Ein Satz über die Abelschen Integrale 1. Gattung.

Von

Otto Haupt in Rostock.

Einleitung.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich einige Fragestellungen skizziert, die sich unter anderem auf gewisse Eindeutigkeitssätze bei Prymschen Funktionen 1. Ordnung beziehen. Ich bin infolge des Krieges bisher an der Verfolgung und Darstellung dieser Untersuchungen gehindert worden. Daher will ich zunächst nur auf einen Spezialfall eingehen, der auch für sich allein nicht ohne Interesse zu sein scheint und der verhältnismäßig einfach zu erledigen ist.

Die folgende Untersuchung dürfte zugleich einen kleinen Beitrag liefern zu Fragen, die Herr Klein in seinen Vorlesungen über die Riemannschen Flächen[2]) aufgeworfen hat. Herr Klein bezeichnet es an genannter Stelle als „eine wichtige Aufgabe: sich die Gesamtheit der hier möglichen Figuren" [d.h. eben der Riemannschen Parallelogrammfiguren] „deutlich zu machen" und fügt hinzu: „Kein Zweifel, daß hieraus wieder neue Sätze über das Verhalten der Integrale w auf der Riemannschen Fläche hervorgehen würden." Vielleicht kann der im § 10 mitgeteilte Satz als hierhergehörig betrachtet werden. Ferner erscheint es nicht ausgeschlossen, daß mittels der (unten zu gewinnenden) Reduktion des Periodensystems Abelscher Integrale 1. Gattung auf Normalformen jene von Herrn Klein formulierte Aufgabe sich, auf einem anderen als dem von Herrn Wirtinger[3]) eingeschlagenen Wege, einer Behandlung zugänglich erweist.

---

[1]) Math. Annalen, 77 (1915), S. 61.

[2]) Leipzig 1906; I. (W. S. 1891/92), S. 76.

[3]) Wirtinger, Wiener Denkschriften, 85 (1910), S. 91–112.

§ 1.

Problemstellung.

Es handelt sich um folgendes: Gegeben sei eine der komplexen z-Ebene überlagerte, *nicht zerfallende*[4]), zu einer algebraischen Funktion vom Geschlechte p gehörige Riemannsche Fläche T und es sei T durch p Rückkehrschnittpaare a_ν, b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ kanonisch zerschnitten; die zerschnittene Fläche T werde mit T' bezeichnet. Auf T existiert bekanntlich ein und nur ein Abelsches Integral 1. Gattung, welches an einer bestimmten Stelle im Innern von T' verschwindet und dessen Perioden $\mathfrak{B}_\nu$ an den Schnitten b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ vorgegebene Größen sind. Die Perioden $\mathfrak{A}_\nu$ an den Schnitten a_ν sind durch die $\mathfrak{B}_\nu$, die Individualität von T und, was für das Folgende wesentlich ist, in gewisser Weise auch durch die Wahl des kanonischen Schnittsystems a_ν, b_ν $(\nu = 1, \ldots, p)$ auf T festgelegt. Dabei gilt die Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad h^2 = i \sum_{\nu=1}^{p} (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \overline{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu) > 0,$$

wo die $\overline{\mathfrak{A}}_\nu, \overline{\mathfrak{B}}_\nu$ die zu $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ konjugiert komplexen Größen bezeichnen und h eine reelle Zahl ist.

Die Ungleichung (I) liefert somit bei gegebenen Werten $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$ eine *notwendige* Beschränkung für die Variabilität der $\mathfrak{A}_\nu$. Damit ist die Frage nahegelegt[5]), ob diese Beschränkung auch hinreicht, um die Existenz eines Abelschen Integrals 1. Gattung zu garantieren, d. h. ob [bei festgehaltenen Werten von $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$] zu *jedem* mit (I) verträglichen Wertesystem $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$ ein Integral 1. Gattung vom Geschlechte p existiert, welches bei passender Zerschneidung der Fläche T die Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ zu Perioden hat.

Wie nachstehend gezeigt werden soll, läßt sich diese Frage ganz elementar entscheiden und zwar durch *unmittelbare Konstruktion von Flächen T des Geschlechtes p, für welches ein Integral* 1. *Gattung existiert, das ein der Bedingung* (I) *genügendes, im übrigen — von einer gewissen Ausnahme abgesehen — beliebig vorgegebenes System von* $2p$ (*komplexen*) *Größen $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ als Periodensystem besitzt.*

Der im folgenden zu beweisende Satz lautet:

Damit ein gegebenes System von $2p$ (*komplexen*) *Konstanten* $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p$ *als Periodensystem eines Abelschen*

---

[4]) Diese Voraussetzung wird im folgenden stets gemacht, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird.

[5]) Diese Frage scheint bisher, wenigstens in dieser Fassung, nicht gestellt und behandelt worden zu sein.

Integrals 1. *Gattung vom Geschlechte p auftreten kann, ist notwendig und hinreichend, daß die Konstanten der Bedingung* (I) *genügen; ausgenommen ist lediglich der Fall, daß für $p \geqq 2$ das vorgegebene Periodensystem der $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$ einem Periodensysteme „äquivalent"*[6]) *ist* [*d. h. durch gewisse lineare Substitutionen in ein solches sich überführen läßt*], *für welches sämtliche Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ mit Ausnahme eines einzigen Paares, z. B. $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$, verschwinden. In diesem Ausnahmefall existiert ein Integral* 1. *Gattung vom Geschlechte $p \geqq 2$ mit den vorgegebenen Perioden nicht*[7]).

Ob ein solcher Ausnahmefall vorliegt, läßt sich in jedem konkreten Fall durch eine endliche Anzahl von Operationen entscheiden[8]).

Für $p = 1$ ist die Richtigkeit des Satzes evident; für $p \geqq 2$ ist für gewisse spezielle Arten von Periodensystemen die Existenz zugehöriger Flächen T' bzw. Abelscher Integrale bereits erwiesen[9]). Im folgenden wird stets $p \geqq 2$ vorausgesetzt.

§ 2.

Gedankengang des Beweises.

Wie bereits angedeutet, geht man beim Beweise des eben formulierten Satzes zunächst darauf aus, zu vorgegebenen Größen $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ eine zugehörige „*Riemannsche Parallelogrammfigur*" (kurz „*Fläche N*" genannt[10])) zu konstruieren. Man versteht darunter ein Gebiet, das, einer (komplexen) w-Ebene mehrblättrig überlagert, von p getrennt verlaufenden, orientierten[11]) „*parallelogrammatischen Rahmen*"[12]) mit den $\mathfrak{A}_\nu$, $\mathfrak{B}_\nu$ als zugehörigen Verschiebungsgrößen begrenzt wird und den unendlich fernen Punkt der w-Ebene nicht überdeckt; außerdem soll N in seinem Innern (oder auf der Begrenzung) $(2p - 2)$ einfache Verzweigungspunkte (relativ zur w-Ebene) enthalten. N ist von p-fachem Zusammenhang. Vermittelst der Fläche N findet man sodann das gesuchte Integral 1. Gattung.

