

# Integraleigenschaften der adjungirten Kegelfunctionen.

Von

G. LEONHARDT in Stettin.

Im 18<sup>ten</sup> Bande dieser Zeitschrift, Heft 2, pag. 195 ff. hat Herr Neumann ausgehend von Formeln, welche die Kegelfunctionen  $K_q^{(\mu)}$  und  $L_q^{(\mu)}$  durch nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihen ausdrücken, einige Integralformeln über ein Product von Kegelfunctionen gegeben. Es liegt nun der Gedanke nahe zu untersuchen, ob sich nicht ähnliche Integrale über ein Product von adjungirten Kegelfunctionen finden lassen, also Integrale von den Formen

$$\int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} d\mu \quad \text{und} \quad \int_{-1}^{+1} K_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} d\mu.$$

Mit der Herleitung dieser und ähnlicher Formeln beschäftigt sich die folgende Untersuchung. Was die Bezeichnung anlangt, so werde ich der des Herrn Neumann folgen und mir nur die Aenderung gestatten, den Ausdruck  $2 \cos i\vartheta - 2 \cos \omega$ , nicht wie Herr Neumann mit  $\psi$ , sondern Herrn Mehler folgend mit  $\tau$  zu bezeichnen.

Zu Grunde lege ich den folgenden Untersuchungen die beiden Formeln, welche Herr Neumann § 3. der erwähnten Abhandlung als Formel (19) und (20) bezeichnet hat. Differentiirt man Formel (20)

$j$ -mal nach  $\mu$ , multiplicirt beiderseits mit  $(1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}}$ , gebraucht die abkürzende Bezeichnung  $K_{qj}^{(\mu)}$  für  $(1 - \mu^2)^{\frac{j}{2}} K_q^{(j)}(\mu)$  und wendet schliesslich Formel (19) an auf das Argument

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1) \\ &= \mu \mu_1 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos (\varphi - \varphi_1), \end{aligned}$$

so erhält man

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad C_q K_{qj}^{(\mu)} &= \frac{2}{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{(-1)^n N}{N^2 + q^2} P_{nj}^{(\mu)} \\ (2) \quad C_q L_q^{(\cos \gamma)} &= \frac{2}{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{N}{N^2 + q^2} P_n^{(\cos \gamma)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{wo } N = n + \frac{1}{2} \\ &\text{und } C_q = \frac{1}{\cos q\pi i}. \end{aligned}$$

Multiplicirt man das Product beider Formeln mit  $\cos j\varphi d\mu d\varphi$ , integrirt nach  $\mu$  von  $-1$  bis  $+1$  und nach  $\varphi$  von  $0$  bis  $2\pi$ , setzt abkürzend

$$(3) \quad P_{nj}^{(\mu)} \cos j\varphi = C_{nj}^{(\mu, \varphi)},$$

$$(4) \quad K_{qj}^{(\mu)} \cos j\varphi = \mathfrak{C}_{qj}^{(\mu, \varphi)},$$

führt die Integration auf der rechten Seite aus, bringt den auftretenden Bruch  $\frac{1}{(N^2 + q^2)(N^2 + \bar{q}^2)}$  auf die Form  $\frac{1}{q^2 - \bar{q}^2} \left[ \frac{1}{N^2 + q^2} - \frac{1}{N^2 + \bar{q}^2} \right]$  und drückt die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen durch Kegelfunctionen aus, so gelangt man zu der Formel

$$\begin{aligned} (I) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} L_q^{(\cos \gamma)} \mathfrak{C}_{qj}^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi &= \frac{4}{q^2 - \bar{q}^2} \left[ \frac{\mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_{\bar{q}}} \right] \\ &= \frac{4}{q^2 - \bar{q}^2} [\mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos q\pi i - \mathfrak{C}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos \bar{q}\pi i]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man das Product der Formeln (1) und (2) nicht mit  $\cos j\varphi d\mu d\varphi$ , sondern mit  $\sin j\varphi d\mu d\varphi$  und setzt abkürzend

