

# ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N<sup>o</sup> 2730

## Zum Satze vom arithmetischen Mittel.

Versuche, die Hypothese des arithmetischen Mittels, auf welche Gauss seine erste Begründung der Methode der kleinsten Quadratsummen gestützt, auf einfachere Annahmen zurückzuführen, sind schon wiederholt unternommen worden.\*) Der vorliegende knüpft an diejenigen an, welchen Encke im Berliner Astr. Jahrb. für 1834 pag. 262 ff. mitgeteilt hat und welcher von der Annahme ausgeht, dass der aus zwei gleich genauen Beobachtungen abgeleitete wahrscheinlichste Werth der beobachteten Grösse das arithmetische Mittel der beiden Beobachtungsergebnisse sei, während aber Encke, um den Uebergang zu einer beliebigen Anzahl gleich genauer Beobachtungen herzustellen, eine Voraussetzung über die Form der Function aufstellt, welche den wahrscheinlichsten Werth durch die Beobachtungsergebnisse darstellt, fällt hier eine solche Voraussetzung hinweg und es tritt

eine andere an ihre Stelle, deren axiomatischer Charakter wohl kaum bestritten werden kann. Den Beweis vermittelt das folgende

**Theorem.** Verbindet man  $n+1$  beliebige endliche Zahlen  $l_0, l_1, \dots, l_n$  auf alle möglichen Arten und ohne Wiederholung in Gruppen von je  $n$ , bildet aus den Zahlen jeder Gruppe das arithmetische Mittel, verfährt mit den erhaltenen  $n+1$  Mittelwerthen  $x_0', x_1', \dots, x_n'$  in derselben Weise, wodurch man zu einer neuen Reihe von  $n+1$  Zahlen,  $x_0'', x_1'', \dots, x_n''$ , geführt wird, wendet auf diese das nämliche Verfahren an und setzt dies so fort, so nähern sich alle derart gebildeten Zahlenwerthe einer gemeinsamen Grenze, dem arithmetischen Mittel der ursprünglichen  $n+1$  Zahlen.

Versteht man nämlich unter  $[L]$  die Summe der Zahlen

$$\begin{array}{llll} & l_0 & & l_1 & \dots & & l_n & (0) \\ \text{so ist } x_0' & = \frac{[L] - l_0}{n}, & x_1' & = \frac{[L] - l_1}{n}, & \dots & & x_n' & = \frac{[L] - l_n}{n} & (1) \\ x_0'' & = \frac{(n-1)[L] + l_0}{n^2}, & x_1'' & = \frac{(n-1)[L] + l_1}{n^2}, & \dots & & x_n'' & = \frac{(n-1)[L] + l_n}{n^2} & (2) \\ x_0''' & = \frac{(n^2 - n + 1)[L] - l_0}{n^3}, & x_1''' & = \frac{(n^2 - n + 1)[L] - l_1}{n^3}, & \dots & & x_n''' & = \frac{(n^2 - n + 1)[L] - l_n}{n^3} & (3) \end{array}$$

nach  $s$ -maliger Wiederholung dieses Vorganges wird allgemein

$$x_r^{(s)} = \frac{(n^{s-1} - n^{s-2} + n^{s-3} - \dots \mp 1)[L] \pm l_r}{n^s} = \frac{n^s \mp 1}{n+1} \frac{[L] \pm l_r}{n^s},$$

wobei das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem  $s$  eine gerade oder ungerade Zahl ist. In der That ist für ein beständig wachsendes  $s$

$$\lim x_r^{(s)} = \frac{[L]}{n+1}$$

unabhängig von dem Zeiger  $r$ .

\*) Eine interessante Arbeit dieser Art hat G. V. Schiaparelli in Nr. 2068 der A. N. (1876) unter dem Titel „Sur le principe de la moyenne arithmétique“ veröffentlicht; der Beweis wird hier auf drei Voraussetzungen gestützt. Für eine derselben, allerdings die wichtigste, hat J. E. Stone in einer gleich betitelten Note in Nr. 2092 der A. N. (1877) seine Priorität dargethan (vgl. die Entgegnung Schiaparelli's hierauf in Nr. 2097). Es ist daher nicht ohne Interesse zu bemerken, dass auch Dr. W. Matzka schon im XI. Bande des „Archiv der Mathematik und Physik“ von Grunert, (1848), pag. 369 ff., einen „Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate“ gegeben hat, welcher in wesentlichen Punkten mit dem Schiaparelli'schen übereinstimmt.

Angenommen nun,  $l_0, l_1, \dots, l_n$  seien gleich genaue Beobachtungen (oder gleich wahrscheinliche Werthe) einer unbekannten Grösse, und vorausgesetzt,

(I), das arithmetische Mittel aus  $n$  solchen Beobachtungen, sei der wahrscheinlichste Werth, welcher aus ihnen für die Grösse abgeleitet werden kann, d. h. derjenige, für welchen die Wahrscheinlichkeit, dass er mit dem wahren Werthe (bis auf eine beliebig kleine Grösse) übereinstimme, unter allen aus den  $n$  Beobachtungen ableitbaren Werthen am grössten ist,

so lässt sich mit Hülfe des obigen Theorems zeigen, dass dies auch für  $n+1$  Beobachtungen aufrecht bleibe, wenn man folgende Voraussetzung als richtig anerkennt:

(II) Solche Werthe der unbekannten Grösse, welche aus gleich genauen Beobachtungen auf gleiche Art abgeleitet wurden, sind gleich genau.