[6]) Bezüglich des Begriffes der „Äquivalenz" vgl. § 2 vorliegender Arbeit.

[7]) Bezüglich dieses Ausnahmefalles vgl. § 10 dieser Arbeit. Die Feststellung, daß derartige Integrale, von den elliptischen abgesehen, nicht existieren, scheint bisher nicht gemacht zu sein.

[8]) Vgl. § 10 dieser Arbeit.

[9]) Vgl. hierzu vor allem Klein, l. c. [2]), S. 74—76, ferner Wirtinger, l. c. [3]) sowie Enzyklopädie d. math. Wiss., II B 6 (Abelsche Funktionen und allgemeine Thetafunktionen) und die daselbst zitierte Literatur.

[10]) Die Bezeichnung nach Klein, l. c. [2]), S. 73, vgl. auch Koebe, Unif. d. algebr. Kurven IV (Math. Ann., **75**, 1914, S. 78).

[11]) D. h. mit Umlaufsinn versehen (vgl. etwa die in Fußnote [1]) zitierte Arbeit, S. 28). Das „*Innere*" des von dem Rahmen begrenzten Gebietes liegt bei positiver Durchlaufung der Begrenzung zur Linken.

[12]) Klein, l. c. [2]), S. 73.

Im allgemeinen ist, wie man auch die Verzweigungspunkte wählen mag, die Begrenzung der Flächen N komplizierter Natur[13]). Dagegen läßt sich, wie im § 9 dieser Arbeit noch gezeigt wird, leicht eine Parallelogrammfigur N konstruieren, wenn für das vorgegebene Periodensystem [wobei natürlich stets von dem im Satze des § 1 aufgeführten Ausnahmefall abgesehen wird] anstatt der Ungleichung (I) die folgenden stärkeren Bedingungen gelten:

$$(\mathrm{I}_\varkappa) \qquad i(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa \mathfrak{B}_\varkappa) > 0, \quad \varkappa = 1, \ldots, \varrho,$$

$$(\mathrm{I}_\lambda) \qquad i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{B}_\lambda) = 0, \quad \lambda = \varrho + 1, \varrho + 2, \ldots, p,$$

$$(1 \leqq \varrho \leqq p).$$

Geometrisch gesprochen besitzt ein solches Periodensystem die Eigenschaft, daß die (orientierten) „*Periodenparallelogramme*" *lediglich entweder positiven oder verschwindenden Flächeninhalt besitzen*. Von jedem derartigen Periodensystem sagt man, es besitze „*Normalform*"; die *Anzahl* ϱ *der Parallelogramme positiven Inhaltes* heiße *die „Ordnung der Normalform"*[14]).

Das nächste Ziel der folgenden Untersuchung wird demgemäß sein, jedes vorgegebene, der Bedingung (I) genügende System von $2p$ Perioden $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots, p)$ auf eine Normalform zu bringen. Man erreicht dies durch eine geeignete automorphe[15]) ganzzahlige Transformation der Hermiteschen Form

$$H = i \sum_{\nu=1}^{p} (\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu - \overline{\mathfrak{A}}_\nu \mathfrak{B}_\nu)$$

in den Variablen $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$. Zwecks kürzerer Ausdrucksweise nenne man zwei Größensysteme $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_p$; $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_p$ und $\mathfrak{A}_1', \ldots, \mathfrak{A}_p'$; $\mathfrak{B}_1', \ldots, \mathfrak{B}_p'$ „*äquivalent*", wenn das eine aus dem andern durch eine derartige (automorphe und ganzzahlige) Transformation hervorgeht.

In zweiter Linie wird dann, wie bereits bemerkt, gezeigt, daß jedes in einer Normalform auftretende Größensystem $\mathfrak{A}_\nu, \mathfrak{B}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ die Perioden eines Integrals 1. Gattung vom Geschlechte p an den Querschnitten a_ν, b_ν (mindestens) einer Riemannschen Fläche T bildet. Und ein gleiches gilt nunmehr auch für jedes äquivalente Größensystem; denn die automorphen Transformationen sind nichts anderes, als die „ganzzahligen linearen" Transformationen der Perioden und mithin gleich-

[13]) Vgl. die Bemerkungen bei Klein, l. c. [2]), S. 76—77.

[14]) Vgl. hierzu die Erörterungen in § 7 vorliegender Arbeit.

[15]) Die Bezeichnung nach Löwy, Determinanten usw. (Pascals Repertorium I, 1, Leipzig 1910, S. 136).

bedeutend lediglich mit Änderungen des Querschnittsystems auf der Fläche T [16]).

Zusatz: Die Bemerkungen betreffend die Transformation der Perioden haben zur Voraussetzung, daß die Fläche T nicht (in getrennte Bestandteile) zerfällt. Die in letzterem Falle eintretenden Modifikationen sind leicht zu übersehen.

§ 3.

Betrachtung einer speziellen Transformation der Perioden.

Bekanntlich [17]) läßt sich jede der in Rede stehenden Transformationen aus gewissen einfachen erzeugen; als solche Erzeugende können die folgenden gewählt werden:

$$(1)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, 3, \ldots, p;$$

$$(2)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = -\mathfrak{B}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, 3, \ldots, p;$$

$$(3)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_\mu, & \mathfrak{A}_\mu' = \mathfrak{A}_1, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_\mu, & \mathfrak{B}_\mu' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 2, \ldots, \mu-1, \mu+1, \ldots, p;$$

$$(4)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2, & \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \\ \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1, & \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \end{cases} \quad \nu = 3, \ldots, p.$$

Dabei bedeuten $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, p)$ die ursprünglichen, $\mathfrak{A}_\lambda'$, $\mathfrak{B}_\lambda'$ die transformierten Perioden. Man kann also insbesondere irgendwelche unter den gegebenen Periodenpaaren herausgreifen und diese herausgegriffenen für sich transformieren, während die übrigen Paare unverändert bleiben.

Man führe noch folgende *Abkürzungen* ein

$$i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{A}_\varkappa) = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{A}}_\varkappa),$$
$$i(\mathfrak{B}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{B}}_\lambda \mathfrak{B}_\varkappa) = (\mathfrak{B}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa),$$
$$i(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa - \overline{\mathfrak{A}}_\lambda \mathfrak{B}_\varkappa) = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa),$$

so daß also allgemein $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}) = -(\mathfrak{B}\overline{\mathfrak{A}})$, $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{A}}) = 0$ ist.

Ist nun ein *Periodensystem* $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, p)$ *gegeben, welches die Bedingungen* (I) *erfüllt und nicht schon in einer Normalform sich*

---

[16]) Vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903, S. 131 u. 449); auch Stahl, Abelsche Funktionen (Leipzig 1896, S. 327).