$$(5) \quad P_{nj}^{(\mu)} \sin j\varphi = S_{nj}^{(\mu, \varphi)},$$

$$(6) \quad K_{qj}^{(\mu)} \sin j\varphi = \mathfrak{S}_{qj}^{(\mu, \varphi)},$$

so gelangt man durch dieselben Rechnungen zu der Formel

$$\begin{aligned} (II) \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} L_q^{(\cos \gamma)} \mathfrak{S}_{qj}^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi &= \frac{4}{q^2 - \bar{q}^2} \left[ \frac{\mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_{\bar{q}}} \right] \\ &= \frac{4}{q^2 - \bar{q}^2} [\mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos q\pi i - \mathfrak{S}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos \bar{q}\pi i]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man ferner Formel (I) mit  $\alpha_j$  und (II) mit  $\beta_j$ , wo  $\alpha_j$  und  $\beta_j$  beliebige, nur von  $j$  abhängige Constante bedeuten, addirt die beiden Formeln, summirt nach  $j$  von  $0$  bis  $\infty$  und setzt, analog wie in der Theorie der Kugelfunctionen der Ausdruck

$$(7) \quad \sum_0^{\infty} P_{nj}^{(\mu)} (\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi) \text{ mit } Y_n^{(\mu, \varphi)}$$

bezeichnet wird, den hier auftretenden Ausdruck

$$3) \quad \sum_0^{\infty} K_{qj}^{(\mu)} (\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi) = \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)},$$

3) gelangt man zu der Formel

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} L_q^{(\cos \gamma)} \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi &= \frac{4}{q^2 - q^2} \left[ \frac{\mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_q} - \frac{\mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)}}{C_q} \right] \\ &= \frac{4}{q^2 - q^2} [\mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos q\pi i - \mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)} \cos q\pi i], \end{aligned}$$

welche Formel der aus der Theorie der Kugelfunctionen bekannten Formel

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} P_n^{(\cos \gamma)} Y_n^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n^{(\mu_1, \varphi_1)}$$

völlig analog gebildet ist. Es liegt nun nahe, ebenso wie man die Function  $Y_n^{(\mu, \varphi)}$  die allgemeine Kugelfunction nennt, die hier eingeführte Function

$$3) \quad \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} = \sum_0^{\infty} K_q^{(\mu)} [\alpha_j \cos j\varphi + \beta_j \sin j\varphi]$$

als „allgemeine Kegelfunctionen“ zu bezeichnen.

Aus den Formeln (I) bis (III) erhält man drei weitere Formeln, wenn man beiderseits mit  $C_q \cos q\vartheta dq$  multiplicirt und nach  $q$  von 0 bis  $\infty$  integrirt. Dann tritt auf den linken Seiten das Glied

$$\int_0^{\infty} C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q\vartheta dq = \frac{1}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \gamma}}$$

auf, und man erhält

$$\text{(Ia)} \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{E}_{qj}^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \gamma}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2 - q^2} \left[ \mathfrak{E}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} - \mathfrak{E}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \frac{C_q}{C_q} \right] dq,$$

$$\text{(IIa)} \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{E}_{qj}^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \gamma}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2 - q^2} \left[ \mathfrak{E}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} - \mathfrak{E}_{qj}^{(\mu_1, \varphi_1)} \frac{C_q}{C_q} \right] dq,$$

$$\text{IIIa)} \quad \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \frac{\mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} d\mu d\varphi}{\sqrt{2 \cos i\vartheta - 2 \cos \gamma}} = 4 \int_0^{\infty} \frac{\cos q\vartheta}{q^2 - q^2} \left[ \mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)} - \mathfrak{Y}_q^{(\mu_1, \varphi_1)} \frac{C_q}{C_q} \right] dq.$$

