SULLA RISOLUZIONE DELLE EQUAZIONI DEL QUINTO GRADO.

HERMITE — SUR LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Comptes Rendus —. N. 11. Mars. 1858.

1.° In una nota « Sulle equazioni del moltiplicatore ec. » inserita nel 3.° fascicolo di questi Annali abbiamo dimostrato che le radici quadrate delle radici della equazione del moltiplicatore corrispondente ad una trasformazione d'ordine n primo, si ponno esprimere linearmente per $\frac{n+1}{2}$ quantità A_0, $A_1 \ldots A_{\frac{n-1}{2}}$. Considerando per ora in particolare l'equazione del sesto grado:

$$(1) \qquad z^6 + a_1 z^5 + a_2 z^4 + \ldots + a_5 z + a_6 = 0$$

corrispondente alla trasformazione di quinto ordine, ed indicando con z_1, $z_2 \ldots z_6$ le radici della medesima si avranno le:

$$(2)\left\{\begin{array}{lll} \sqrt{z_1} = A_0\sqrt{5}, & \sqrt{z_2} = A_0 + A_1 + A_2, & \sqrt{z_3} = A_0 + \alpha A_1 + \alpha^4 A_2 \\ \sqrt{z_4} = A_0 + \alpha^2 A_1 + \alpha^3 A_2, & \sqrt{z_5} = A_0 + \alpha^3 A_1 + \alpha^2 A_2, & \sqrt{z_6} = A_0 + \alpha^4 A_1 + \alpha A_2 \end{array}\right.$$

nelle quali α è una radice immaginaria dell'equazione $\alpha^5 - 1 = 0$; e le A_0, A_1, A_2 hanno i valori trovati nella nota citata.

Se mediante queste espressioni delle radici si formano i coefficienti della (1), si ottengono facilmente le relazioni:

$$(3)\left\{\begin{array}{lll} a_1 = -10A, & a_2 = 35A^2, & a_3 = -60A^3 + 10B \\ a_4 = 55A^4 - 30AB, & a_5 = -26A^5 + 30A^2B - C, & a_6 = 5(A^3 - B)^2 \end{array}\right.$$

essendosi posto per brevità:

$$(4)\left\{\begin{array}{l} A = A_0^2 + A_1A_2, \; B = 8A_0^4 A_1A_2 - 2A_0^2 A_1^2 A_2^2 + A_1^3 A_2^3 - A_0(A_1^5 + A_2^5) \\ C = 320A_0^6 A_1^2 A_2^2 - 160A_0^4 A_1^3 A_2^3 + 20A_0^2 A_1^4 A_2^4 + 6A_5^5 A_2^5 \\ \qquad - 4A_0(32A_0^4 - 20A_0^2 A_1A_2 + 5A_1^2 A_2^2)(A_1^5 + A_2^5) + A_1^{10} + A_2^{10}. \end{array}\right.$$

Ma è noto che per $n = 5$ l'equazione del moltiplicatore è la:

$$z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 60z^3 + 55z^2 - 2(13 - 2^8k^2k'^2)z + 5 = 0$$

quindi la prima, terza e quinta delle equazioni (3) daranno:

$$(5) \qquad A = 1, \quad B = 0, \quad C = -2^8k^2k'^2$$

e le altre sono soddisfatte da questi valori. Dalle precedenti relazioni deduconsi quelle che abbiamo date nella nota citata.

