) \\ \varphi_{i_1}(x) & \varphi_{i_2}(x) & \dots & \varphi_{i_m}(x) & \varphi_{\alpha_h}(x) \end{vmatrix},$$

ove x è un qualunque punto di E distinto da $x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_m}$ e φ_{α_h} una qualunque delle rimanenti funzioni. È chiaro che se φ_{α_h} si annullasse in $x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_m}$ sarebbe in E identicamente nulla, giacchè dall'essere zero il determinante di dianzi si deduce $\varphi_{\alpha_h}(x) = 0$ qualunque sia la x di E .

Le due condizioni (5) e (6) fanno vedere che esiste un sistema di m numeri

Se moltiplichiamo ordinatamente le n equazioni per n numeri arbitrariamente scelti p_1, p_2, \dots, p_n e sommiamo, otteniamo

$$C_0 P_n(x_0) + C_1 P_n(x_1) + \dots + C_{n-1} P_n(x_{n-1}) = P_n(x_n)$$

se abbiamo posto

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x).$$

Si ha poi

$$(7) \quad \begin{cases} r(x_n) = f(x_n) - P_n(x_n) = f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1}) \\ \quad + C_0 r(x_0) + C_1 r(x_1) + \dots + C_{n-1} r(x_{n-1}), \end{cases}$$

cioè:

c) *I residui di una qualsivoglia combinazione lineare delle (1) in $n+1$ punti soddisfano ad una relazione lineare i cui coefficienti sono indipendenti dalla combinazione stessa.*

Ciò ci permette di calcolare facilmente l'approssimazione minima.

Poichè una combinazione lineare delle (1) è definita dai residui in n punti, si considererà la totalità delle combinazioni lineari considerando la totalità dei sistemi di n numeri r_0, r_1, \dots, r_{n-1} da prendere quali residui in x_0, x_1, \dots, x_{n-1} . Per ogni sistema di numeri r_0, r_1, \dots, r_{n-1} la (7) determina l'ulteriore residuo r_n : fra i numeri $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, r_n$ si deve scegliere il massimo modulo: è il minimo dell'insieme di questi massimi moduli che dà l'approssimazione minima ρ .

Ma poichè r_0, r_1, \dots, r_{n-1} sono variabili indipendenti ed r_n è funzione lineare di queste, il minimo accennato sarà il minimo modulo delle soluzioni delle 2^{n+1} equazioni che si ottengono da (7) ponendo $r_0 = \pm \xi, r_1 = \pm \xi, \dots, r_n = \pm \xi$.

Dunque ρ è il minimo dei 2^{n+1} numeri compresi nella formula

$$(8) \quad \left| \frac{f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1})}{\pm 1 \pm C_0 \pm C_1 \pm \dots \pm C_{n-1}} \right|.$$

Il minimo si avrà quando è massimo il denominatore, il che avverrà quando i segni di r_0, r_1, \dots, r_n sono alternati, essendo di segni alternati i numeri C_0, C_1, \dots, C_{n-1} . Concludiamo:

d) *La combinazione lineare $P_n(x)$ delle (1) d'approssimazione negli $n+1$ punti di E fornisce ivi dei residui uguali in modulo all'approssimazione minima e di segni alternati.*

Sono contenuti in questa proposizione i teoremi I e II del § 7, pp. 814, 815 di [V.] stabiliti dal DE LA VALLÉE POUSSIN per altra via. Osserviamo che le dimostrazioni usate da quest'ultimo possono servire anche nel caso delle combinazioni lineari da noi considerate. In particolare, per la dimostrazione per assurdo del Teorema II, ammessa la regolarità delle n funzioni (1) in $a \dots b$ ⁶⁾, basta sostituire al polinomio $(x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_\mu)$, considerato alla pag. 815, una combinazione lineare di μ funzioni $\varphi_{q_1}, \varphi_{q_2}, \dots, \varphi_{q_\mu}$ costituenti un sistema regolare nei punti in cui i resi-

⁶⁾ Colla nostra dimostrazione basta supporla in E .

dui si suppongono di segni alternati, la quale abbia in essi punti segni alternati. Questa combinazione avendo $\mu - 1$ radici ciascuna compresa fra due consecutivi dei detti μ punti e non potendo averne altre, ha, riguardo al segno, nei punti che precedono il primo e in quelli che seguono l'ultimo dei μ punti, le stesse proprietà dell'accennato polinomio.

La (8) fa vedere ancora che in un sol modo può avvenire che i residui siano a segni alternati, da cui discende:

e) Se una combinazione lineare delle (1) fornisce negli $n + 1$ punti di E $n + 1$ residui eguali in valor assoluto ma di segni alternati, essa è la combinazione lineare d'approssimazione; da cui segue che la combinazione lineare delle (1) d'approssimazione è unica.

Questa proposizione contiene il Teorema III della pag. 815 di $[V_1]$, ivi stabilita per altra via.

La (7) ci permette anche di stabilire il teorema:

f) Se nell'insieme E di $n + 1$ punti x_0, x_1, \dots, x_n alcuni di essi si avvicinano indefinitamente ad altri, l'approssimazione minima p tende a zero.

Siano, per fissare le idee, i punti x_{h-1} e x_{k-1} che tendono ai punti x_h e x_k . Si prendano $n - 1$ funzioni $\varphi_{\alpha_1}, \varphi_{\alpha_2}, \dots, \varphi_{\alpha_{n-1}}$ costituenti un sistema regolare in $x_0, x_1, \dots, x_{h-2}, x_h, x_{h+1}, \dots, x_{k-2}, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n$. Si considerino poi i due sistemi di equazioni

$$\begin{aligned} C_0 \varphi_{\alpha_i}(x_0) + C_1 \varphi_{\alpha_i}(x_1) + \dots + C_{h-2} \varphi_{\alpha_i}(x_{h-2}) + C_h \varphi_{\alpha_i}(x_h) + \dots \\ \dots + C_{k-2} \varphi_{\alpha_i}(x_{k-2}) + C_k \varphi_{\alpha_i}(x_k) + \dots + C_n \varphi_{\alpha_i}(x_n) = \varphi_{\alpha_i}(x_{h-1}) \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, n - 1$);

$$\begin{aligned} C'_0 \varphi_{\alpha_i}(x_0) + C'_1 \varphi_{\alpha_i}(x_1) + \dots + C'_{h-2} \varphi_{\alpha_i}(x_{h-2}) + C'_h \varphi_{\alpha_i}(x_h) + \dots \\ \dots + C'_{k-2} \varphi_{\alpha_i}(x_{k-2}) + C'_k \varphi_{\alpha_i}(x_k) + \dots + C'_n \varphi_{\alpha_i}(x_n) = \varphi_{\alpha_i}(x_{k-1}) \end{aligned}$$

($i = 1, 2, \dots, n - 1$).

È facile vedere che mentre C_h e C'_k tendono ad 1, gli altri C e C' tendono a zero al tendere di x_{h-1} a x_h e di x_{k-1} a x_k . Allora due relazioni analoghe alla (7) si deducono

$$(7') \left\{ \begin{aligned} r(x_{h-1}) &= f(x_{h-1}) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{h-2} f(x_{h-2}) - C_h f(x_h) - \dots \\ &\dots - C_{k-2} f(x_{k-2}) - C_k f(x_k) - \dots - C_n f(x_n) + C_0 r(x_0) + C_1 r(x_1) + \dots \\ &\dots + C_{h-2} r(x_{h-2}) + C_h r(x_h) + \dots + C_{k-2} r(x_{k-2}) + C_k r(x_k) + \dots + C_n r(x_n), \end{aligned} \right.$$

$$(7'') \left\{ \begin{aligned} r(x_{k-1}) &= f(x_{k-1}) - C'_0 f(x_0) - C'_1 f(x_1) - \dots - C'_{h-2} f(x_{h-2}) - C'_h f(x_h) - \dots \\ &\dots - C'_{k-2} f(x_{k-2}) - C'_k f(x_k) - \dots - C'_n f(x_n) + C'_0 r(x_0) + C'_1 r(x_1) + \dots \\ &\dots + C'_{h-2} r(x_{h-2}) + C'_h r(x_h) + \dots + C'_{k-2} r(x_{k-2}) + C'_k r(x_k) + \dots + C'_n r(x_n), \end{aligned} \right.$$

indicando con $r(x)$ il residuo di una combinazione lineare delle $n - 1$ funzioni dette dianzi.