[17]) Stahl, l. c. [16]), S. 328.

befindet, so scheide man zunächst alle Periodenpaare aus, für die $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$ ist und gebe ihnen (Transformation (3)) die Indizes $\varrho + 1, \varrho + 2, \ldots, p$.

Für die übrigen Periodenpaare müssen dann alle $\mathfrak{A}_\mu$ und $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, \varrho)$ von Null verschieden sein; überdies aber können für sie *die sämtlichen (reellen) Größen* $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu)$, $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu)$, $(\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu)$ $[\mu, \nu = 1, \ldots, \varrho;\ \mu \neq \nu]$ *als von Null verschieden angenommen werden.* Daß diese Behauptung richtig ist, sieht man folgendermaßen ein: Es gelten vermöge der Transformation (1):

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + l\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\nu, \quad \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\nu, \quad \nu = 2, 3, \ldots, \varrho,$$

woselbst l eine ganze rationale, sonst beliebige Zahl bedeutet, die Beziehungen

$$(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu) + l(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu), \quad (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu) + l(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu), \quad \mu = 2, \ldots, \varrho,$$

während im übrigen

$$\left.\begin{aligned}
&(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1), \quad (\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') = (\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu), \quad (\mathfrak{A}_\mu' \overline{\mathfrak{B}}_\nu') = (\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu),\\
&(\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') = (\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu), \quad (\mathfrak{B}_\mu' \overline{\mathfrak{B}}_\nu') = (\mathfrak{B}_\mu \overline{\mathfrak{B}}_\nu),\\
&(\mathfrak{A}_\mu' \overline{\mathfrak{A}}_\nu') = (\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu),
\end{aligned}\right\}\ \mu, \nu = 2, 3, \ldots, \varrho.$$

Die Periodenpaare $\mathfrak{A}_\nu'$, $\mathfrak{B}_\nu'$ $(\nu = \varrho + 1, \ldots, p)$ bleiben, wie bereits bemerkt, vorläufig außer Betracht. Wegen $(\mathfrak{A}_\lambda' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda') = (\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) \neq 0$ $(\lambda = 1, \ldots, \varrho)$ dürfen $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ und $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ [bzw. $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$ und $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$] $(\mu = 2, 3, \ldots, \varrho)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Infolgedessen kann die ganze Zahl l stets so bestimmt werden, daß $(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\mu') \neq 0$ und $(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{A}}_\mu') \neq 0$ werden $(\mu = 2, \ldots, \varrho)$. Wird das so erhaltene System der $\mathfrak{A}_\lambda'$, $\mathfrak{B}_\lambda'$ wiederum mit $\mathfrak{A}_\lambda$, $\mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = 1, \ldots, \varrho)$ bezeichnet, so lassen sich in gleicher Weise und ohne Änderung von $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$, $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$, $(\mathfrak{A}_\mu \overline{\mathfrak{A}}_\nu)$ usw. auch die $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{A}}_\mu)$, $(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)$ von Null verschieden machen. Und ebenso verfährt man dann sukzessive für die Periodenpaare $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ usw.

Unter diesen Annahmen betrachte man zunächst die Periodenpaare $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{B}_2$ und transformiere sie wie folgt (Transf. (2) und (4)):

$$(4') \qquad \begin{aligned}
&\mathfrak{A}_1' = -\mathfrak{B}_1, &&\mathfrak{A}_2' = -\mathfrak{B}_2 + m\mathfrak{B}_1,\\
&\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1 + n\mathfrak{A}_2 + m\mathfrak{B}_2 - mn\mathfrak{B}_1, &&\mathfrak{B}_2' = \mathfrak{A}_2 + m\mathfrak{B}_1,
\end{aligned}$$

wo m und n ganze rationale, im übrigen beliebige Zahlen sind; alle übrigen $\mathfrak{A}_\mu$, $\mathfrak{B}_\mu$ $(\mu = 3, 4, \ldots, \varrho)$ sollen unverändert bleiben.

Vermöge (4′) gilt dann weiter:

$$(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) + n(\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1) + m(\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$

$$(\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{B}}_2') = (\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_2) - n(\mathfrak{A}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1) - m(\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$

$$(\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{A}}_1') = (\mathfrak{B}_2 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$

$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = -(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -n[(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)] - n^2(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1),$$
$$(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -m[(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)] - 2mn(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) - m^2(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) + (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1).$$

§ 4.

Fallunterscheidung.

Nun sind die folgenden Möglichkeiten vorhanden:

A. *Die reellen, von Null verschiedenen Größen* $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *und* $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *stehen in irrationalem Verhältnisse.* Dann lassen sich die ganzen rationalen Zahlen m und n so bestimmen, daß $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ positiv und kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Zahl ε wird. Wählt man $\varepsilon < h^2$ [vgl. (I)], so gilt

$$\sum_{\nu=2}^{\varrho}(\mathfrak{A}_\nu'\overline{\mathfrak{B}}_\nu') > 0 .$$

Infolgedessen genügt es zur Erreichung des hier in Betracht kommenden Zweckes — d. i. Transformation des vorgegebenen Periodensystems auf die Normalform — unter Weglassung von $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{B}_1'$ das Periodensystem $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{B}_2'$, …, $\mathfrak{A}_\varrho'$, $\mathfrak{B}_\varrho'$ weiter zu reduzieren, wobei man wiederum entweder auf den genannten Fall A oder auf den nun zu behandelnden Fall B geführt wird.

B. *Die Quotienten* $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1):(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1):(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1):(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$ sowie $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1):(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$ *sind sämtlich rational.* Vermöge der Transformationen (2) und (3) kann nämlich jeder dieser Quotienten in der unter A angegebenen Weise zur Reduktion verwandt werden, sobald er einen irrationalen Wert besitzt.

Im Falle B sind daher die 4 Größen $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1)$, $(\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1)$ bis auf einen gemeinsamen, nicht verschwindenden Faktor δ ganze rationale, von Null verschiedene Zahlen r, s, t, u, d. h.

$$(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) = \delta\cdot r, \quad (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{A}}_1) = \delta\cdot s, \quad (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{B}}_1) = \delta\cdot t, \quad (\mathfrak{B}_2\overline{\mathfrak{A}}_1) = \delta\cdot u .$$

§ 5.

Untersuchung des Falles B.

