Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kugelfunction $P^n(\cos\vartheta)$ und über eine analoge Integralform für die Cylinderfunction $J(x)$.

Von F. G. Mehler in Elbing.

Bekanntlich sind von Dirichlet für $P^n(\cos\vartheta)$ die folgenden beiden Integralformen*) aufgestellt worden:

$$P^n(\cos\vartheta) = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos n\beta \cos\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\cos n\beta \sin\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}$$

$$P^n(\cos\vartheta) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\sin n\beta \sin\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{2}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin n\beta \cos\frac{1}{2}\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}},$$

beide gültig für $n \geqq 1$, die erste auch noch für $n = 0$, wenn von der rechten Seite der Gleichung die Hälfte genommen wird. Aus diesen Ausdrücken können zwei ähnliche in der Form etwas einfachere gewonnen werden, auf welche ich zuerst durch die Untersuchung derjenigen Functionen, durch welche die Lösung des elektrostatischen Problems für den Kegel vermittelt wird, zufällig geführt wurde.**) Addirt man die obigen beiden Gleichungen, so erhält man die auch noch für $n = 0$ gültige Formel

$$P^n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} + \frac{1}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}.$$

Subtrahirt man dagegen dieselben Gleichungen, *nachdem man vorher n in $n + 1$ verwandelt hat*, so ergiebt sich

$$0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\vartheta \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}} - \frac{1}{\pi}\int_\vartheta^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}},$$

und wenn man diese Gleichung, welche für $n = 0$ ebenfalls keine

---

*) Crelle's Journal, Bd. 17, p. 41.

**) Vergl. p. 18 meiner Arbeit: Ueber eine mit den Kugel- und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. (Elbing 1870.)

Ausnahme erleidet, mit der vorhergehenden durch Addition und Subtraction verbindet, so entstehen die Formen:

$$(1) \qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\vartheta} \frac{\cos(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\beta - \cos\vartheta)}},$$

$$(2) \qquad P^n(\cos\vartheta) = \frac{2}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\beta\, d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}.$$

$$(0 < \vartheta < \pi).$$

Es kann bemerkt werden, dass das letzte Integral *für sich allein* sehr wohl geeignet ist, bei der Untersuchung der nach Kugelfunctionen fortschreitenden Reihe die Stelle der *beiden* von Dirichlet angewandten Ausdrücke zu vertreten, indem die Summation der m ersten Glieder der Reihe bei Anwendung der Gl. (2) mit Hülfe der einfachen Formel

$$\sum_{s=0}^{s=m-1} (s+\tfrac{1}{2})\, P^s(\cos\vartheta) = -\frac{1}{\pi}\int_{\vartheta}^{\pi} \frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}\right) \frac{d\beta}{\sqrt{2(\cos\vartheta - \cos\beta)}}$$

bewerkstelligt werden kann.

Setzt man die beiden Formen (1) und (2) einander gleich und verwandelt ϑ in $\frac{x}{n}$ und β in $\frac{\alpha}{n}$, so entsteht für $0 < x < n\pi$ und ein ganzzahliges positives n die Gleichung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2n}\right) d\alpha}{\sqrt{2n^2\left(\cos\frac{\alpha}{n} - \cos\frac{x}{n}\right)}} = \frac{2}{\pi}\int_x^{n\pi} \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\alpha}{2n}\right) d\alpha}{\sqrt{2n^2\left(\cos\frac{x}{n} - \cos\frac{\alpha}{n}\right)}},$$

und diese geht für $n = \infty$ und jeden positiven Werth von x über in:

$$(3) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{x} \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{x^2 - \alpha^2}} = \frac{2}{\pi}\int_x^{\infty} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}.$$

Die linke Seite erweist sich durch die Substitution $\alpha = x\cos\lambda$ als identisch mit der am meisten bekannten Integralform der Cylinderfunction $J(x)$, nämlich mit

$$J(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos(x\cos\lambda)\, d\lambda,$$

während die rechte Seite eine davon wesentlich verschiedene Form hat. Die strenge Begründung des gemachten Grenzüberganges ist aber gerade bei dem zweiten Integrale umständlich, und auch die directe Ableitung desselben aus dem ersten, welche ich in der erwähnten Arbeit (p. 23) gegeben habe, ist insofern nicht ganz streng, als sie durch Umkehrung der Integrationsfolge in einem Doppelintegrale gewonnen ist, dessen Grenzen unendlich sind und welches seine Bedeutung nur dem abwechselnden Zeichen seiner Elemente verdankt. Daher wird es nicht überflüssig sein, auf andere Art zu constatiren, dass die Function

$$(4)\qquad H(x) = \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}}$$

für positive x mit $J(x)$ übereinstimmt. Man sieht zunächst, dass $H(0) = 1$, also $= J(0)$ ist; aber es ist nicht ebenso einleuchtend, dass $H(x)$ auch für ein unendlich kleines x die Einheit zur Grenze hat, und da dieses für die Folge zu wissen nöthig ist, so soll es zunächst gezeigt werden. Man hat:

$$H(x) - H(0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\alpha} + \frac{2}{\pi}\int_x^\infty \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - x^2}} - \frac{1}{\alpha}\right)\sin\alpha\, d\alpha.$$