Se dunque si pensa che x_{h-1} tenda ad x_h , e x_{k-1} a x_k , le due equazioni tendono

a divenire omogenee nei residui e ciò basta per vedere che l'approssimazione minima tende a zero.

Questa proposizione è dimostrata per i polinomi alla pag. 816 di $[V_1]$ per altra via.

4. Passiamo ora a dimostrare che, se le (1) non formano un sistema regolare in E , esistono infinite combinazioni d'approssimazione in E stesso per la $f(x)$.

Possono le (1) non formare in E un sistema regolare perchè tutte le funzioni si annullano negli stessi punti $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$; i residui in questi punti sono i valori che ivi assume $f(x)$: allora l'approssimazione minima sarà il massimo ρ degli r numeri $|f(x_{k_1})|, |f(x_{k_2})|, \dots, |f(x_{k_r})|$: epperò ogni combinazione lineare delle (1), che nei rimanenti punti di E ha residui uguali od inferiori a ρ , è combinazione lineare d'approssimazione.

Se negli $n - r + 1$ punti di E diversi da $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$ il determinante formato con i valori che in essi punti assumono $n - r + 1$ funzioni è diverso da zero, per ogni sistema di $n - r + 1$ numeri di modulo uguale od inferiore a ρ , v'ha una determinata combinazione lineare delle $n - r + 1$ funzioni dette sopra, la quale è di approssimazione.

Se poi non v'ha alcun gruppo di $n - r + 1$ funzioni in cui il determinante di dianzi sia diverso da zero, sia m la caratteristica della matrice formata scrivendo in $n - r + 1$ linee i valori delle n funzioni (1) rispettivamente negli $n - r + 1$ punti di E diversi da $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_r}$. Se diciamo E' l'insieme di questi $n - r + 1$ punti, si dimostra con lo stesso ragionamento già usato che per i punti di E' e quindi anche di E , i valori assunti da $n - m$ funzioni si esprimono linearmente per i valori assunti dalle rimanenti m funzioni in guisa che in E ogni combinazione delle (1) è sostituibile da una combinazione delle m funzioni; ed una combinazione di queste m funzioni da infinite combinazioni delle (1). Poichè delle m funzioni esiste una combinazione d'approssimazione in E per il teorema a) del n° 2, così è provato che anche in questo caso vi sono per la $f(x)$ infinite combinazioni di approssimazione.

Le funzioni (1) possono non formare in E un sistema regolare senza che avvenga che si annullino in uno o più punti di E stesso tutte le funzioni. Se, fatta la matrice coi valori che le n funzioni (1) hanno negli $n + 1$ punti di E , la caratteristica è $m \leq n - 1$ valgono considerazioni analoghe alle ultime fatte per dimostrare l'esistenza di infinite combinazioni lineari d'approssimazione. Se la caratteristica è n , siano $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ i punti relativamente ai quali si ha il determinante di n -esimo ordine diverso da zero. Allora il sistema di n equazioni in M_1, M_2, \dots, M_n

$$M_1 \varphi_i(x_0) + M_2 \varphi_i(x_1) + \dots + M_k \varphi_i(x_{k-1}) + M_{k+1} \varphi_i(x_{k+1}) + \dots + M_n \varphi_i(x_n) = \varphi_i(x_k)$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

ammette n soluzioni delle quali almeno una diversa da zero e non tutte diverse da zero. Moltiplicando le n equazioni per n numeri qualunque p_1, p_2, \dots, p_n e sommando, si ha

$$P_n(x_k) = M_1 P_n(x_0) + M_2 P_n(x_1) + \dots + M_k P_n(x_{k-1}) + M_{k+1} P_n(x_{k+1}) + \dots + M_n P_n(x_n),$$

essendo

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x).$$

Ne segue, ponendo, come altrove, $r_\beta = r(x_\beta)$,

$$\begin{aligned} r_k &= f(x) - P(x_k) \\ &= f(x) - \{M_1 f(x_0) + M_2 f(x_1) + \dots + M_k f(x_{k-1}) + M_{k+1} f(x_{k+1}) + \dots + M_n f(x_n)\} \\ &\quad + M_1 r_0 + M_2 r_1 + \dots + M_k r_{k-1} + M_{k+1} r_{k+1} + \dots + M_n r_n, \end{aligned}$$

cioè il residuo r_k è esprimibile linearmente per un numero (non nullo) di ulteriori residui che è inferiore ad n . I residui che compaiono effettivamente in questa formula ⁷⁾ siano $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \dots, r_{\alpha_m}$ con $0 < m \leq n-1$. Una combinazione di approssimazione si sa che esiste: siano $\bar{r}_0, \bar{r}_1, \dots, \bar{r}_n$ i residui relativi, ρ il massimo dei loro moduli. Ogni combinazione delle (1) che ha i residui $\bar{r}_{\alpha_1}, \bar{r}_{\alpha_2}, \dots, \bar{r}_{\alpha_m}$ ha in x_k il residuo \bar{r}_k , epperò ogni combinazione che ha i residui $\bar{r}_{\alpha_1}, \bar{r}_{\alpha_2}, \dots, \bar{r}_{\alpha_m}$ e negli $n-m$ punti $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_{n-m}}$ distinti da $x_k, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m}$ ha per residui $\eta_{\beta_1}, \eta_{\beta_2}, \dots, \eta_{\beta_{n-m}}$ ove questi ultimi hanno moduli non superiori a ρ , è combinazione d'approssimazione. Ma sempre si può determinare una combinazione d'approssimazione che in $x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_m}$ abbia i residui $\bar{r}_{\alpha_1}, \bar{r}_{\alpha_2}, \dots, \bar{r}_{\alpha_m}$ ed in $x_{\beta_1}, x_{\beta_2}, \dots, x_{\beta_{n-m}}$ abbia i residui $\eta_{\beta_1}, \eta_{\beta_2}, \dots, \eta_{\beta_{n-m}}$: dunque anche in questo caso sono infinite le combinazioni d'approssimazione.

Possiamo finalmente concludere:

g) *Condizione necessaria e sufficiente acciò che la $f(x)$ abbia nell'insieme E di $n+1$ punti un'unica combinazione lineare delle (1) di approssimazione è che le (1) costituiscano in E stesso un sistema regolare.*

5. Sia ora dato un insieme chiuso E di punti che contiene più di $n+1$ punti: le (1) costituiscono un sistema regolare in $a \dots b$. Sia $P_n(x)$ la combinazione d'approssimazione in E .

Allora sussiste la proposizione:

h) *la combinazione lineare delle (1) d'approssimazione in E è la combinazione lineare d'approssimazione in un insieme E' di $n+1$ punti di E scelti convenientemente e codesta combinazione è unica.*

Il residuo $r(x)$, cioè la differenza $f(x) - P_n(x)$, essendo funzione continua raggiunge in E il suo massimo e il suo minimo, i quali in valore assoluto sono uguali a ρ . Maggiori non lo possono essere evidentemente; ma neanche minori: invero, se ad es. i residui negativi avessero un modulo minore di $\rho' < \rho$, coll'aggiungere a $P_n(x)$ una combinazione lineare delle (1) che in tutto $a \dots b$ avesse segno positivo e valori non superiori a $\frac{\rho - \rho'}{2}$ si renderebbe l'approssimazione più piccola di ρ .

Percorrendo E da sinistra a destra, troveremo un primo punto x_0 in cui il residuo assoluto è ρ ; supponiamo sia $+\rho$. Dopo x_0 sia x , il primo punto ove il residuo è $-\rho$,

⁷⁾ Cioè che hanno un coefficiente non nullo.

dopo x_1 sia x_2 il primo punto dove il residuo è $+\rho$ e così via. Dico che i punti in cui si hanno residui alternativamente positivi e negativi sono almeno $n+1$. Non lo siano, se è possibile, e siano $m < n+1$ i punti x_0, x_1, \dots, x_{m-1} in cui si hanno residui in valore assoluto ρ e di segno alternato.