Um nun zu weiteren Formeln zu gelangen, gehen wir aus von der Formel (I). Entwickeln wir nämlich das dort auftretende  $L_q^{(\cos \gamma)}$  nach dem Additionstheorem (die hier nicht abgeleiteten Formeln und

die angewendeten Bezeichnungen finden sich sämmtlich in der erwähnten Abhandlung des Herrn Neumann), so ist

$$(10) \quad L_q^{(\cos \gamma)} = \sum_0^{\infty} \varepsilon_j E_{qj} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu_1)} \cos j(\varphi - \varphi_1)$$

[Voraussetzung  $\mu < \mu_1$ ], wo  $\varepsilon_j$  eine Constante bedeutet, welche  $= 1$  ist für  $j = 0$  und  $= 2$  für  $j = 1, 2, 3, \dots$  und

$$(11) \quad E_{qj} = \frac{(-1)^j}{q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1}},$$

wo

$$(12) \quad \begin{cases} q_1 &= q^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2, \\ q_3 &= q^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2, \\ \vdots & \vdots \\ q_{2j-1} &= q^2 + \left(\frac{2j-1}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Setzt man diese Entwicklung in (I) ein, führt die Integration nach  $\varphi$  aus, bringt die von  $\mu$  freien Glieder auf eine Seite und wendet die Formel, welche für beliebige Werthe von  $\mu_1$  gilt, wenn nur  $\mu_1 > \mu$ , für  $\mu_1 = 1$  an, so ergibt sich, wenn man für  $K_q^{(j)}(1)$  und  $E_{qj}$  ausserdem ihre Werthe setzt,

$$(IV) \quad \int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} d\mu = \frac{2(-1)^j}{\pi(q^2 - q^2)} \left[ \frac{q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1}}{C_q} - \frac{q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1}}{C_q} \right] \\ = \frac{2(-1)^j}{\pi(q^2 - q^2)} [q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1} \cdot \cos q\pi i - q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1} \cdot \cos q\pi i],$$

welche Formel für  $j = 0$  in die von Herrn Neumann § 3., (25) abgeleitete Formel

$$(IVa) \quad \int_{-1}^{+1} L_q^{(\mu)} K_q^{(\mu)} d\mu = \frac{2}{\pi(q^2 - q^2)} \left[ \frac{1}{C_q} - \frac{1}{C_q} \right] = \frac{2|\cos q\pi i - \cos 0\pi i|}{\pi(q^2 - q^2)},$$

übergeht, womit die gesuchte Integralformel über ein Product von adjungirten Kegelfunctionen gefunden ist.

Wird in (IV)  $q = q$ , so ergibt sich

$$(V) \quad \int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} d\mu = (-1)^{j+1} \cdot q_1 \cdot q_3 \cdots q_{2j-1} \cdot \frac{i \sin q\pi i}{q},$$

welche Formel für  $j = 0$  in die von Herrn Neumann § 3., (26) abgeleitete Formel

$$a) \quad \int_{-1}^{+1} L_q^{(\mu)} K_q^{(\mu)} d\mu = - \frac{i \sin q \pi i}{q}$$

ergeht, und hieraus endlich für  $q = 0$

$$b) \quad \int_{-1}^{+1} L_0^{(\mu)} K_0^{(\mu)} d\mu = \pi.$$

Aus dieser Formel folgt eine einfache Relation. Drückt man nämlich nach Formel (1) und (2) die Kegelfunctionen  $K_0^{(\mu)}$  und  $L_0^{(\mu)}$  durch die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihen aus und führt die Integration aus, so ergibt sich

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{N^3} = \frac{\pi^3}{4} \quad \text{oder} \quad \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$$

Setzt man in (V) erst  $q = 0$  und dann  $j = 0$ , so erhält man

$$c) \quad \int_{-1}^{+1} L_{0j}^{(\mu)} K_{0j}^{(\mu)} d\mu = \left(-\frac{1}{2}\right)^j [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2j-1)]^2 \cdot \pi,$$

welche Formel für  $j = 0$  wiederum in (Vb) übergeht.