Unter Zugrundelegung der am Schlusse des § 4 gewählten Annahmen und Bezeichnungen ergibt sich

$$\mathfrak{A}_2 = \delta\cdot[r\mathfrak{A}_1 - s\mathfrak{B}_1]:(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$\mathfrak{B}_2 = \delta\cdot[t\mathfrak{A}_1 - u\mathfrak{B}_1]:(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1)\cdot(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2) = \delta^2\cdot[st - ru], \tag{5}$$

und hieraus weiter vermöge $(4')$

$$(6)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) + \delta\cdot[nr+mt], \\ (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2) - \delta\cdot[nr+mt], \end{cases}$$

$$(7)\qquad \varDelta' = (\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') - (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \varDelta + 2\delta\cdot[nr+mt],$$

wobei

$$\varDelta = (\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) - (\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)$$

gesetzt ist.

Ferner gilt

$$(8)\qquad \begin{cases} (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,n\varDelta - \delta\cdot[n^2r+u], \\ (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') = -\,m\varDelta - \delta\cdot[2mnr+m^2t-s], \\ (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = -\,\delta\cdot r, \\ (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{A}}_1') = \quad\delta\cdot t. \end{cases}$$

Dabei kann $\varDelta$ als von Null verschieden vorausgesetzt werden. Denn andernfalls wäre dies durch eine Transformation $(4')$ $[m=0,\ n=1]$ zu erreichen und es können sodann, nötigenfalls, und ohne daß $\varDelta=0$ wird, wieder r, s, t und u von Null verschieden gemacht werden, solange nur $(\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2\overline{\mathfrak{B}}_2)$ beide von Null verschieden bleiben (§ 3); diese Voraussetzung liegt dem Folgenden zugrunde.

Die Betrachtung von $(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ und $(\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ in (8) ergibt nun wiederum zwei Möglichkeiten: *Entweder ist das Verhältnis von $\varDelta$ und δ irrational*; dann ist unter der Annahme $m=0$, $n=1$ für die transformierten Periodenpaare $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{B}_1'$; $\mathfrak{A}_2', \mathfrak{B}_2'$ die Annahme A erfüllt.

Oder es gilt $\varDelta = \delta\cdot v$, wo bei geeigneter Verfügung über δ die Zahlen r, s, t, u und v sämtlich ganze rationale, von Null verschiedene Zahlen sind, die keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen.

Um auch für diesen Fall, und wenn r und t nicht schon von vornherein teilerfremd sind, die Reduktion auf eine Normalform zu erreichen, genügt folgende Bemerkung: *Man kann über die ganzen rationalen Zahlen m und n so verfügen, daß $(\mathfrak{B}_2, \overline{\mathfrak{B}}_1)$ und $(\mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{B}}_1)$* — nötigenfalls nach Vertauschung von $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ (Transf. (2)) — *bis auf den gemeinsamen Faktor δ, von Null verschiedene, ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden.*

Zum Beweise bezeichne man mit q_1 (bzw. q_2) den größten gemeinsamen Teiler von r, u, v (bezw. r, s, t, v), setze also

$$r = q_1 r_1,\ u = q_1 u_1,\ v = q_1 v_1 \quad\text{bzw.}\quad r = q_2 r_2,\ s = q_2 s_2,\ t = q_2 t_2,\ v = q_2 v_2.$$

Dann hat man

$$\begin{aligned} (\mathfrak{B}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') &= -\,\delta\cdot q_2[mv_2 + 2mnr_2 + m^2t_2 - s_2] = \delta\cdot\tau_2(m,n), \\ (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_1') &= -\,\delta\cdot q_1[nv_1 + n^2r_1 + u_1] \qquad\qquad = \delta\cdot\tau_1(n). \end{aligned}$$

q_1 und q_2 sind teilerfremd, da r, s, t, u und v keinen gemeinsamen Teiler besitzen sollten; ebenso sind v_2, r_2, t_2, s_2 (bzw. v_1, r_1, u_1) ohne gemeinsamen Teiler.

Nun gilt der leicht zu beweisende Satz: Gegeben sei die Form $Q(n) = an^2 + bn + c$, deren Koeffizienten a, b, c ganze rationale, von Null verschiedene Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sein sollen. Dann kann die ganze Zahl n stets (sogar auf unendlich viele Arten) so gewählt werden, daß die (ganze rationale) Zahl $Q(n)$ von Null verschieden und zu einer beliebig vorgegebenen Zahl f teilerfremd ist; ausgeschlossen ist der Fall $c \equiv 0 \pmod 2$, $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$, in welchem $Q(n)$ stets den Teiler 2 besitzt. Der Satz bleibt indes auch dann noch richtig, soweit nur der Teiler 2 nicht in Frage kommt.

Dieser Satz werde auf die beiden quadratischen Formen $\tau_1(n)$ und $\tau_2(m, n)$ angewandt. — Zuvor bemerke man: Falls $q_1 \equiv 0 \pmod 2$, ist $\tau_2(m, n)$ nicht unbedingt durch 2 teilbar und umgekehrt muß $q_2 \not\equiv 0 \pmod 2$ sein, wenn $\tau_2(m, n)$ unbedingt durch 2 teilbar ist. Wegen der Teilerfremdheit von q_1 und q_2 muß ja, $q_1 \equiv 0 \pmod 2$ vorausgesetzt, $q_2 \equiv 1 \pmod 2$ sein. Wegen $q_1 v_1 = q_2 v_2 \equiv 0 \pmod 2$ muß daher $v_2 \equiv 0 \pmod 2$ sein; also ist die Bedingung für die unbedingte Teilbarkeit von $\tau_2(m, n)$ durch 2 nicht erfüllt. Gleiches gilt für q_2 und $\tau_1(n)$. — Ist nun z. B. $\frac{\tau_1(n)}{q_1}$ unbedingt durch 2 teilbar, also $q_2 \equiv v_1 \equiv r_1 \equiv 1 \pmod 2$, $u_1 \equiv 0 \pmod 2$, so sei etwa $q_1 \equiv 0 \pmod 2$. Es bezeichne q_3 den größten gemeinsamen Teiler von s_2 und t_2, so daß also q_3 zu q_1 teilerfremd ist. Man bestimme $n = n_0$ so, daß $(v_2 + 2n_0 r_2)$ von Null verschieden und daß $\frac{\tau_1(n_0)}{q_1}$ teilerfremd wird zu q_2 und q_3, was dem Vorhergehenden zufolge stets möglich ist. Dann wird auch $\tau_1(n_0)$ teilerfremd zu q_2 und q_3. Wegen $q_1 v_1 = q_2 v_2$, $q_1 \equiv 0$, $q_2 \equiv 1$ gilt $v_2 \equiv 0 \pmod 2$ und mithin ist $\tau_2(m, n_0)$ nicht unbedingt durch 2 teilbar. Man kann daher schließlich $\tau_2(m, n_0)$ durch passende Wahl von $m = m_0$ teilerfremd zu $\tau_1(n_0)$ machen. Diskutiert man in dieser Art alle Möglichkeiten, so ergibt sich: Die ganzen Zahlen m und n können stets so bestimmt werden, daß $\tau_1(n)$ und $\tau_2(m, n)$ teilerfremde, ganze, von Null verschiedene Zahlen werden, es sei denn $v_2 \equiv t_2 \equiv v_1 \equiv r_1 \equiv 1 \pmod 2$, $s_2 \equiv u_1 \equiv 0 \pmod 2$ und folglich $q_1 \equiv q_2 \equiv 1 \pmod 2$.