Si prenda una combinazione lineare P_m di m fra le n funzioni (1) la quale in x_0, x_1, \dots, x_{m-1} abbia valori di segno alternato, allora essa si annullerà nei punti $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{m-1}$ essendo ξ_i compreso fra x_{i-1} e x_i , e, non potendo avere più di $m-1$ radici, avrà negli intervalli $a \dots \xi_1, \xi_1 \dots \xi_2, \dots, \xi_{m-1} \dots b$ segni alternati. Fra a e ξ_1 il residuo sta al disopra di $-\rho$ per una quantità η_1 , fra ξ_1 e ξ_2 sta al disotto di $+\rho$ per una quantità η_2 , ... fra ξ_{m-1} e b starà al disopra di $-\rho$ o al disotto di $+\rho$ di una quantità η_m , a seconda che m è dispari o pari. Sia δ un numero più piccolo di $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ e sia ε un numero sufficientemente piccolo perchè sia

$$|\varepsilon P_m(x)| < \delta$$

e di tal segno che $\varepsilon P_m(x_0)$ abbia il segno negativo. Allora la combinazione lineare delle n funzioni (1)

$$P_n(x) + \varepsilon P_m(x)$$

fornisce in tutto E dei residui minori di ρ : quindi $P_n(x)$ non sarebbe la combinazione lineare d'approssimazione, contro il supposto.

Si può dunque trovare un insieme E' di $n+1$ punti in cui i residui sono di modulo ρ e di segni alternati, ma per il teorema e) del § 3 la combinazione lineare $P_n(x)$ è d'approssimazione in E' .

La $P_n(x)$ è l'unica combinazione di approssimazione in E . Invero se ce ne fosse un'altra $P'_n(x)$ non potrebbe avere in E' un'approssimazione $\rho' < \rho$, perchè ρ è l'approssimazione di $P_n(x)$, combinazione di approssimazione in E' ; $P_n(x)$ e $P'_n(x)$ hanno la stessa approssimazione ρ in E' , ma allora coincidono perchè la combinazione d'approssimazione in E' è unica.

Segue dal teorema dimostrato che:

i) In n punti almeno di $a \dots b$ vale l'eguaglianza $f(x) = P_n(x)$, cioè la combinazione d'approssimazione è determinata dai valori della funzione $f(x)$ in n convenienti punti.

6. Occupiamoci ora di determinare la combinazione lineare delle (1) di approssimazione in un insieme E di $n+1$ punti x_0, x_1, \dots, x_n .

Se le (1) costituiscono un sistema regolare in E , sappiamo già calcolare l'approssimazione minima ρ : di più dalla formula (7) si può determinare il segno del residuo in x_n colla condizione che sia il contrario di quello in x_{n-1} , epperò si possono conoscere, anche col segno, i residui e da ciò la combinazione d'approssimazione.

Con un sol sistema di equazioni lineari si possono determinare ed i residui e i coefficienti della combinazione di approssimazione. Designando con u l'unità di segno

associiamo le $n + 1$ combinazioni delle (1) stesse che prendono i valori di $f(x)$ negli $n + 1$ gruppi di n punti che si ottengono da E sopprimendo un punto.

Chiamiamo $L_n^{(i)}$ la combinazione lineare delle (1) che prende in $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ i valori $f(x_0), f(x_1), \dots, f(x_{i-1}), f(x_{i+1}), \dots, f(x_n)$.

Poniamo in generale

$$L_n^{(i)} = p_{i1} \varphi_1(x) + p_{i2} \varphi_2(x) + \dots + p_{in} \varphi_n(x).$$

È facile vedere che

$$p_{0k} = \frac{\alpha_0^{(k)}}{A_0}, \quad p_{1k} = \frac{\alpha_1^{(k)}}{A_1}, \quad \dots, \quad p_{ik} = \frac{\alpha_i^{(k)}}{A_i}, \quad \dots$$

Allora per la (11)

$$p_k = \frac{A_0 p_{0k} + A_1 p_{1k} + \dots + A_n p_{nk}}{A_0 + A_1 + \dots + A_n}.$$

Ora, poichè tutti i determinanti A_0, A_1, \dots, A_n sono positivi, si conclude che p_k ha un valore intermedio fra tutti i coefficienti di $\varphi_k(x)$ nelle combinazioni associate.

Se moltiplichiamo p_k per φ_k e sommiamo per $k = 1, 2, \dots, n$ si avrà

$$(12) \quad P_n(x) = \frac{A_0 L_n^{(0)} + A_1 L_n^{(1)} + \dots + A_n L_n^{(n)}}{A_0 + A_1 + \dots + A_n},$$

epperò:

j) Per qualunque valore di x di $a \dots b$, il valore della combinazione lineare delle (1) di approssimazione in E è intermedio fra quelli delle combinazioni lineari associate.

Se sottraggiamo la (12) dall'identità $f(x) = f(x)$, si avrà

$$r(x) = \frac{A_0 r^{(0)}(x) + A_1 r^{(1)}(x) + \dots + A_n r^{(n)}(x)}{A_0 + A_1 + \dots + A_n},$$

indicando, come al solito, con $r(x)$ il residuo dovuto alla $P_n(x)$ e con $r^{(h)}(x)$ quello dovuto alla combinazione $L_n^{(h)}$: dunque:

k) Il residuo dovuto alla combinazione lineare delle (1) di approssimazione in E è intermedio ai residui dovuti alle combinazioni associate.

In particolare in x_k sarà

$$r^{(k)}(x_k) \neq 0, \quad r^{(i)}(x_k) = 0 \quad \text{per } i \neq k, \quad r(x_k) = (-1)^k \rho u^8),$$

onde

$$(13) \quad (-1)^k \rho u = \frac{A_k r^{(k)}(x_k)}{A_0 + A_1 + \dots + A_n},$$

da cui facilmente si conclude:

I residui forniti da $L_n^{(0)}, L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(n)}$ rispettivamente in x_0, x_1, \dots, x_n sono di segno alternato e proporzionali a $\frac{1}{A_0}, \frac{1}{A_1}, \dots, \frac{1}{A_n}$.

La formula (13) fa poi vedere che, se $L_n^{(k)}$ è la combinazione lineare delle (1) che

⁸⁾ Essendo u l'unità del segno Δ .

dà il più gran residuo assoluto, è

$$\rho < \frac{|r^{(k)}(x_k)|}{n+1},$$

cioè:

l) *L'approssimazione minima è minore del quoziente per $n+1$ del più gran residuo assoluto fornito in E dalle combinazioni lineari associate.*

8. Se nel determinante Δ considerato al n° 6, alla prima colonna sostituiamo i valori che in x_0, x_1, \dots, x_n ha la differenza $f(x) - Q_n(x)$ essendo $Q_n(x)$ una combinazione lineare delle (1), il determinante non cambia di valore, perchè non si è fatto che aggiungere alla prima colonna una combinazione lineare delle altre n . Segue da ciò che l'approssimazione in E di $f(x)$ è quella stessa di $f(x) - Q_n(x)$. Supponiamo ora che $Q_n(x)$ abbia nei punti di E i residui r_0, r_1, \dots, r_n di segno alternato. Poichè

$$r_i = f(x_i) - Q_n(x_i),$$

sarà, per la formula (10),

$$\rho = u \frac{A_0 r_0 - A_1 r_1 + A_2 r_2 - \dots - (-1)^n A_n r_n}{A_0 + A_1 + \dots + A_n} = \frac{A_0 |r_0| + A_1 |r_1| + \dots + A_n |r_n|}{A_0 + A_1 + \dots + A_n},$$

da cui si vede che ρ è intermedio a $|r_0|, |r_1|, \dots, |r_n|$, onde il teorema:

m) *Se una combinazione lineare delle (1) $Q_n(x)$ fornisce negli $n+1$ punti di E dei residui di segno alternato, l'approssimazione minima sorpassa il più piccolo di questi residui assoluti.*

Vale ancora il teorema:

n) *Una combinazione lineare $Q_n(x)$ delle (1) di cui l'approssimazione è infinitamente vicina a ρ è infinitamente vicina alla combinazione $P_n(x)$ di approssimazione 9).*

Dal n° 6 sappiamo che il residuo in x_0 che dà la combinazione d'approssimazione è $u\rho$, ove ρ è l'approssimazione minima ed u è l'unità del segno di Δ , cioè del segno di

$$\Omega = f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1})$$

se n è pari, o del segno opposto se n è dispari. In ogni modo per la combinazione d'approssimazione si ha, per la (7),

$$u\rho = u|\Omega| - u\rho|C_0| - u\rho|C_1| - \dots - u\rho|C_{n-1}|.$$

Se per una combinazione lineare $Q_n(x)$ il residuo in alcuni punti $x_{q_1}, x_{q_2}, \dots, x_{q_m}$ si suppone di segno differente da quello della combinazione d'approssimazione negli stessi punti, si avrà per $r(x_{q_i})$ un aumento di modulo almeno uguale a $m\rho\delta$, se δ è il minimo modulo dei numeri C (minimo che certo è diverso da zero): se in qualche altro punto $x_{s_1}, x_{s_2}, \dots, x_{s_k}$ i residui di Q_n , pur essendo dello stesso segno dei residui negli stessi punti della combinazione d'approssimazione, si abbassano in modulo

9) Uso, per brevità, di questa locuzione, adoperata anche dal DE LA VALLÉE POUSSIN, e che potrebbe essere tacciata di imprecisione, per dire che, prefissato un numero ε positivo, piccolo a piacere, si può assegnare corrispondentemente un numero σ tale che quando l'approssimazione di $Q_n(x)$ differisce per meno di σ dall'approssimazione minima ρ , è ancora $|Q_n(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ in tutto a ... b.

di η , il modulo di $r(x_n)$ si aumenta di $k\eta\delta$ almeno. Da codesta osservazione risulta che se una combinazione lineare $Q_n(x)$ ha residui di segno diverso da quelli della combinazione d'approssimazione, o, pur avendoli dello stesso segno, li ha di modulo inferiore di una quantità η , la sua approssimazione differisce da ρ per una grandezza superiore ad una determinata.