Nach analoger Methode, müsste man nun erwarten, liessen sich

die Integrale von den Formen  $\int_{-1}^{+1} L_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu)} d\mu$  und  $\int_{-1}^{+1} K_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} d\mu$

ableiten. Diese Integralwerthe erscheinen jedoch in der unbestimmten Form  $\infty - \infty$  (man erhält diese Formeln, wenn man in (I) das dort auftretende  $L_q^{(\cos \gamma)}$  unter der Voraussetzung  $\mu > \mu_1$  nach dem Additionstheorem entwickelt), und in der That verlieren diese Integrale im allgemeinen ihre Bedeutung. Denn da, wie Herr Neumann § 4., 10) zeigt, hat,  $L_q^{(\mu)}$  für  $\mu = 1$  unendlich wird wie  $\log(1 - \mu)$ , so wird  $L_{qj}^{(j)}(\mu)_{\mu=1}$  unendlich wie  $(1 - \mu)^{-j}$ , also  $(L_{qj}^{(\mu)})_{\mu=1}$  unendlich wie

$-\mu)^{-\frac{j}{2}}$ , mithin das Product  $(L_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu)})_{\mu=1}$  und ebenso das Product  $(K_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)})_{\mu=-1}$  unendlich wie  $(1 - \mu)^{-j}$  resp. wie  $(1 + \mu)^{-j}$ , so dass das Integral von  $\mu = -1$  bis  $\mu = +1$  ausgedehnt über diese Producte für  $\geq 1$  ebenfalls einen unendlich grossen Werth annimmt. Der Fall  $j = 0$  ist von Herrn Neumann § 3., 28) abgeleitet worden. Das dortige Resultat erscheint zwar auch in der unbestimmten Form  $\infty - \infty$ ; hier jedoch gelingt es, diese Unbestimmtheit aufzuheben. In Betreff der analogen Formeln, in denen das Product  $L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)}$  vorkommt, findet

diese Bemerkung keine Anwendung, da hier das Unendlichwerden des einen Factors durch das Nullwerden des anderen compensirt wird. Diese Bemerkung verdanke ich einer brieflichen Mittheilung des Herrn Mehler.

- - - - -

Die hier eingeführte allgemeine Kegelfunction  $\mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)}$  gestattet eine Kürzung der Aufgabe, die electriche Vertheilung auf einem Conoide zu bestimmen. Diese Aufgabe ist in ihrer einfachsten Form bereits von Herrn Mehler durch die Methode der reciproken Radii vectores gelöst worden; die allgemeinere Aufgabe hat Herr Neumann § 10. der erwähnten Abhandlung dadurch gelöst, dass für die Dichtigkeit  $\kappa$  der Belegung eine gewisse Entwicklung gesetzt wird; diese ist nun nichts anderes als eine Entwicklung nach allgemeinen Kegelfunctionen. Herr Neumann setzt nämlich\*):

$$\kappa = \tau \sqrt{\tau} F(\vartheta, \varphi), \text{ wo } \tau = 2 \cos i \vartheta - 2 \cos \omega \quad \text{und} \quad \vartheta, \omega, \varphi$$

die dipolaren Coordinaten eines Punktes sind, und macht für  $F(\vartheta, \varphi)$  den Ansatz

$$F(\vartheta, \varphi) = \int_0^\pi \sum_0^\infty \{ \alpha_j \cos q \vartheta + \gamma_j \sin q \vartheta \} \cos j \varphi \\ + \{ \beta_j \cos q \vartheta + \delta_j \sin q \vartheta \} \sin j \varphi \} dq.$$

Setzt man nun

$$(a) \quad \alpha_j \cos q \vartheta + \gamma_j \sin q \vartheta = K_{qj}^{(\mu)} f_{qj}^{(\varphi)},$$

$$(b) \quad \beta_j \cos q \vartheta + \delta_j \sin q \vartheta = K_{qj}^{(\mu)} \varphi_{qj}^{(\varphi)},$$

so wird

$$F(\vartheta, \varphi) = \int_0^\pi \sum_0^\infty K_{qj}^{(\mu)} (f_{qj}^{(\varphi)} \cos j \varphi + \varphi_{qj}^{(\varphi)} \sin j \varphi) dq.$$