Im Falle aber dies stattfindet, vertausche man zunächst (Transf. (2)) $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$, d. h. man setze

$$\mathfrak{A}_1' = -\mathfrak{B}_1, \quad \mathfrak{B}_1' = \mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2' = \mathfrak{A}_2, \quad \mathfrak{B}_2' = \mathfrak{B}_2.$$

Jetzt ist

$$(\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{B}}_1') = \delta \cdot r' = \delta \cdot s, \quad (\mathfrak{A}_2' \overline{\mathfrak{A}}_1') = \delta \cdot s' = -\delta \cdot r, \quad (\mathfrak{B}_2' \overline{\mathfrak{B}}_1') = \delta \cdot t' = \delta \cdot u,$$
$$(\mathfrak{B}_2' \overline{\mathfrak{A}}_1') = \delta \cdot u' = -\delta \cdot t$$

und die Bedingungen des in Rede stehenden Ausnahmefalles sind bei dem transformierten System wegen

$$s' \equiv r \equiv 1 \pmod 2, \quad u' \equiv t \equiv 1 \pmod 2$$

nicht mehr erfüllt.

§ 6.

Erledigung des Falles B.

Nunmehr läßt sich auch der Fall B erledigen.

Sei zunächst $\varrho = 2$. Dem im § 5 Bewiesenen zufolge können r und t stets von Null verschieden und teilerfremd vorausgesetzt werden. Übt man nun auf das so vorbereitete gegebene Periodensystem die Transformation (4') aus, so gilt zufolge (7)

$$\Delta' = \delta \cdot (v + 2[nr + mt]).$$

Je nachdem $v \equiv 0 \pmod 2$ oder $v \equiv 1 \pmod 2$ ist, kann man daher erreichen, daß $\Delta' = 0$ oder daß $\Delta' = \delta$ wird. Für $\Delta' = 0$ ist aber $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1') = (\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \frac{h^2}{2} > 0$ und damit ist das gegebene Periodensystem auf eine Normalform gebracht.

Für $\Delta' = \delta$ benutze man hingegen die Ungleichung

$$(\Delta')^2 + 4(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') > 0.$$

Außerdem ist zufolge (5) und (6)

$$(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \delta^2[(st - ru) - (nr + mt)v - (nr + mt)^2] = \delta^2 \cdot R,$$

wo R eine ganze rationale Zahl bedeutet, die unter Umständen auch Null sein kann. Also

$$(\Delta')^2 + 4(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2') = \delta^2[1 + 4R] > 0,$$

woraus $R \geqq 0$ folgt. Die beiden reellen Zahlen $(\mathfrak{A}_1'\overline{\mathfrak{B}}_1')$ und $(\mathfrak{A}_2'\overline{\mathfrak{B}}_2')$ sind daher entweder beide positiv oder eine ist positiv, die andere aber Null, d. h. die Zurückführung des gegebenen Periodensystems auf eine Normalform ist auch hier geleistet.

Liegt der *Fall* $\varrho = 3$ vor, so existieren entweder zwei Periodenpaare, für welche die Annahme A des § 4 zutrifft, oder es gilt allgemein

$$\left.\begin{aligned} (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta_{k_2k_1} \cdot r_{k_2k_1},\ (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{A}}_{k_1}) = \delta_{k_2k_1} \cdot s_{k_2k_1} \text{ usw.} \\ \Delta_{k_2k_1} = (\mathfrak{A}_{k_1}\overline{\mathfrak{B}}_{k_1}) - (\mathfrak{A}_{k_2}\overline{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \delta_{k_2k_1} \cdot v_{k_2k_1} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} k_1, k_2 = 1, 2, 3; \\ k_1 \neq k_2. \end{aligned}$$

Dabei ist $\delta_{k_2k_1} = \delta_{k_1k_2}$ und es bedeuten $r_{k_2k_1}$, $s_{k_2k_1}$ usw. rationale, von Null verschiedene Zahlen. Man betrachte außerdem die automorphen Transformationen der Form

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}'_{k_0} &= \mathfrak{A}_{k_0} + l_1 \mathfrak{A}_{k_1} + l_2 \mathfrak{A}_{k_2}, & \mathfrak{A}'_{k_1} &= \mathfrak{A}_{k_1}, & \mathfrak{A}'_{k_2} &= \mathfrak{A}_{k_2}, \\ \mathfrak{B}'_{k_0} &= \mathfrak{B}_{k_0}, & \mathfrak{B}'_{k_1} &= \mathfrak{B}_{k_1} - l_1 \mathfrak{B}_{k_0}, & \mathfrak{B}'_{k_2} &= \mathfrak{B}_{k_2} - l_2 \mathfrak{B}_{k_0},\end{aligned}$$

wo k_0, k_1, k_2 irgendeine Permutation der Zahlen 1, 2, 3 darstellen und l_1, l_2 ganze rationale, im übrigen beliebige Zahlen sind.

Es gilt dann

$$(\mathfrak{A}'_{k_0} \bar{\mathfrak{B}}'_{k_0}) = (\mathfrak{A}_{k_0} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0}) + l_1 (\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0}) + l_2 (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$$

und man wird daher entweder wieder auf einen der Annahme A des § 4 entsprechenden Fall geführt oder es stehen auch alle Paare reeller Zahlen $(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$, $(\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_0})$ — welch letztere zufolge § 3 sämtlich von Null verschieden anzunehmen sind — in rationalem Verhältnis. Also kann allgemein gesetzt werden

$$\left.\begin{aligned}(\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) &= \delta \cdot r_{k_2 k_1}, \quad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{A}}_{k_1}) = \delta \cdot s_{k_2 k_1} \quad \text{usw.} \\ \varDelta_{k_2 k_1} &= \delta \cdot v_{k_2 k_1}, \quad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2})(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta^2 \cdot d_{k_2 k_1}\end{aligned}\right\} \begin{aligned} k_1, k_2 &= 1, 2, 3; \\ k_1 &\neq k_2, \end{aligned}$$

unter $r_{k_2 k_1}$, $s_{k_2 k_1}$ usw. rationale Zahlen verstanden.