Dunque, perchè una combinazione lineare $Q_n(x)$ abbia una approssimazione infinitamente vicina a ρ , è necessario e sufficiente che i residui di $Q_n(x)$ siano del segno di quelli della combinazione di approssimazione ed infinitamente vicini ad essi.

Poichè i coefficienti di $Q_n(x)$ sono funzioni continue dei suoi residui, essi saranno vicinissimi a quelli della combinazione di approssimazione $P_n(x)$, ossia sarà $Q_n(x)$ una combinazione lineare delle (1) vicinissima alla $P_n(x)$.

È chiaro che se le (1) non costituissero un sistema regolare, questa proposizione non si potrebbe stabilire.

9. Supponiamo ora che l'insieme E contenga più di $n + 1$ punti e sia chiuso o no: le (1) costituiscano un sistema regolare di funzioni in $a \dots b$.

Sia E' un insieme di $n + 1$ punti, ordinati per grandezza delle loro ascisse, in cui supponiamo che una combinazione lineare $Q_n(x)$ delle (1) abbia residui di segni alternati.

Dal primo teorema del paragrafo precedente sappiamo già che la combinazione d'approssimazione in E' ha un'approssimazione ρ' che supera il più piccolo dei residui assoluti di $Q_n(x)$ in E' ; l'approssimazione della combinazione d'approssimazione in E non può essere inferiore a ρ' , onde:

o) Se una combinazione d'approssimazione $Q_n(x)$ delle (1) dà in $n + 1$ punti di E ordinatamente residui di segni alternati, l'approssimazione minima ρ in E supera il minore dei residui assoluti di $Q_n(x)$ negli $n + 1$ punti detti.

Indichiamo ora con E' un insieme di $n + 1$ punti di E , insieme variabile, e supponiamo che $P'_n(x)$ sia la combinazione di approssimazione delle (1) in E' . È chiaro che l'approssimazione minima ρ' di $P'_n(x)$ varia al variare di E' : essa è dunque funzione dei punti di E' . Supponiamo che E' vari in guisa che ρ' non si discosti per più di un numero ϵ , prefissato piccolo a piacere, da ρ , approssimazione minima della combinazione d'approssimazione $P_n(x)$ in E . Intanto i punti consecutivi di E' manterranno fra loro una distanza che ha un limite inferiore maggiore di zero, pel teorema $f)$ del n° 3; da cui risulta che i coefficienti di $P'_n(x)$ sono funzioni continue dei punti di E' .

La combinazione lineare $P'_n(x)$, per avere un'approssimazione vicinissima all'approssimazione ρ' , avrà nei punti di E' residui vicinissimi ai residui che $P'_n(x)$ ha in E' stesso, dal che si conclude, per l'ultimo teorema del n° 8:

p) Una combinazione lineare delle (1) variabile $P'_n(x)$ che è d'approssimazione in un insieme E' di $n + 1$ punti di E con un'approssimazione ρ' infinitamente vicina a ρ , è una combinazione d'approssimazione infinitamente vicina a $P_n(x)$.

Dalla quale proposizione si deduce facilmente:

q) La combinazione lineare delle (1) di approssimazione è unica anche in un insieme E non chiuso.

10. Se l'insieme E ha un numero finito di punti $m > n + 1$ si possono determinare le approssimazioni delle combinazioni di approssimazione negli $\binom{m}{n+1}$ gruppi di $n + 1$ punti che si possono formare coi punti di E . Il massimo di codesta approssimazione è l'approssimazione minima in E .

Se l'insieme E è costituito dall'intervallo $a \dots b$ e le funzioni (1) sono derivabili, la determinazione dell'approssimazione minima ρ esige la risoluzione di sistemi di equazioni, che saranno, in generale, trascendenti se trascendente è la $f(x)$ o qualcuna delle (1).

Si riprenda la formula (10) che dà l'approssimazione minima ρ in un insieme di $n + 1$ punti $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ ed ivi si considerino x_0, x_1, \dots, x_n come le $n + 1$ coordinate di un punto nella porzione τ di spazio S_{n+1} definita da

$$a \leq x_0 < b, \quad x_0 < x_1 < b, \quad x_1 < x_2 < b, \quad \dots, \quad x_{n-1} < x_n \leq b.$$

Sarà allora ρ funzione di $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$: la determinazione del punto di massimo assoluto di ρ dà le ascisse dei punti in cui la combinazione lineare delle (1) di approssimazione ha per residui assoluti la sua approssimazione.

Mediante il sistema di $n + 1$ equazioni

$$(14) \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_0} = 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x_n} = 0$$

si determinano i massimi relativi: poi i massimi relativi sugli iperpiani che formano il contorno di τ mediante sistemi analoghi di equazioni: il massimo di questi massimi è l'approssimazione minima cercata.

In [S] alle pp. 216-218 è mostrato come la determinazione della combinazione di approssimazione si traduce in un problema algebrico se le funzioni (1), le loro derivate e la $f(x)$ sono esprimibili algebricamente per una funzione $\psi(x)$ monotona ed invertibile in $a \dots b$. I sistemi (14) ed analoghi si riducono in questo caso ad algebrici in $\psi(x_0), \psi(x_1), \dots, \psi(x_n)$: contengono quindi solo $n + 1$ incognite a differenza del sistema di equazioni da cui in [S] dipende tale determinazione che contiene $2n + 1$ incognite.

Merita conto indicare un metodo di approssimazione per il calcolo di codesta approssimazione minima, che si giustifica se le (1) hanno derivate limitate o per lo meno soddisfano alla nota condizione di LIPSCHITZ.

Sia E_m un insieme di m punti ($m > n + 1$) di $a \dots b$: si può allora determinare esattamente la combinazione di approssimazione in E_m che diremo $P_n^{(m)}(x)$ e la sua approssimazione ρ_m . La combinazione $P_n^{(m)}(x)$ è, come sappiamo, combinazione d'approssimazione in un conveniente insieme E'_m di $n + 1$ punti di E_m . Prendiamo un insieme $E_{m'}$ con $m' > m$, contenente i punti di E_m : la combinazione d'approssimazione $P_n^{(m')}(x)$ avrà un'approssimazione $\rho_{m'} \geq \rho_m$ ed avrà residui assoluti uguali a $\rho_{m'}$ in un insieme $E'_{m'}$ di $n + 1$ punti di $E_{m'}$.

Se pensiamo ad una successione di insiemi E_m ciascuno dei quali abbia più punti del precedente e contenga quelli del precedente, in guisa che al crescere indefinito di m

l'insieme tenda a divenire l'intervallo $a \dots b$, avremo una corrispondente successione di combinazioni di approssimazione $P_n^{(m)}(x)$ che saranno combinazioni d'approssimazione in insiemi E'_m di $n + 1$ punti ciascuno e le loro approssimazioni costituiranno una successione di numeri ρ_m non decrescenti che dico tendere a ρ .

Invero le combinazioni lineari $P_n^{(m)}(x)$, che si possono pensare costruite col metodo indicato mediante i residui $\pm \rho_m$ nei punti di E'_m che mantengono fra loro, qualunque sia m , una distanza superiore ad un numero positivo assegnabile, costituiscono una successione di funzioni egualmente continue ([S], pag. 208). Si deduce che ρ_m tende per m infinito a ρ e quindi, pel teorema penultimo del paragrafo 9, che $P_n^{(m)}(x)$ tende alla combinazione $P_n(x)$ di approssimazione in E .