Der Summenausdruck ist aber nichts anderes als eine allgemeine Kegelfunction  $\mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)}$  d. h. die Dichtigkeit  $\kappa$  ist in eine nach allgemeinen Kegelfunctionen fortschreitende Reihe entwickelt von der Form

---

\*) Die nähere Ausführung hat Herr Neumann in der erwähnten Abhandlung nicht gegeben. Ich entnehme sie einer Vorlesung desselben und habe auch in meiner Dissertation „Ueber die Vertheilung der Electricität auf einem durch Rotation zweier Kreisbogen um die gemeinschaftliche Sehne entstehenden Körper; Halle 1881“ dieselbe Methode angewandt, um die Vertheilung der Electricität auf einer Conoidschale zu bestimmen.

$$\kappa = \tau \sqrt{\tau} \int_0^x \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} dq.$$

Nun ist das Potential  $V$  eines Conoides

$$V = \int_{\vartheta=-\infty}^{\vartheta=+\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \kappa T d\sigma,$$

wo  $\kappa$  die Dichtigkeit,  $T$  die reciproke Entfernung zwischen einem beliebigen Punkte und einem Punkte des Conoids, und  $d\sigma$  ein Flächenelement ist.

Entwickelt man nun  $\kappa$  nach allgemeinen Kegelfunctionen, wobei ein Integral nach  $q$  von 0 bis  $\infty$  auftritt, und setzt man für  $T$  seinen Ausdruck in Kegelfunctionen, wobei noch ein solches Integral auftritt, so ist zunächst der Werth des Integrals

$$(c) \quad \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_0^{\infty} \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} dq \int_0^x C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_1) dq \right\} d\varphi$$

zu ermitteln, wo

$$(d) \quad \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} = \sum_0^{\infty} K_{qj}^{(\mu)} (f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi),$$

$$(e) \quad \begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \omega \cos \omega_1 + \sin \omega \sin \omega_1 \cos (\varphi - \varphi_1) \\ &= \mu \mu_1 + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu_1^2} \cos (\varphi - \varphi_1). \end{aligned}$$

Das dreifache Integral in der Klammer kann man nun nach den Formeln, welche Herr Neumann § 6. unter B, B', B'' gegeben hat, in ein einfaches verwandeln, wenn man setzt

$$(f) \quad f_{qj}^{(\vartheta)} = \alpha_j \cos q\vartheta + \gamma_j \sin q\vartheta,$$

$$(g) \quad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \beta_j \cos q\vartheta + \delta_j \sin q\vartheta.$$

Entwickelt man ausserdem  $L_q^{(\cos \gamma)}$  nach Kegelfunctionen, führt die Integration nach  $\varphi$  aus und setzt abkürzend

$$(h) \quad \left. \begin{aligned} p_{qj}^{(\mu)} &= C_q E_{qj} L_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} \\ \pi_{qj}^{(\mu)} &= C_q E_{qj} (K_{qj}^{(\mu)})^2 \end{aligned} \right\},$$

wo  $C_q = \frac{1}{\cos q \pi i}$  und  $E_{qj}$  die bei dem Additionstheorem der Kegelfunctionen auftretende Constante ist, so erhält man nach einigen Rechnungen, deren Einzelheiten ich hier übergehe,

$$\begin{aligned}
 \text{(VI)} \quad & \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_0^\infty \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} dq \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_1) \right\} d\varphi \\
 &= 2\pi^2 \sum_j \int_0^\infty p_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu_1)} [f_{qj}^{(\vartheta_1)} \cos j \varphi_1 + \varphi_{qj}^{(\vartheta_1)} \sin j \varphi_1] dq \\
 & \quad \text{wenn } \omega_1 < \omega \text{ also } \mu < \mu_1, \\
 &= 2\pi^2 \sum_j \int_0^\infty \pi_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu_1)} [f_{qj}^{(\vartheta_1)} \cos j \varphi_1 + \varphi_{qj}^{(\vartheta_1)} \sin j \varphi_1] dq \\
 & \quad \text{wenn } \omega < \omega_1 \text{ also } \mu_1 < \mu.
 \end{aligned}$$