Im Grunde der Voraussetzung (II) stellen nämlich (1), (2), (3) . . . ebenso wie (o) Reihen gleich genauer Werthe für die Unbekannte vor. In Folge der Annahme (I) ist also jeder Werth aus der Reihe (1) als arithmetisches Mittel von  $n$  Werthen der Reihe (o) der wahrscheinlichste aus diesen ableitbare, daher wahrscheinlicher als ein einzelner dieser Werthe oder als irgend ein Werth aus der Reihe (o); aus demselben Grunde ist irgend ein Werth aus der Reihe (2) wahrscheinlicher als ein beliebiger Werth aus der Reihe (1). Durch Fortsetzung dieser Schlussweise über-

zeugt man sich, dass  $L, x', x'', x''', \dots$  Werthe vorstellen, welche, aus der Beobachtungsreihe (o) abgeleitet, mit wachsender Wahrscheinlichkeit dem wahren Werthe der Unbekannten gleichkommen; somit ist

$$\lim x_r^{(s)} = \frac{[L]}{n+1} = x$$

der wahrscheinlichste unter allen.

Wenn demnach die für  $n$  Beobachtungen aufgestellte Annahme (I) für zwei Beobachtungen als Axiom angenommen wird, und wenn man auch der Annahme (II) diesen Charakter zuerkennt, so ist durch den eben geführten Beweis von  $n$  auf  $n+1$  die Allgemeingültigkeit des Satzes vom arithmetischem Mittel dargethan.

Prag 1886 April 3.

E. Czuber.

## Ueber die Genauigkeit der Zonen-Beobachtungen,

welche mit Anwendung des sogen. Declinographen am Berliner Aequatoreal ausgeführt werden.

Von V. Knorre.

Unter Bezugnahme auf die in den A. N. Bd. 93 p. 363 und Bd. 100 p. 81, in der Zeitschrift für Instrumentenkunde (Juli-Heft 1881), sowie in dem Jahresbericht der Berliner Sternwarte für 1881 und für 1882 veröffentlichten Mittheilungen über meine Zonen-Beobachtungen am Berliner Aequatoreal, und die dabei nicht bloss für die Rectascension, sondern auch für die Declination in Anwendung kommenden Registrir-Einrichtungen kann ich heute berichten, dass es mir gelungen ist, die Genauigkeit dieser sehr schnellen und summarischen Ortsbestimmungen von Sternen bis zur 13. Gr. im Laufe des letzten Jahres erheblich zu steigern, und zwar ist dies durch ein sehr einfaches Auskunftsmittel gelungen, dessen nähere Darlegung vielleicht für die anderweitige Benutzung ähnlicher Einrichtungen nützlich sein wird.

Es ist zunächst vollkommen erklärlich, dass die einzelnen Pointirungen in Rectascension und in Declination bei solchen massenhaften Beobachtungen, bei welchen durchschnittlich eine Zeitdauer von nur wenigen Secunden auf eine vollständige und nahezu gleichzeitige Registrirung der

Rectascension und der Declination kommt, unmöglich diejenige Genauigkeit haben können, welche erreichbar ist, wenn bloss Registrirungen von Durchgängen, oder gar bloss mikrometrische Einstellungen der Declination in aller Ruhe vollzogen werden. Der wahrscheinliche Fehler einer Rectascensionsbestimmung mittels eines einzelnen Faden-Antrittes wird daher bei diesen Zonen-Beobachtungen niemals auf den Betrag von 0<sup>s</sup>.04 bis 0<sup>s</sup>.05, welchen man in aller Ruhe bei sonstigen Durchgangsbeobachtungen für Rectascension erhalten kann, eingeschränkt werden können, ebenso wenig wie der wahrscheinliche Fehler einer einzelnen eiligen Registrirung der Declination mit dem Declinographen auf den Betrag von 0<sup>s</sup>.2, welcher sonst bei Mikrometer-Einstellungen erreichbar ist, herabzumindern sein wird. Dennoch konnte ich es nicht für ein definitives Ergebniss halten, als ich bei einer nähern Untersuchung der wahrscheinlichen Fehler der Registrirung eines Faden-Antrittes, beziehungsweise einer Declination bei meinen Zonen-Beobachtungen folgende sehr erhebliche Beträge fand:

I. Mit der gewöhnlichen Klemmung des Stundenkreises und mit 140-facher Vergrösserung, in Stundenwinkeln zwischen  $-2^h5$  und  $-0^h9$  und Declination  $+7^\circ$ .

### Rectascension.\*)

Aus 120 Beobachtungen von 30 Sternen bis zur 13. Grösse inclusive	$\pm 0^s.12$
» 108 » » 27 » » » 12. » » »	$\pm 0.11$
» 44 » » 11 » » » 11. » » »	$\pm 0.09$

### Declination.

Aus 185 Beobachtungen von 37 Sternen bis zur 13. Grösse inclusive	$\pm 1''.1$
» 170 » » 34 » » » 12. » » »	$\pm 1.0$
» 70 » » 14 » » » 11. » » »	$\pm 0.9$

\*) Bei der Ermittlung der wahrscheinlichen Fehler eines Faden-Antrittes habe ich alle Beobachtungen von denjenigen Sternen vermieden, welche in kürzeren Intervallen als 1<sup>s</sup> aufeinander folgten, da ich von vornherein annahm, dass solche Sterne sich zu ungenau beobachten lassen. Daraus erklärt sich die geringere Anzahl der benutzten Beobachtungen in Rectascension, als in Declination. Ferner kommt noch hinzu, dass bei den Beispielen I und II während der Registrirung der Grössen auch die Declinationen wegen der Identificirung der Sterne registrirt wurden, und dadurch für die Declinationen noch eine Beobachtungsreihe mehr erhalten wurde. Bei den darauf folgenden Beispielen war die Zahl der Beobachtungsreihen in Rectascension und Declination gleich gross, da ich die Grössen ausrief, und Dr. Cerulli die Güte hatte, sie zu notiren.