Se il più grande residuo in E di $P_n^{(m)}(x)$ è $\rho_m + \varepsilon$, sarà

$$\rho_m \leq \rho \leq \rho_m + \varepsilon.$$

Ma ε sarà minore al massimo della somma delle due oscillazioni di $f(x)$ e $P_n^{(m)}(x)$ negli intervalli in cui $a \dots b$ resta decomposto dai punti di E'_m . Per la continuità di $f(x)$ e di $P_n^{(m)}(x)$ codesto ε si può far tanto piccolo quanto si vuole col prendere m abbastanza grande. Gli scostamenti dei residui assoluti di $P_n(x)$ nei punti di E'_m da quelli di $P_n^{(m)}(x)$ indichiamoli con $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n$, cosicchè i residui di $P_n(x)$ in E'_m saranno

$$u(\rho - \eta_0), -u(\rho - \eta_1), u(\rho - \eta_2), \dots$$

Ma ρ_m è l'approssimazione minima anche di $f(x) - P_n^{(m)}(x)$ in E'_m , onde applicando la (11), ivi introducendo le ascisse dei punti di E'_m ,

$$\rho_m = \frac{(\rho - \eta_0)A_0 + (\rho - \eta_1)A_1 + \dots + (\rho - \eta_n)A_n}{A_0 + A_1 + \dots + A_n},$$

da cui, essendo

$$\rho - \rho_m < \varepsilon,$$

si ottiene

$$A_0\eta_0 + A_1\eta_1 + \dots + A_n\eta_n < \varepsilon(A_0 + A_1 + \dots + A_n),$$

da cui si vede che le η sono piccole quantità con la piccolezza di ε .

II. Supponiamo che $f(x)$ sia una funzione pari e supponiamo che delle n funzioni (1) alcune siano pari e le altre dispari: costituiscano poi in $-a \dots a$ un sistema regolare. Per fissare le idee, supponiamo le prime m siano pari e le rimanenti dispari: porremo

$$P_n(x) = \Pi_m(x) + \Pi'_{n-m}(x),$$

ove sarà $\Pi_m(x)$ pari e Π'_{n-m} dispari.

Si voglia della funzione $f(x)$ la combinazione d'approssimazione in $-a \dots a$: sia ρ l'approssimazione minima. Allora è in $-a \dots a$

$$-\rho \leq f(x) - [\Pi_m(x) + \Pi'_{n-m}(x)] \leq \rho$$

e cambiando x in $-x$, poichè $f(x) = f(-x)$, $\Pi_m(-x) = \Pi_m(x)$, $\Pi'_{n-m}(-x) = -\Pi'_{n-m}(x)$, si ha

$$-\rho \leq f(x) - [\Pi_m(x) - \Pi'_{n-m}(x)] \leq \rho,$$

da cui, sommando e dividendo per 2,

$$-\rho \leq f(x) - \Pi_m(x) \leq \rho.$$

Questa doppia disuguaglianza fa vedere che $\Pi_m(x)$ è combinazione lineare delle (1) d'approssimazione: ma essa è unica, onde:

r) Se delle n funzioni (1) alcune sono pari e le rimanenti dispari, la combinazione lineare loro d'approssimazione per una funzione pari in un intervallo di cui l'origine è punto medio, contiene solo le funzioni pari.

Essa è la combinazione di approssimazione delle m funzioni pari nell'intervallo $0 \dots a$.

Sia la $f(x)$ una funzione dispari. In $-a \dots a$ sia $\Pi_m(x) + \Pi'_{n-m}(x)$ la combinazione lineare delle (1) di approssimazione: sarà

$$-\rho \leq f(x) - [\Pi_m(x) + \Pi'_{n-m}(x)] \leq \rho$$

ed anche

$$-\rho \leq -f(x) + \Pi_m(x) + \Pi'_{n-m}(x) \leq \rho.$$

Se sommiamo questa doppia disuguaglianza con la precedente in cui si è cambiato x in $-x$ e dividiamo per 2, abbiamo

$$-\rho \leq -f(x) + \Pi'_{n-m}(x) \leq \rho,$$

ciò che fa vedere essere $\Pi'_{n-m}(x)$ combinazione lineare delle (1) di approssimazione in $-a \dots a$ di $f(x)$; quindi, per l'unicità di codesta combinazione:

s) Se delle n funzioni (1) alcune sono dispari e le altre pari, la combinazione loro d'approssimazione per una funzione dispari in un intervallo di cui l'origine è punto medio, contiene solo le funzioni dispari.

Essa è la combinazione d'approssimazione delle $n - m$ funzioni dispari in $0 \dots a$.

In particolare si deduce:

t) Il polinomio d'approssimazione di un dato grado per una funzione pari in un intervallo $-a \dots a$ contiene solo le potenze pari e per una funzione dispari le potenze dispari.

Dicesi, com'è noto, polinomio trigonometrico d'ordine n un'espressione della forma

(15) $a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \dots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$
e, per analogia, può dirsi polinomio iperbolico un'espressione

(16) $a_0 + a_1 \operatorname{ch} x + b_1 \operatorname{sh} x + a_2 \operatorname{ch} 2x + b_2 \operatorname{sh} 2x + \dots + a_n \operatorname{ch} nx + b_n \operatorname{sh} nx.$

Se la (15) contiene solo i termini relativi ai seni, si dice polinomio trigonometrico dispari; se non contiene questi termini, dicesi polinomio trigonometrico pari: così l'espressione (16) si dirà polinomio iperbolico dispari o pari se contiene solamente o non contiene i termini relativi ai seni iperbolici.

È noto che ¹⁰⁾ a) il determinante di $(n+1)$ -esimo ordine formato con i valori che le funzioni $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$ assumono per n valori della variabile non è nullo se non quando v'ha qualche coppia di questi valori congrua rispetto a π ; b) il

¹⁰⁾ Si può, ad es., vedere: F. SIBIRANI, *Sopra due tipi di determinanti e sopra i polinomi trigonometrici ed iperbolici pari e dispari* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. XLV (1912), pp. 403-411].

determinante di n -esimo ordine formato con i valori che le funzioni $\text{sen} x, \text{sen} 2x, \dots, \text{sen} nx$ assumono per n valori della variabile non è nullo se fra questi numeri non v'ha lo zero od un multiplo di π o qualche coppia di numeri congrui rispetto a π : c) il determinante di $(n+1)$ -esimo ordine formato con i valori assunti dalle funzioni $1, \text{ch } x, \text{ch } 2x, \text{ch } 3x, \dots, \text{ch } nx$ per $n+1$ valori della variabile non è nullo se non quando si ha fra questi qualche coppia di numeri congrui rispetto al modulo πi ; d) il determinante di n -esimo ordine formato con i valori assunti dalle funzioni $\text{sh } x, \text{sh } 2x, \dots, \text{sh } nx$ per n valori della variabile non è nullo se non quando fra questi v'ha lo zero o multipli di πi o qualche coppia di numeri congrui rispetto al modulo πi .

Segue da ciò che formano un sistema regolare le $n+1$ funzioni

$$1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx$$

in $0 \dots \pi$; le $n+1$ funzioni

$$1, \text{ch } x, \text{ch } 2x, \dots, \text{ch } nx$$

in un qualunque intervallo reale; formano un sistema regolare le n funzioni

$$\text{sen } x, \text{sen } 2x, \dots, \text{sen } nx$$

in qualunque intervallo contenuto in $0 \dots \pi$ e le n funzioni

$$\text{sh } x, \text{sh } 2x, \dots, \text{sh } nx$$

in un qualunque intervallo positivo o negativo.

Negli intervalli detti valgono per i polinomi trigonometrici ed iperbolici pari e dispari di approssimazione tutte le proposizioni stabilite per le combinazioni lineari d'approssimazione di funzioni costituenti un sistema regolare. È anzi da osservare che se la $f(x)$ si annulla nell'origine, gli intervalli relativamente ai polinomi trigonometrici od iperbolici dispari possono contenere l'origine.