Unter Benutzung der letzten Formel lässt sich nun die Vertheilung der Electricität auf einem Conoide leicht bestimmen. Man setze nämlich voraus, dass, ebenso wie sich die electricische Dichtigkeit auf einer Kugel in eine nach allgemeinen Kugelfunctionen fortschreitende Reihe entwickeln lässt, sich hier die Dichtigkeit nach allgemeinen Kegelfunctionen entwickeln lasse, dass man also setzen kann

$$\text{(k)} \quad \kappa = \tau \sqrt{\tau} \int_0^\infty \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} dq = \tau \sqrt{\tau} \sum_j \int_0^\infty K_{qj}^{(\mu)} [f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j \varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j \varphi] dq.$$

Ferner ist

$$\text{(l)} \quad d\sigma = \frac{4a^2 \sin \omega d\vartheta d\varphi}{\tau},$$

$$\text{(m)} \quad T = \frac{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau_a}}{2a} \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_a) dq,$$

folglich das Potential  $V_a$  des Conoids auf einen äusseren Punkt  $\vartheta_a, \omega_a, \varphi_a$

$$\begin{aligned}
 V_a &= \int_{\vartheta=-\infty}^{+\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \kappa T d\sigma \\
 &= 2a \sin \omega \sqrt{\tau_a} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta \int_0^\infty \mathfrak{Y}_q^{(\mu, \varphi)} dq \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_a) dq \right\} d\varphi,
 \end{aligned}$$

und unter Benutzung der eben gefundenen Formel (VI)

$$\text{(n)} \quad V_a = 4a\pi^2 \sin \omega \sqrt{\tau_a} \sum_j \int_0^\infty p_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu_a)} [f_{qj}^{(\vartheta_a)} \cos j \varphi_a + \varphi_{qj}^{(\vartheta_a)} \sin j \varphi_a] dq,$$

also das Oberflächenpotential



$$(o) \quad \bar{V} = 4a\pi^2 \sin \omega \sqrt{\tau} \sum_0^\infty \int_0^\infty p_{qj}^{(\mu)} K_{qj}^{(\mu)} [f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi] dq.$$

Ebenso erhält man das Potential  $V_j$  des Conoids auf einen inneren Punkt  $\vartheta_j$ ,  $\omega_j$ ,  $\varphi_j$  unter Benutzung von (VI), wo jetzt aber  $\mu_1 < \mu$  ist,

$$(p) \quad V_j = 4a\pi^2 \sin \omega \sqrt{\tau_j} \sum_0^8 \pi_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu_j)} [f_{qj}^{(\vartheta_j)} \cos j\varphi_j + \varphi_{qj}^{(\vartheta_j)} \sin j\varphi_j] dq,$$

also das Oberflächenpotential

$$(q) \quad \bar{V} = 4a\pi^2 \sin \omega \sqrt{\tau} \sum_0^\infty \int_0^\infty \pi_{qj}^{(\mu)} L_{qj}^{(\mu)} [f_{qj}^{(\vartheta)} \cos j\varphi + \varphi_{qj}^{(\vartheta)} \sin j\varphi] dq.$$

Nun ist bei der Green'schen Function

$$(r) \quad \bar{V} = \frac{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau_\alpha}}{2\alpha} \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_\alpha) dq \text{ für einen äusseren} \\ \text{Centralpunkt } \vartheta_\alpha, \omega_\alpha, \varphi_\alpha,$$

$$(s) \quad \bar{V} = \frac{\sqrt{\tau} \sqrt{\tau_i}}{2\alpha} \int_0^\infty C_q L_q^{(\cos \gamma)} \cos q (\vartheta - \vartheta_i) dq \text{ für einen inneren} \\ \text{Centralpunkt } \vartheta_i, \omega_i, \varphi_i,$$

und zwar ist

$$\omega_\alpha < \omega < \omega_i \quad \text{oder} \quad \mu_i < \mu < \mu_\alpha.$$