Aus der letzten Beziehung folgt insbesondere, daß auch die Paare (von Null verschiedener Zahlen) $(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1})$ und $(\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2})$ rationale Verhältnisse bilden. Es ist mithin

$$(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \mu_{k_2 k_1} \cdot h_{k_1}^{(k_2)}, \qquad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \mu_{k_2 k_1} \cdot h_{k_2}^{(k_1)},$$

wo $h_{k_1}^{(k_2)}$, $h_{k_2}^{(k_1)}$ rational und von Null verschieden sind. Da sicher mindestens *eine* der Zahlen $\varDelta_{k_2 k_1}$ von Null verschieden sein muß — andernfalls wäre das gegebene Periodensystem bereits auf eine Normalform gebracht —, so ergibt sich für das zugehörige Indexpaar k_2, k_1 die Beziehung

$$\varDelta_{k_2 k_1} = \delta \cdot v_{k_2 k_1} = \mu_{k_2 k_1} (h_{k_1}^{(k_2)} - h_{k_2}^{(k_1)}).$$

Es stimmt also $\mu_{k_2 k_1}$ bis auf einen rationalen Faktor mit δ überein und man hat

$$(\mathfrak{A}_{k_1} \bar{\mathfrak{B}}_{k_1}) = \delta \cdot h_{k_1}, \quad (\mathfrak{A}_{k_2} \bar{\mathfrak{B}}_{k_2}) = \delta \cdot h_{k_2},$$

wo h_{k_1}, h_{k_2} rational sind.

Unter Festhalten des zuletzt betrachteten Indexpaares k_2, k_1 wähle man δ so, daß die $r_{k_2 k_1}$, $s_{k_2 k_1}$, $t_{k_2 k_1}$, $u_{k_2 k_1}$, $v_{k_2 k_1}$ ganze rationale Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden. Dann werden auch h_{k_1} und h_{k_2} ganze rationale Zahlen. Tatsächlich sind ja $\varDelta = \delta \cdot (h_{k_1} - h_{k_2})$ und $\delta \cdot h_{k_1} h_{k_2}$, vom Faktor δ abgesehen, ganze rationale Zahlen, woraus die Behauptung folgt.

Vermittelst einer Transformation (4′) bilde man jetzt aus $\mathfrak{A}_{k_1}$, $\mathfrak{B}_{k_1}$ und $\mathfrak{A}_{k_2}$, $\mathfrak{B}_{k_2}$ zwei neue Periodenpaare, für welche die zugehörigen Zahlen r, s, t, u, v ganzzahlig und von Null verschieden bleiben und überdies r und t teilerfremd sind; die neuen Werte von h_{k_1} und h_{k_2} sind ebenfalls ganzzahlig. Daher lassen sich bei erneuter Anwendung von (4′) die dort auftretenden ganzen Zahlen m und n so bestimmen, daß in

$$(\mathfrak{A}'_{k_1}\overline{\mathfrak{B}}'_{k_1}) = \delta\,(h_{k_1} + r_{k_2 k_1} n + t_{k_2 k_1} m)$$

die rechte Seite Null wird, womit die Anzahl $(p - \varrho)$ von Periodenpaaren, für welche $(\mathfrak{A}\overline{\mathfrak{B}}) = 0$ ist, um Eins erhöht und der betrachtete Fall auf bereits erledigte zurückgeführt wird.

Für $\varrho > 3$ gelten die eben angestellten Überlegungen unverändert.

Die in den §§ 4, 5 und 6 angestellten Überlegungen lassen bei einiger Modifikation erkennen, daß die Reduktion eines beliebig vorgegebenen Periodensystems auf eine Normalform stets durch eine endliche Anzahl von Operationen erreicht werden kann. Eine Vorschrift für derartige Reduktionen ergibt sich gleichfalls aus dem Vorstehenden.

§ 7.

Die kleinste Anzahl ϱ^* positiver Terme $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda)$, die bei der Transformation eines vorgegebenen Periodensystems auf eine Normalform erreicht werden kann.

Es hat sich im vorhergehenden ergeben, daß jedes vorgelegte, der Bedingung (I) genügende Periodensystem [auf mindestens eine Weise] in eine Normalform transformiert werden kann. Ist nun für ein vorgegebenes Periodensystem diese Überführung auf mehrfache Weise möglich und ergeben sich dabei verschiedene Werte von ϱ, so liefert (mindestens) eine der so erreichbaren Normalformen den *kleinstmöglichen Wert von* ϱ, der *mit* ϱ^* *bezeichnet werde.* Beispiele dafür, daß die Normalform nicht eindeutig bestimmt zu sein braucht und daß dabei ϱ verschiedener Werte fähig sein kann, lassen sich leicht angeben.

Es wäre nun von vornherein nicht undenkbar, daß die Ordnung ϱ vermöge automorpher ganzzahliger Transformationen sich stets etwa auf den Wert $\varrho^* = 1$ herabdrücken ließe, womit der oben eingeführte Begriff der Minimalzahl ϱ^* überflüssig würde. Daß dem nicht so ist, lehrt der folgende Satz:

Es existieren Periodensysteme, für die p und ϱ^* $(1 \leqq \varrho^* \leqq p)$ beliebig vorgegebene (ganze) Zahlen sind.

Zum Beweise betrachte man die allgemeine Form der automorphen Substitutionen. Setzt man

$$\mathfrak{A}'_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{p} [\alpha_{\iota\varkappa}\mathfrak{A}_\varkappa + \beta_{\iota\varkappa}\mathfrak{B}_\varkappa], \quad \mathfrak{B}'_\iota = \sum_{\varkappa=1}^{p} [\gamma_{\iota\varkappa}\mathfrak{A}_\varkappa + \delta_{\iota\varkappa}\mathfrak{B}_\varkappa], \quad \iota = 1, \ldots, p,$$

so hat die Determinante D der ganzzahligen Koeffizienten α, β, γ, δ den Wert Eins[18]). Ferner gilt

$$(9)\qquad (\mathfrak{A}_\iota'\overline{\mathfrak{B}}_\iota') = \sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{\lambda=\varkappa+1}^{p}[L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}(\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{A}}_\lambda) + M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}(\mathfrak{B}_\varkappa\overline{\mathfrak{B}}_\lambda)] + \sum_{\varkappa=1}^{p}\sum_{\lambda=1}^{p} N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}(\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{B}}_\lambda),$$

wo gesetzt ist

$$L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \alpha_{\iota\varkappa}\gamma_{\iota\lambda} - \alpha_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa}, \quad M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \beta_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\delta_{\iota\varkappa}, \quad N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)} = \alpha_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa}.$$

Zur Konstruktion des verlangten Beispiels setze man

$$(10)\quad \begin{cases} (\mathfrak{A}_1\overline{\mathfrak{B}}_1) = h_1, \\ (\mathfrak{A}_\mu\overline{\mathfrak{B}}_1) = r_\mu,\ (\mathfrak{A}_\mu\overline{\mathfrak{A}}_1) = s_\mu,\ (\mathfrak{B}_\mu\overline{\mathfrak{B}}_1) = t_\mu,\ (\mathfrak{B}_\mu\overline{\mathfrak{A}}_1) = u_\mu,\ \mu = 2, \ldots, \varrho^*, \\ (\mathfrak{A}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_1) = r_\nu,\ (\mathfrak{A}_\nu\overline{\mathfrak{A}}_1) = s_\nu = \tau_\nu r_\nu,\ (\mathfrak{B}_\nu\overline{\mathfrak{B}}_1) = t_\nu,\ (\mathfrak{B}_\nu\overline{\mathfrak{A}}_1) = u_\nu = \tau_\nu t_\nu,\ \nu = \varrho^*+1, \ldots, p. \end{cases}$$