E in seguito alle considerazioni fatte in principio del presente paragrafo, si può asserire:

u) Il polinomio trigonometrico d'approssimazione per una funzione $f(x)$ pari (dispari) in $-\pi \dots \pi$ è il polinomio trigonometrico pari (dispari) d'approssimazione in $0 \dots \pi$: il polinomio iperbolico di approssimazione per una funzione $f(x)$ pari (dispari) in un qualunque intervallo reale $-a \dots a$ è il polinomio iperbolico pari (dispari) d'approssimazione in $0 \dots a$.

12. Sia

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

di cui $f_1(x)$ funzione pari e $f_2(x)$ funzione dispari: delle n funzioni (1) siano ancora le prime m pari e le altre dispari e costituiscano in $-a \dots a$ un sistema regolare.

Sia $\Pi_m(x)$ la combinazione d'approssimazione in $-a \dots a$ di $f_1(x)$ e $\Pi_{n-m}(x)$ quella di $f_2(x)$ pure in $-a \dots a$. Abbiamo scritto $\Pi_m(x)$ e $\Pi_{n-m}(x)$ a rammentare che la prima contiene solo le prime m funzioni e la seconda le rimanenti $n-m$ funzioni. Dico che vale il teorema:

v) L'approssimazione minima di $f(x)$ in $-a \dots a$ non può essere inferiore alle approssimazioni minime di $f_1(x)$ e $f_2(x)$, nè maggiore della loro somma.

Invero, se ρ' e ρ'' sono le dette due approssimazioni minime si ha

$$\begin{aligned} -\rho' &\leq f_1(x) - \Pi_m(x) \leq \rho', \\ -\rho'' &\leq f_2(x) - \Pi_{n-m}(x) \leq \rho'', \end{aligned}$$

da cui, sommando,

$$-(\rho' + \rho'') \leq f(x) - [\Pi_m(x) + \Pi_{n-m}(x)] \leq \rho' + \rho'',$$

dal che si vede che la combinazione delle (1) $\Pi_m + \Pi_{n-m}$ ha un'approssimazione non superiore a $\rho' + \rho''$, in guisa che la seconda parte del teorema resta senz'altro provata.

Indichiamo ora con $P_m(x) + P_{n-m}(x)$ la combinazione d'approssimazione delle (1) di $f(x)$ in $-a \dots a$ e supponiamo, se è possibile, che la sua approssimazione ρ sia minore di ρ' e ρ'' . Allora si avrebbe

$$-\rho \leq f_1(x) + f_2(x) - [P_m(x) + P_{n-m}(x)] \leq \rho$$

e cambiando x in $-x$

$$-\rho \leq f_1(x) - f_2(x) - [P_m(x) - P_{n-m}(x)] \leq \rho$$

e sommando e dividendo per due

$$-\rho \leq f_1(x) - P_m(x) \leq \rho,$$

ossia $P_m(x)$ avrebbe rispetto a $f(x)$ un'approssimazione minore di ρ' , ciò che non può essere.

E si avrebbe ancora

$$-\rho \leq -f_1(x) - f_2(x) + P_m(x) + P_{n-m}(x) \leq \rho$$

e sommando con la seconda delle precedenti disuguaglianze e dividendo per 2

$$-\rho \leq -f_2(x) + P_{n-m}(x) \leq \rho,$$

da cui si dedurrebbe che $P_{n-m}(x)$ avrebbe rispetto a $f_2(x)$ un'approssimazione minore di ρ'' , ciò che non può avvenire.

Di questa proposizione si può approfittare per risolvere una quistione analoga a quella trattata da DE LA VALLÉE POUSSIN nella seconda parte della sua Memoria. Egli determina un limite inferiore dell'approssimazione dell'ordinata ad una linea poligonale mediante un polinomio di grado x : ci si può porre analoga quistione relativamente ai polinomi trigonometrici d'ordine n . Riserbandomi di studiarla, accenno qui che essa si può ridurre alla ricerca del limite inferiore dell'approssimazione nella rappresentazione mediante polinomi trigonometrici pari e dispari in $0 \dots \pi$ della funzione $y = x$.

L'ordinata all'angolo formato con le due rette per l'origine di coefficienti angolari $a + b$ ed $a - b$ è rappresentata da

$$a|x| + bx.$$

L'approssimazione minima di un polinomio trigonometrico in $-\pi \dots \pi$ {ogni altro intervallo $-a \dots a$ si può ridurre a questo ([V_1], pag. 832)} non è inferiore alla maggiore delle due approssimazioni del polinomio trigonometrico pari d'approssimazione della funzione ax e del polinomio trigonometrico dispari d'approssimazione della funzione bx nell'intervallo $0 \dots \pi$, giusta all'ultimo teorema dimostrato.

13. Notiamo ancora che le proprietà messe in evidenza da DE LA VALLÉE POUSSIN per il polinomio d'approssimazione di grado n della funzione $\sqrt[n]{x}$ in un intervallo $0 \dots a$ ($a > 0$), sono comuni ai polinomi d'approssimazione di grado n di qualunque funzione $\sqrt[m]{x}$ con m numero intero positivo qualsivoglia, ed il modo di stabilirle è identico; perciò le enunciamo senz'altro:

w) Il polinomio di grado n d'approssimazione in $0 \dots a$ ($a > 0$) di $\sqrt[m]{x}$ ha tutti i suoi coefficienti differenti da zero: il coefficiente di x ed il termine noto sono positivi ed a segni alternati gli altri.

x) L'insieme degli $n+2$ punti in cui il polinomio precedente è d'approssimazione è unico e comprende gli estremi 0 ed a .

y) Il termine noto è l'approssimazione minima.

Se p è un numero intero maggiore di n e primo con m valgono ancora i seguenti teoremi che si stabiliscono in modo analogo ai precedenti ¹¹⁾:

w') Il polinomio di grado n d'approssimazione in $0 \dots a$ ($a > 0$) per la funzione $\sqrt[p]{x^m}$ ha tutti i suoi coefficienti diversi da zero, a segni alternati in guisa che sia positivo il coefficiente di x^n .

x') L'insieme degli $n+2$ punti in cui il polinomio precedente è di approssimazione è unico e comprende gli estremi 0 ed a .

y') Il termine noto è l'approssimazione minima moltiplicata per $(-1)^n$.

Identiche proprietà sussistono per i polinomi di grado n d'approssimazione per la funzione x^p ove p è un numero intero superiore ad n .

II.

14. Sia $f(x)$ una funzione della variabile complessa x in un campo D ed ivi limitata e continua.

Siano

$$(17) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

n funzioni della variabile complessa x , limitate e continue in D .

Si possono considerare le combinazioni lineari delle (17)

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x)$$

e dare definizioni analoghe alle date al n° 1 per *residuo*, *residuo assoluto* di $f(x)$ relativamente a $P_n(x)$; per *approssimazione* di $P_n(x)$ in un insieme E di punti di D in numero infinito o finito di punti maggiore di n ; per *approssimazione minima* di $f(x)$ in E ; per *combinazione lineare* delle (17) di *approssimazione* in E .

Cogli stessi metodi usati al n° 2, si dimostra:

¹¹⁾ Si confronti [V_1], pp. 842-843.

a) In ogni insieme E di punti del campo D esiste una combinazione lineare d'approssimazione delle (17), costituiscano queste o no un sistema regolare in E .

L'insieme E sia costituito da $n+1$ punti x_0, x_1, \dots, x_n : se le (17) costituiscono in E un sistema regolare, fra i residui in essi punti passa ancora la relazione

$$(18) \quad \begin{cases} r(x_n) = f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1}) \\ \quad + C_0 r(x_0) + C_1 r(x_1) + \dots + C_{n-1} r(x_{n-1}), \end{cases}$$

ove i numeri C_0, C_1, \dots, C_{n-1} hanno gli stessi significati che nella formula (7).