Durch Vergleichung der bezüglichen Formeln für  $\bar{V}$  erhält man also im Falle der Green'schen Belegung

$$(VIIa) \quad f_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\alpha} \varepsilon_j E_{qj}}{8a^2 \pi^2 \sin \omega p_{qj}^{(\mu)}} \frac{L_{qj}^{(\mu)}}{K_{qj}^{(\mu)}} K_{qj}^{(\mu_\alpha)} \cos q (\vartheta - \vartheta_\alpha) \cos j\varphi_\alpha,$$

$$(VIIb) \quad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_\alpha} \varepsilon_j E_{qj}}{8a^2 \pi^2 \sin \omega p_{qj}^{(\mu)}} \frac{L_{qj}^{(\mu)}}{K_{qj}^{(\mu)}} K_{qj}^{(\mu_\alpha)} \cos q (\vartheta - \vartheta_\alpha) \sin j\varphi_\alpha$$

oder

$$(VIIIa) \quad f_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_i} \varepsilon_j E_{qj}}{8a^2 \pi^2 \sin \omega \pi_{qj}^{(\mu)}} \frac{K_{qj}^{(\mu)}}{L_{qj}^{(\mu)}} L_{qj}^{(\mu_i)} \cos q (\vartheta - \vartheta_i) \cos j\varphi_i,$$

$$(VIIIb) \quad \varphi_{qj}^{(\vartheta)} = \frac{C_q \sqrt{\tau_i} \varepsilon_j E_{qj}}{8a^2 \pi^2 \sin \omega \pi_{qj}^{(\mu)}} \frac{K_{qj}^{(\mu)}}{L_{qj}^{(\mu)}} L_{qj}^{(\mu_i)} \cos q (\vartheta - \vartheta_i) \sin j\varphi_i.$$

Setzt man hier noch die Werthe von  $p_{qj}^{(\mu)}$  und  $\pi_{qj}^{(\mu)}$  aus (h) und (i) ein und substituirt die Werthe von  $f_{qj}^{(\vartheta)}$  und  $\varphi_{qj}^{(\vartheta)}$  in die Entwicklung

für  $\alpha$ , so erhält man, wenn man  $f(\vartheta)$  und  $\varphi(\vartheta)$  aus den Formeln (VII) nimmt, die einem äusseren Centralpunkte entsprechende Dichtigkeit der Green'schen Belegung, und, wenn man sie aus (VIII) nimmt, die einem inneren Centralpunkte entsprechende Dichtigkeit, und zwar erhält man genau dieselben Formeln, wie Herr Neumann sie § 10. der erwähnten Abhandlung gefunden hat. Vertauscht man endlich in  $f(\vartheta)$  und  $\varphi(\vartheta)$  der Formeln (VII)  $\vartheta$  mit  $\vartheta_a$  und in den Formeln (VIII)  $\vartheta$  mit  $\vartheta_j$  und setzt die hieraus folgenden Werthe von  $p_{qj}^{(u)}/f(\vartheta_a)$  und  $p_{qj}^{(u)}\varphi(\vartheta_a)$  in die Formel für  $V_a$  und die von  $\pi_{qj}^{(u)}/f(\vartheta_j)$  und  $\pi_{qj}^{(u)}\varphi(\vartheta_j)$  in die Formel für  $V_j$  ein, so ergeben sich die Green'schen Functionen in einem äusseren resp. inneren Punkte, und zwar erhält man genau dieselben Formeln, wie Herr Neumann sie § 10. der erwähnten Abhandlung gegeben hat. Eben dieselben Ausdrücke habe ich auch in meiner Dissertation als Specialfälle der Conoidschale gefunden.

Diese Methode lässt sich natürlich auch ohne weiteren Aufwand an Formeln auf eine Conoidschale anwenden, worauf ich jedoch hier verzichte.

Stettin, 10. Januar 1882.

---