Die reellen Größen $h_1, r_2, \ldots, u_{\varrho^*}$; $r_{\varrho^*+1}, \tau_{\varrho^*+1}, \ldots, t_p$, die sämtlich von Null verschieden sein sollen, bilden ein System voneinander unabhängiger Parameter, durch welche sich alle übrigen, in (9) rechter Hand auftretenden Größen $(\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{A}}_\lambda)$ usw. darstellen lassen. Man hat nämlich (vgl. § 5)

$$(11)\quad (\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{A}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(s_\varkappa r_\lambda - s_\lambda r_\varkappa),\ (\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(s_\varkappa t_\lambda - r_\varkappa u_\lambda),\ (\mathfrak{B}_\varkappa\overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = \frac{1}{h_1}(u_\varkappa t_\lambda - u_\lambda t_\varkappa),$$
$$\varkappa, \lambda = 2, 3, \ldots, p.$$

Hierbei ist, im Falle z. B. $\varrho^*+1 \leqq \varkappa \leqq p$, zu beachten, daß $s_\varkappa = \tau_\varkappa r_\varkappa$ usw., und daher $(\mathfrak{A}_\varkappa\overline{\mathfrak{B}}_\varkappa) = 0$.

Man lege nun, was stets möglich ist, den $h_1, r_2, \ldots, u_p$ die weiteren Bedingungen auf:

$$(12)\quad \begin{cases} h_1 > 0, \\ s_\mu t_\mu - r_\mu u_\mu > 0, \qquad \mu = 2, 3, \ldots, \varrho^*; \\ s_\varkappa t_\lambda - r_\varkappa u_\lambda \neq 0,\ s_\varkappa r_\lambda - s_\lambda r_\varkappa \neq 0,\ u_\varkappa t_\lambda - u_\lambda t_\varkappa \neq 0,\ \varkappa, \lambda = 2, \ldots, p;\ \varkappa \neq \lambda. \end{cases}$$

Die Festsetzungen (10) und (12) sagen aus, daß ein zu den Werten $h_1, r_2, \ldots, u_p$ gemäß (10) und (11) gehöriges Periodensystem — und ein solches existiert immer — in der Normalform sich befindet, welche ihrerseits die Ordnung ϱ^* besitzt.

Man drücke vermöge (11) die in (9) auftretenden Faktoren der $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}, M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}, N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ durch die unabhängigen Parameter $h_1, r_2, \ldots, u_{\varrho^*}$; $r_{\varrho^*+1}, \ldots, t_p$ aus und beachte, daß die zu verschiedenen Transformationszahlen $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ usw. gehörigen Faktoren verschieden gebaut sind. Dann erkennt man: Die Parameter $h_1, r_2, \ldots, t_p$ lassen sich, im Rahmen der ihnen bereits auferlegten Bedingungen, so bestimmen, daß die Faktoren der Transformationszahlen $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}, M_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}, N_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ — wobei von $N_{\nu\nu}^{(\iota)}$ $(\nu = \varrho^*+1, \ldots, p)$

[18]) Vgl. Stahl, l. c. [16]), S. 322.

wegen $(\mathfrak{A}_\nu \overline{\mathfrak{B}}_\nu) = 0$ abgesehen wird — von Null verschieden und linear unabhängig werden, wenn für die $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ usw. nur ganzzahlige Werte zugelassen werden.

Sind die $h_1, r_2, \ldots, u_p$ derart bestimmt, dann ist ϱ^* tatsächlich der Minimalwert der durch automorphe Transformationen zu erreichenden Ordnung. Wenn nämlich für irgendeinen Wert ι $(1 \leqq \iota \leqq p)$ die Bedingung $(\mathfrak{A}'_\iota \overline{\mathfrak{B}}'_\iota) = 0$ erfüllt wird, so müssen, von den $N_{\nu\nu}^{(\iota)}$ $(\nu = \varrho^* + 1, \ldots, p)$ abgesehen, sämtliche Transformationszahlen $L_{\varkappa\lambda}^{(\iota)}$ usw. Null sein. Man hat also

$$\alpha_{\iota\varkappa}\gamma_{\iota\lambda} - \alpha_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa} = 0, \quad \beta_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\delta_{\iota\varkappa} = 0, \quad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, p;$$

$$\alpha_{\iota\varkappa}\delta_{\iota\lambda} - \beta_{\iota\lambda}\gamma_{\iota\varkappa} = 0, \quad \varkappa, \lambda = 1, \ldots, p \text{ und nicht gleichzeitig}$$
$$\varrho^* + 1 \leqq \varkappa \leqq p \text{ sowie } \varkappa = \lambda.$$

Wegen $D = 1$ folgt hieraus $\alpha_{\iota\mu} = \beta_{\iota\mu} = \gamma_{\iota\mu} = \delta_{\iota\mu} = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, \varrho^*)$. Gäbe es nun mehr als $(p - \varrho^*)$ verschiedene Indizes ι, für welche $(\mathfrak{A}'_\iota \overline{\mathfrak{B}}'_\iota) = 0$, so müßte $D = 0$ sein, was bei einer automorphen Substitution nicht eintreten kann.

Inwieweit durch die in den §§ 4, 5 und 6 vorgenommenen Operationen der Minimalwert ϱ^* tatsächlich erreicht wird, wurde nicht entschieden und ist für die Zwecke vorliegender Arbeit auch ohne Bedeutung. Die eben angestellte Untersuchung läßt indes erkennen, wie man vorzugehen hat, um zu entscheiden, ob die Ordnung eines in der Normalform vorgelegten Periodensystems bereits den kleinsten Wert ϱ^* besitzt oder nicht.

§ 8.

Weitere Reduktion der Perioden.

Zum Zwecke der Konstruktion einer Riemannschen Parallelogrammfigur, welche zu einer vorgegebenen Normalform von der Ordnung ϱ gehört, muß diese Normalform weiter reduziert werden; dabei wird sich die Reduktion ausschließlich auf jene $(p - \varrho)$ Periodenpaare $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda$ $(\lambda = p - \varrho + 1, \ldots, p)$ beschränken, für welche

$$(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$$

ist.