Tenendo presente quanto abbiamo sviluppato al n° 3, è facile vedere che l'approssimazione minima sarà il minimo modulo delle soluzioni delle infinite equazioni che si ottengono sostituendo a $r(x_0), r(x_1), \dots, r(x_{n-1}), r(x_n)$ numeri di egual modulo: ponendo $r(x_k) = e^{i\theta_k} \xi$ ove ξ è un numero reale positivo, i moduli di codeste soluzioni sono tutti compresi nella formula

$$\left| \frac{f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1})}{e^{i\theta_n} - C_0 e^{i\theta_0} - C_1 e^{i\theta_1} - \dots - C_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}} \right|.$$

Se poniamo

$$-C_k = \lambda_k e^{i\mu_k},$$

si avrà il massimo modulo per il denominatore della frazione quando tutti gli addendi avranno lo stesso argomento, cioè quando

$$(19) \quad \mu_0 + \theta_0 = \mu_1 + \theta_1 = \dots = \mu_{n-1} + \theta_{n-1} = \theta_n.$$

Ma, tenendo conto della (18), e ponendo

$$f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1}) = A e^{i\omega},$$

dovrà essere

$$\xi e^{i\theta_n} = A e^{i\omega} + \xi(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1}) e^{i\theta_n},$$

da cui

$$(20) \quad \begin{cases} \theta_n = \omega & \text{se } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} < 1, \\ \theta_n = \omega + \pi & \text{se } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} > 1. \end{cases}$$

Poichè la determinazione degli argomenti θ si può fare in un sol modo, si deduce che unico è il sistema dei residui se questi debbono ridursi in modulo all'approssimazione minima e che questa è

$$\rho = \frac{|f(x_n) - C_0 f(x_0) - C_1 f(x_1) - \dots - C_{n-1} f(x_{n-1})|}{1 + |C_0| + |C_1| + \dots + |C_{n-1}|}.$$

Si può concludere che:

b) La combinazione lineare delle (17) d'approssimazione in $n+1$ punti in cui costituiscono un sistema regolare è unica.

I coefficienti di essa combinazione si deducono dal sistema normale di n equazioni lineari

$$\begin{aligned} f(x_k) - \rho e^{i\theta_k} &= p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x_k) + \dots + p_n \varphi_n(x_k) \\ (k &= \text{ad } n \text{ qualunque numeri fra } 0, 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

Con ragionamento identico a quello usato in fine del n° 3, si dimostra che:

c) Se nell'insieme E di $n + 1$ punti x_0, x_1, \dots, x_n alcuni di essi si avvicinano indefinitamente ad altri l'approssimazione minima tende a zero.

Le considerazioni del n° 4 si possono ripetere anche rispetto alle funzioni (17) e quindi asserire che:

d) Condizione necessaria e sufficiente acciò che in E la combinazione lineare delle (17) d'approssimazione sia unica è che le (17) stesse formino in E un sistema regolare.

Se per la determinazione dei coefficienti p_1, p_2, \dots, p_n della combinazione $P_n(x)$ d'approssimazione in E si considera il sistema di $n + 1$ equazioni, analogo al (9),

$$f(x_k) = \rho e^{i\theta_k} + p_1 \varphi_1(x_k) + p_2 \varphi_2(x_k) + \dots + p_n \varphi_n(x_k) \quad (k=0, 1, 2, \dots, n),$$

ove gli argomenti θ_k sono quelli determinati dalle (19) e (20) e se ai simboli $A_0, A_1, \dots, \alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)}, \dots$ si danno gli stessi significati del n° 6, è facile vedere appunto per le (19) e (20) e per le evidenti relazioni fra i numeri C_0, C_1, \dots e gli A_0, A_1, \dots che se $L_n^{(0)}, L_n^{(1)}, \dots, L_n^{(n)}$ sono le combinazioni lineari delle (17) associate, valgono le relazioni seguenti, analoghe a quelle trovate relativamente alle funzioni reali,

$$P_n(x) = \frac{|A_0|L_n^{(0)} + |A_1|L_n^{(1)} + \dots + |A_n|L_n^{(n)}}{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_n|},$$

$$r(x) = \frac{|A_0|r^{(0)}(x) + |A_1|r^{(1)}(x) + \dots + |A_n|r^{(n)}(x)}{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_n|},$$

$$\rho = \frac{|A_k|r^{(k)}(x_k)|}{|A_0| + |A_1| + \dots + |A_n|}, \quad \rho < \frac{|r^{(k)}(x_k)|}{n+1}.$$

La proposizione prima del n° 8 ha qui per corrispondente:

e) Se una combinazione lineare $Q_n(x)$ delle (17) ha negli $n + 1$ punti di E residui di argomenti che differiscono per uno stesso numero (diverso da 2π) dagli argomenti dei residui della combinazione d'approssimazione, l'approssimazione minima sorpassa il più piccolo dei moduli dei residui di $Q_n(x)$.

15. Con dimostrazione analoga a quella del Teorema IV del § 2 di $[V_2]$, pag. 202, si dimostra:

f) La combinazione d'approssimazione delle (17) in un insieme E di un numero limitato di punti fornisce dei residui assoluti uguali a ρ in $n + 1$ punti almeno di E .

Tenendo presente che due combinazioni lineari delle (17) costituenti un sistema regolare coincidono se coincidono i loro valori in $n + 1$ punti, con dimostrazione analoga a quella del Teorema V del § 2 di $[V_2]$, pp. 202-203, si prova che:

g) La combinazione di approssimazione delle (17) in un insieme E di un numero limitato di punti è unico.

E così con dimostrazione analoga a quella del Teorema VI del § 2 di $[V_2]$, pag. 203, si prova che:

h) La combinazione d'approssimazione delle (17) in un insieme E di un numero limitato di punti è ancora di approssimazione in un insieme E' di tutti i punti di E ove il residuo assoluto è ρ .

Un ragionamento analogo a quello usato alla pag. 204 di $[V_2]$ prova che:

i) Se una successione di combinazioni lineari delle (17) $P_n^{(1)}, P_n^{(2)}, \dots, P_n^{(k)}, \dots$ fornisce in E le approssimazioni successive $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$ tendenti verso ρ , $P_n^{(k)}$ tende verso la combinazione d'approssimazione P_n .

Di qui segue:

l) Date due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$, le due combinazioni lineari delle (17) $P_n^{(1)}$ e $P_n^{(2)}$ di approssimazione in E sono infinitamente vicine se lo sono le due funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

Essendo sempre E costituito da un numero finito di punti e le (17) costituendo un sistema regolare di n funzioni, indichiamo con

$$(21) \quad x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_\mu$$

i punti di un insieme E' appartenenti ad E ove la combinazione lineare delle (17) di approssimazione in E è pure di approssimazione; e μ sia ridotto al minimo possibile ¹²⁾. In tutti questi punti il modulo di $r(x)$ è ρ : invero E' contiene almeno $n+1$ punti ove $|r(x)| = \rho$: se in qualcuno dei rimanenti punti fosse $|r(x)| < \rho$, $P_n(x)$ sarebbe d'approssimazione in quella parte di E' in cui $|r(x)| = \rho$ e quindi μ non sarebbe ridotto al minimo.

Per la (18) sussistono le relazioni

$$r(x_k) = f(x_k) - \Phi + C_0 r(x_0) + C_1 r(x_1) + \dots + C_{n-1} r(x_{n-1}) \quad (k = n, n+1, \dots, \mu),$$

ove, per brevità, abbiamo fatto

$$C_0 f(x_0) + C_1 f(x_1) + \dots + C_{n-1} f(x_{n-1}) = \Phi;$$

ossia, posto $r(x_k) = \rho e^{i\theta_k}$,

$$f(x_k) - \Phi = \rho(e^{i\theta_k} - C_0 e^{i\theta_0} - C_1 e^{i\theta_1} - \dots - C_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}) \quad (k = n, n+1, \dots, \mu).$$

Queste equazioni insieme con le

$$\rho = \left| \frac{f(x_k) - \Phi}{e^{i\theta_k} - C_0 e^{i\theta_0} - C_1 e^{i\theta_1} - \dots - C_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}} \right| \quad (k = n, n+1, \dots, \mu)$$

costituiscono $2\mu - 2n + 2$ equazioni che debbono essere atte a dare le $\mu + 2$ quantità $\rho, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_\mu$.

Ora è chiaro che, se fosse $2\mu - 2n + 2 > \mu + 2$ cioè $\mu > 2n$, alcune di queste equazioni per essere compatibili dovrebbero essere conseguenza delle altre, epperò il minimo numero di punti di E' sarà minore od uguale a $2n + 1$. Possiamo quindi concludere:

m) La combinazione lineare delle (17) di approssimazione in E che contiene un numero limitato di punti superiore a $2n + 1$ è anche d'approssimazione in un insieme E' di $n + 1$ punti almeno e di $2n + 1$ punti di E al più, scelti in modo che l'approssimazione abbia il più grande valore possibile.

Per i polinomi questa proposizione è dimostrata in $[V_2]$ per altra via.