Das erste Integral nähert sich mit x zugleich der Null. Das zweite möge in zwei andere mit den Grenzen 0 und ε, ε und ∞ zerlegt werden. Sein Werth kann dann, weil der erste Factor des zu integrirenden Produktes sein Zeichen nicht ändert, dargestellt werden unter der Form

$$\frac{2\sin\varepsilon_1}{\pi}\log\left(\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}{\varepsilon}\right) + \frac{2\sin\varepsilon_2}{\pi}\log\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - x^2}}\right),$$

wenn ε_1 einen gewissen zwischen 0 und ε, dagegen ε_2 einen zwischen ε und ∞ gelegenen Werth bezeichnet. Ertheilt man nun ε einen zwar beliebig kleinen aber festen Werth, während x unbegrenzt abnimmt, so wird das erste Glied der vorstehenden Summe beliebig klein wegen des Factors $\sin\varepsilon_1$, das zweite wegen des in $\sin\varepsilon_2$ multiplicirten Logarithmus. Es ist also in der That $\lim\,(H(x) - H(0)) = 0$, d. h. $\lim H(x) = H(0) = 1$. Verwandelt man nun in (4) α in $\beta + x$, so ergiebt sich

$$(5)\qquad H(x) = \frac{2}{\pi}\cos x\int_0^\infty \frac{\sin\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta + 2x}} + \frac{2}{\pi}\sin x\int_0^\infty \frac{\cos\beta\, d\beta}{\sqrt{\beta}\sqrt{\beta + 2x}}.$$

Die hier in $\cos x$ und $\sin x$ multiplicirten Integrale sind, wie sich leicht nachweisen lässt, für $x > 0$ stetige Functionen von x, und ihre Differentialquotienten, welche durch Differentiation unter dem Integralzeichen abgeleitet werden können, sind ebenfalls stetig. Durch wirkliche Ausführung der Differentiationen bildet man aber leicht die Gleichung

$$xH''(x) + H'(x) + xH(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\beta\,\frac{d}{d\beta}\left(\frac{\sin(\beta + x)\,.\sqrt{\beta}}{(\beta + 2x)^{\frac{3}{2}}}\right),$$

deren rechte Seite sich für $x > 0$ stets auf Null reducirt. Es genügt also für positive und von Null verschiedene x die Function $H(x)$ derselben Differentialgleichung

$$xy'' + y' + xy = 0,$$

von welcher auch $J(x)$ ein particuläres Integral ist, und hieraus ergiebt sich, wie bekannt, dass zwischen $H(x)$ und $J(x)$ die Beziehung stattfindet:

$$x\big(J(x)\,H'(x) - H(x)\,J'(x)\big) = c,$$

worin c eine Constante, und zwar überall dieselbe Constante, weil eine sprungweise Aenderung bei $H(x)$ und $H'(x)$ (für $x > 0$) ebenso wenig wie bei $J(x)$ und $J'(x)$ stattfindet. Durch Integration zwischen zwei beliebigen positiven Grenzen z und x ergiebt sich nun

$$\frac{H(x)}{J(x)} - \frac{H(z)}{J(z)} = c\int_z^x \frac{dx}{x\,(J(x))^2},$$

und lässt man hierin x und z unabhängig von einander gegen Null hin abnehmen, so nähert sich, weil $H(+0) = J(+0) = 1$, die linke Seite der Null. Da aber das Integral auf der rechten Seite, indem es sich für sehr kleine x und z wie $\log x - \log z$ verhält, einen völlig unbestimmten Werth hat, so muss die Constante $c = 0$ sein, und folglich gilt für positive x und z die Gleichung:

$$\frac{H(x)}{J(x)} = \frac{H(z)}{J(z)}, \quad \text{d. h. es ist} \quad \frac{H(x)}{J(x)} = \frac{H(+0)}{J(+0)} = 1,$$

mithin in der That $H(x) = J(x)$.

Elbing, den 2. December 1871.