2.° Poniamo ora:

$$(6)\left\{\begin{array}{ll} x_1 = (z_2-z_1)(z_3-z_6)(z_4-z_5), & x_2 = (z_3-z_1)(z_4-z_2)(z_5-z_6) \\ x_3 = (z_4-z_1)(z_5-z_3)(z_6-z_2), & x_4 = (z_5-z_1)(z_6-z_4)(z_2-z_3) \\ \multicolumn{2}{c}{x_5 = (z_6-z_1)(z_2-z_5)(z_3-z_4)\,;} \end{array}\right.$$

ed esprimiamo mediante le (2) i secondi membri di queste equazioni in funzioni di A_0, A_1, A_2. Si hanno facilmente le:

$$(7)\left\{\begin{array}{ll} x_1=\sqrt{5}(B_0+B_1+B_2+B_3+B_4), & x_2=\sqrt{5}(B_2+\alpha B_1+\alpha^2 B_2+\alpha^3 B_3+\alpha^4 B_4) \\ x_3=\sqrt{5}(B_0+\alpha^2 B_1+\alpha^4 B_2+\alpha B_3+\alpha^3 B_4), & x_4=\sqrt{5}(B_0+\alpha^3 B_1+\alpha B_2+\alpha^4 B_3+\alpha^2 B_4) \\ \multicolumn{2}{c}{x_5=\sqrt{5}(B_0+\alpha^4 B_1+\alpha^3 B_2+\alpha^2 B_3+\alpha B_4)} \end{array}\right.$$

nelle quali $B_0 = 4B$ e:

$$\begin{aligned} B_1 &= 8A_0 A_1^3 A_2^2 - 16A_0^3 A_1^2 A_2 - 2A_1 A_2^5 - A_1^6 + 4A_0^2 A_2^4 \\ B_4 &= 8A_0 A_1^2 A_2^3 - 16A_0^3 A_1 A_2^2 - 2A_1^5 A_2 - A_2^6 + 4A_0^2 A_1^4 \\ B_2 &= 16A_0^3 A_2^3 - 16A_0^4 A_1^2 + A_1^4 A_2^2 - 4A_0 A_1 A_2^4 \\ B_3 &= 16A_0^3 A_1^3 - 16A_0^4 A_2^2 + A_1^2 A_2^4 - 4A_0 A_1^4 A_2\,. \end{aligned}$$

Sia:

$$x^5 + p_1 x^4 + \ldots + p_4 x + p_5 = 0$$

la equazione avente per radici le x_1, $x_2 \ldots x_5$; ponendo per brevità:

$$P_2 = B_1 B_4 + B_2 B_3\,, \qquad P_3 = B_1^2 B_3 + B_2^2 B_1 + B_3^2 B_4 + B_4^2 B_2$$

$$P_4 = B_1^3 B_2 + B_2^3 B_4 + B_3^3 B_1 + B_4^3 B_3 + 3B_1 B_2 B_3 B_4$$

dalle (7) si hanno le:

$$p_1 = -5\sqrt{5}.B_0\,,\quad p_2 = -5^2.P_2\,,\quad p_3 = -5^2\sqrt{6}P_3\,,\quad p_4 = -5^3(P_4 - P_2^2)\,;$$

ma pei valori superiori di B_1, $B_2 \ldots$ rammentando le (4) si ottengono le:

$$P_2 = 2(AC - 3B^2)\,,\quad P_3 = 4B(AC - 5B^2)\,,\quad P_4 = 15B^4 - A^2C^2 + 2AB^2C$$

quindi pei valori (5) si avranno le:

$$p_1 = 0\,,\quad p_2 = 2^9.5^2 k^2 k'^2\,,\quad p_3 = 0\,,\quad p_4 = 2^{16}.5^4 k^4 k'^4\,.$$

Da ultimo osservando che indicando con $\Pi(z_1, z_2 \ldots\ldots z_6)$ il prodotto delle differenze delle radici z_1, $z_2 \ldots$ si ha:

$$\Pi^2(z_1, z_2 \ldots z_6) = 5^5.2^{44} k^8 k'^8(1 - 4k^2 k'^2)^2$$

e che:

$$p_5 = -\Pi(z_1, z_2 \ldots z_6)$$

si otterrà:

$$p_5 = -5^2\sqrt{5.2^{22}}\, k^4 k'^4 (1 - 4k^2 k'^2);$$

e la equazione di cui le radici sono le (6) sarà la seguente:

$$x(x^2 + 5^2.2^8 k^2 k'^2)^2 = 5^2\sqrt{5.2^{22}}\, k^2 k'^4 (1 - 4k^2 k'^2) \quad (*)$$

la quale ponendo:

$$1 + \frac{x^2}{5^2.2^8 k^2 k'^2} = \frac{2}{5}\theta$$

riducesi alla forma:

$$(8) \qquad \theta^5 - \frac{5}{2}\theta^4 - \frac{(1 - 4k^2 k'^2)^2}{2k^2 k'^2} = 0.$$

Le radici x_1, $x_2 \ldots$ della equazione superiore ponno esprimersi in causa dei valori delle z_1, $z_2 \ldots$ trovati nella nota citata nel modo seguente. Attribuendo a K ed a K' l'ordinaria significazione, facciasi $\omega = i\,\frac{K'}{K}$ ed:

$$f(\omega) = \left(\sum_{m=\infty}^{m=-\infty} e^{i\pi m^2 \omega}\right)^2$$

si avranno: (Vedi la nota del fasc.° 3.°):

$$z_1 = \frac{5}{f(\omega)} f(5\omega), \qquad z_2 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega}{5}\right), \qquad z_3 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+3}{5}\right)$$

$$z_4 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+4}{5}\right), \quad z_5 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+6}{5}\right), \quad z_6 = \frac{1}{f(\omega)} f\left(\frac{\omega+8}{5}\right)$$

per cui ponendo:

$$F(\omega) = \left\{f\left(\frac{\omega}{5}\right) - 5f(5\omega)\right\}\left\{f\left(\frac{\omega+2}{5}\right) - f\left(\frac{\omega+8}{5}\right)\right\}\left\{f\left(\frac{\omega+4}{5}\right) - f\left(\frac{\omega+6}{5}\right)\right\}$$

risulteranno:

$$x_1 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega), \qquad x_2 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega + 2) \cdots\cdots x_5 = \frac{1}{f^3(\omega)} F(\omega + 8)\cdot$$

Da queste si deducono analoghe espressioni per le radici θ_1, $\theta_2 \ldots$ della (8).

(*) In una nota ad un articolo « Sur la résolution de l'équation du quatrième degré » pubblicato nei *Comptes Rendus* del 12 Aprile 1858. il Sig. Hermite riferisce le equazioni del moltiplicatore per la trasformazione d'ordine quinto, settimo, ed undecimo; ed anche questa equazione calcolata dal Prof. Joubert.

3.° La ottenuta risoluzione dell'equazione (8) conduce a quella di una equazione qualunque del quinto grado. Infatti è noto (*) avere il Sig. Jerrard dimostrato essere possibile di ridurre una equazione del quinto grado alla forma:

$$(9) \qquad \theta^5 - \frac{5}{2}\theta^4 - a = 0;$$

se quindi il modulo k corrispondente alle funzioni K, K', si determina in modo che risulti:

$$(10) \qquad (1 - 4k^2 k'^2)^2 = 2ak^2 k'^2$$

la (9) viene a coincidere colla (8). Dunque assumendo pel valore di k una qualsivoglia delle radici dell'equazione (10) e sostituendo il medesimo ed il valore corrispondente di ω nelle espressioni:

$$\theta_r = \frac{5}{2}\left\{1 + \frac{1}{5^2.2^8 k^2 k'^2}\cdot\frac{F^2[\omega + 2(r-1)]}{f^6(\omega)}\right\}, \quad (r = 1, 2 \ldots 5)$$

si otterranno le radici dell'equazione (9) alla quale può ridursi ogni equazione del quinto grado.

Giugno 1858. PROF. F. BRIOSCHI.

(*) Jerrard — Mathematical Researches. Hamilton — Report of the sixth meeting of the British Association — Serret — Cours d'Algèbre Supérieure — Note V.