La determinazione della combinazione di approssimazione conoscendo i punti in

¹²⁾ Vale a dire: se P_n è d'approssimazione in un insieme di punti di E che comprende E' lo è pure in E' e la combinazione d'approssimazione in una parte di E' non è d'approssimazione in E' .

cui $r(x)$ raggiunge il massimo modulo non dipende da equazioni di 1° grado se non quando questo numero di punti si riduca ad $n + 1$.

16. Supponiamo ora che l'insieme E sia costituito da un'infinità di punti di D od in particolare da D stesso.

Valgono le proposizioni:

n) Se l'insieme E è chiuso, la combinazione lineare delle (17) di approssimazione in E è la combinazione lineare delle (17) di approssimazione in un insieme E' di $2n + 1$ punti al più, scelti in modo che l'approssimazione abbia il più gran valore.

Si dimostra come il Teorema X del § 3 di $[V_2]$ alle pp. 206-207.

o) La combinazione lineare delle (17) di approssimazione in un insieme chiuso E è unica e fornisce dei residui assoluti eguali a ρ in $n + 1$ punti almeno di E .

Questa combinazione lineare delle (17) è unica perchè coincide con la combinazione d'approssimazione nell'insieme E' del teorema precedente e questo è unico [teorema g)]. Essa dà almeno $n + 1$ residui uguali a ρ in virtù del teorema f).

Con dimostrazione analoga a quella del Teorema XII del § 3 di $[V_2]$, pag. 207, si prova che:

p) La combinazione lineare delle (17) di approssimazione è unica anche in un insieme non chiuso E .

Una generalizzazione del teorema l) è la seguente:

q) I coefficienti della combinazione lineare delle (17) di approssimazione in un insieme E qualunque, chiuso o no, variano in modo continuo quando si deforma con continuità la $f(x)$.

Finiamo con l'enunciare il teorema seguente, per la cui dimostrazione si veggano le pp. 209-210 di $[V_2]$:

Condizione necessaria e sufficiente acciò che una combinazione lineare delle (17) sia di approssimazione in un insieme E di μ punti x_1, x_2, \dots, x_μ ($\mu \geq n + 1$), ove $r(x)$ ha il modulo ρ , è che non esista alcuna combinazione lineare delle (17) $Q_n(x)$ tale che i quozienti

$$\frac{Q_n(x_k)}{r_n(x_k)} \quad (k = 1, 2, \dots, \mu)$$

abbiano la loro parte reale positiva e non nulla: ossia che, detti $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_\mu$ gli argomenti di $r(x_1), r(x_2), \dots, r(x_\mu)$, non esista nessuna combinazione lineare $Q_n(x)$ i cui valori in x_1, x_2, \dots, x_μ abbiano argomenti $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_\mu$ tutti soddisfacenti alla relazione

$$|\varphi_k - \theta_k| < \frac{\pi}{2}.$$

III.

17. Per definire la combinazione lineare di assegnate funzioni di approssimazione per una funzione $f(x)$ e per le sue derivate fino ad un certo ordine, è necessario premettere qualche considerazione.

Rappresentino $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n variabili reali in un insieme E di punti di uno spazio S_n . Siano $\varphi_1(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \varphi_2, \dots, \varphi_k$, k funzioni limitate, definite in E : siano L_1, L_2, \dots, L_k i limiti superiori, l_1, l_2, \dots, l_k i limiti inferiori rispettivamente.

Si considerino le due funzioni

$$G(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^k (L_i - \varphi_i),$$

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^k (\varphi_i - l_i).$$

Esse ammetteranno i limiti inferiori positivi o nulli Γ e γ , ed esisteranno due punti almeno (teorema di WEIERSTRASS) P_G e P_g in ogni intorno dei quali i limiti inferiori di G e g sono rispettivamente Γ e γ .

Se le coordinate di P_G e P_g sono rispettivamente $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_n)$ e $(\alpha''_1, \alpha''_2, \dots, \alpha''_n)$, se si considera l'intorno di P_G definito da $\alpha'_i - b \leq \alpha_i \leq \alpha'_i + b$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ed in esso i limiti inferiori delle funzioni $L_i - \varphi_i$, questi tenderanno, al tendere a zero di b , a k numeri positivi o nulli $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_k$, e si avrà

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_k.$$

In modo analogo i limiti inferiori delle funzioni $\varphi_i - l_i$ nell'intorno di P_g definito da $\alpha''_i - b \leq \alpha_i \leq \alpha''_i + b$ ($i = 1, 2, \dots, n$) tenderanno, al tendere a zero di b , a k numeri positivi o nulli $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, e si avrà

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_k.$$

Posto

$$\Lambda_i = L_i - \Gamma_i,$$

$$\lambda_i = l_i + \gamma_i,$$

diremo $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k)$ il *gruppo limite superiore* delle k funzioni in E , e diremo $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ il *gruppo limite inferiore* delle stesse funzioni in E .

Se le k funzioni sono continue nei punti P_G e P_g le funzioni $L_i - \varphi_i$ ed $\varphi_i - l_i$ prendono i valori Γ_i e γ_i rispettivamente, cioè le funzioni φ_i i valori Λ_i e λ_i : si diranno allora $(\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k)$ *gruppo massimo* e $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ *gruppo minimo* delle k funzioni.

18. Posto ciò, consideriamo in $a \dots b$ una funzione $f(x)$ limitata essa e le derivate successive fino all'ordine k e l'ultima continua.

Siano

$$(22) \quad \varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$$

n funzioni costituenti in $a \dots b$ un sistema regolare, limitate esse e le loro derivate fino all'ordine k e queste ultime continue.

Sia $P_n(x)$ una qualunque combinazione lineare delle (22)

$$P_n(x) = p_1 \varphi_1(x) + p_2 \varphi_2(x) + \dots + p_n \varphi_n(x)$$

ed indichiamo con $r(x)$ il residuo, cioè $f(x) - P_n(x)$: sarà $\frac{dr}{dx}$ il residuo di $\frac{df}{dx}$ relativo a $\frac{dP_n}{dx}$ e così $\frac{d^i r}{dx^i}$ il residuo di $\frac{d^i f}{dx^i}$ relativo a $\frac{d^i P_n}{dx^i}$.

Indichiamo con $R^{(0)}, R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ i limiti superiori dei moduli di $r(x), \frac{dr}{dx}, \dots, \frac{d^k r}{dx^k}$ rispettivamente in un insieme E di punti di $a \dots b$: essi saranno funzioni di p_1, p_2, \dots, p_n .

Si consideri delle k funzioni

$$R^{(0)}(p_1, p_2, \dots, p_n), R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$$

il gruppo limite inferiore $r^{(0)}, r^{(1)}, \dots, r^{(k)}$ che diremo il *gruppo delle approssimazioni minime* di $f(x), \frac{df}{dx}, \dots, \frac{d^k f}{dx^k}$.

Se l'insieme E è chiuso (in particolare, tutto $a \dots b$), $R^{(0)}, R^{(1)}, \dots, R^{(k)}$ sono i massimi dei moduli di $r(x), \frac{dr}{dx}, \dots, \frac{d^k r}{dx^k}$. Se $\rho^{(0)}$ è l'approssimazione minima, come è stata definita al n° 1, di $f(x)$ relativa alle combinazioni lineari delle (22), $\rho^{(i)}$ quella di $\frac{d^i f}{dx^i}$ relativa alle combinazioni lineari delle

$$\frac{d^i \varphi_1}{dx^i}, \frac{d^i \varphi_2}{dx^i}, \dots, \frac{d^i \varphi_n}{dx^i},$$

sarà

$$r^{(0)} \geq \rho^{(0)}, r^{(1)} \geq \rho^{(1)}, \dots, r^{(k)} \geq \rho^{(k)}.$$

Se una combinazione lineare delle (22) $P_n(x)$ è tale che la sua approssimazione relativa a $f(x)$ sia $r^{(0)}$, quella di $\frac{d^i P_n}{dx^i}$ relativa a $\frac{d^i f}{dx^i}$ sia $r^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), si dice che la $P_n(x)$ è la *combinazione lineare delle (22) di approssimazione per la $f(x)$ e le sue prime k derivate*.

Analoghe definizioni si possono fare per le combinazioni d'approssimazione per una funzione di variabile complessa e per una funzione di più variabili.

Il ragionamento fatto in principio del § 2 ci permette di asserire che:

In ogni insieme E di $a \dots b$ esiste una combinazione lineare delle (22) di approssimazione per $f(x)$ e le sue k prime derivate.

Bologna, 11 maggio 1912.

FILIPPO SIBIRANI.