Unter diesen werden zunächst diejenigen Periodenpaare betrachtet, für die $\mathfrak{A}_\lambda \neq 0$ und $\mathfrak{B}_\lambda \neq 0$. Wegen $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$ läßt sich durch Transformationen von der Form (1) (§ 3)

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}'_\lambda &= n_{\lambda 1}\mathfrak{A}_\lambda + m_{\lambda 1}\mathfrak{B}_\lambda \\ \mathfrak{B}'_\lambda &= n_{\lambda 2}\mathfrak{A}_\lambda + m_{\lambda 2}\mathfrak{B}_\lambda \end{aligned}\right\} \quad n_{\lambda 1}m_{\lambda 2} - n_{\lambda 2}m_{\lambda 1} = 1$$

stets bewirken, entweder daß $|\mathfrak{A}'_\lambda| = 0$ oder daß $|\mathfrak{A}'_\lambda|$ und $|\mathfrak{B}'_\lambda|$ beide gleichzeitig beliebig klein werden, je nachdem also $|\mathfrak{A}_\lambda| : |\mathfrak{B}_\lambda|$ rational oder irrational ist.

Auf diejenigen Periodenpaare $\mathfrak{A}_\lambda, \mathfrak{B}_\lambda$, für welche eine Periode, also etwa $\mathfrak{A}_\lambda$ Null, die andere $\mathfrak{B}_\lambda$ hingegen von Null verschieden ist, wende man automorphe Substitutionen der Form an

$$\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1 + k\,\mathfrak{A}_\lambda\,, \quad \mathfrak{A}_\nu' = \mathfrak{A}_\lambda\,,$$
$$\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1 - l\,\mathfrak{A}_\lambda\,, \quad \mathfrak{B}_\nu' = \mathfrak{B}_\lambda - k\,\mathfrak{B}_1 - l\,\mathfrak{A}_1\,,$$

wobei der oben gemachten Annahme entsprechend $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0$ ist. Bei passender Wahl der ganzen, im übrigen beliebigen Zahlen k und l, wird daher [während $\mathfrak{A}_1' = \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1' = \mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_\lambda' = 0$ bleibt] $\mathfrak{B}_\lambda'$ den Bedingungen

$$0 \underset{(=)}{\leq} |(\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda')| < (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1'), \quad 0 \underset{(=)}{\leq} |(\mathfrak{B}_1' \overline{\mathfrak{B}}_\lambda')| < (\mathfrak{A}_1' \overline{\mathfrak{B}}_1')$$

entsprechend angenommen werden können. Geometrisch gesprochen: Deutet man $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_\lambda$ als Punkte in einer (komplexen) Ebene, so kann man stets erreichen, daß $\mathfrak{B}_\lambda$ entweder mit dem Nullpunkt zusammenfällt oder ins Innere bzw. auf eine der vom Nullpunkt ausgehenden Seiten desjenigen Parallelogramms zu liegen kommt, welches die Eckpunkte $0, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1$ besitzt.

Das in den §§ 4, 5 und 6 gewonnene Ergebnis läßt sich daher genauer so formulieren:

Jedes vorgegebene, der Bedingung (I) *genügende System von* $2p$ *Perioden* $\mathfrak{A}_j, \mathfrak{B}_j$ $(j = 1, \ldots, p)$ *ist äquivalent mit einem Periodensystem (in der Normalform), das sich aus Periodenpaaren der folgenden* 4 *Arten zusammensetzt, nämlich aus*

1. ϱ *Periodenpaaren, für die* $(\mathfrak{A}_\varkappa \overline{\mathfrak{B}}_\varkappa) > 0$, $\varkappa = 1, \ldots, \varrho$;
2. σ *Periodenpaaren, für die* $(\mathfrak{A}_\lambda \overline{\mathfrak{B}}_\lambda) = 0$ *und* $0 < |\mathfrak{A}_\lambda| < \varepsilon$, $0 < |\mathfrak{B}_\lambda| < \varepsilon$, $\lambda = \varrho + 1, \ldots, \varrho + \sigma$; wobei unter ε eine positive Größe verstanden wird, die beliebig klein vorgegeben werden kann;
3. τ *Periodenpaaren, für die*
$$\mathfrak{A}_\mu = 0, \ \mathfrak{B}_\mu \neq 0 \ \textit{und} \ 0 \underset{(=)}{\leq} |(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)| < (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$0 \underset{(=)}{\leq} |(\mathfrak{B}_1 \overline{\mathfrak{B}}_\mu)| < (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1),$$
$$\mu = \varrho + \sigma + 1, \ldots, \varrho + \sigma + \tau;$$
4. $(p - \varrho - \sigma - \tau)$ *Periodenpaaren, für die*
$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0, \ \nu = \varrho + \sigma + \tau + 1, \ldots, p.$$

§ 9.

Konstruktion einer zu gegebenem Periodensystem gehörigen Parallelogrammfigur.

Ein vorgegebenes Periodensystem wird zunächst auf die im § 8 angegebene reduzierte Normalform gebracht.

Sodann bilde man mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ als Seiten das gewöhnliche, in einer komplexen w-Ebene liegende Parallelogramm $\mathfrak{p}_1$, dessen Inneres den Flächeninhalt $(\mathfrak{A}_1 \bar{\mathfrak{B}}_1)$ besitzt. In dieses Parallelogramm bette man $(\sigma+\tau)$ geeignet gestaltete parallelogrammatische Rahmen ein, die zu den Periodenpaaren zweiter und dritter Art gehören, deren zugehörigen Flächeninhalte also Null sind. Bei hinreichend klein gewähltem ε ist dies stets möglich[19]) derart, daß von diesen $(\sigma+\tau)$ Rahmen sowie von den Seiten von $\mathfrak{p}_1$ ein $(1+\sigma+\tau)$-fach zusammenhängendes Gebiet mit $2(\sigma+\tau)$ Verzweigungspunkten im Inneren begrenzt wird, das den unendlich fernen Punkt der w-Ebene nicht überdeckt. Ferner hefte man an die so entstandene Parallelogrammfigur diejenigen, richtig orientierten Parallelogramme (positiven Inhalts) an[20]), die den etwa noch vorhandenen Periodenpaaren erster Art $\mathfrak{A}_\varkappa$, $\mathfrak{B}_\varkappa$ $(\varkappa = 2, \ldots, \varrho)$ entsprechen. Die hieraus sich ergebende Parallelogrammfigur stellt ein $(\varrho+\sigma+\tau)$-fach zusammenhängendes Gebiet $\tilde{N}$ mit $2(\varrho+\sigma+\tau-1)$ einfachen, im Innern gelegenen Verzweigungspunkten und von positivem Flächeninhalt dar.

Sofern $\varrho+\sigma+\tau \geqq 2$ *ist,* läßt sich stets ein Punkt $\mathfrak{P}$ der w-Ebene angeben, über welchem mindestens zwei verschiedene innere Punkte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $\tilde{N}$ liegen, die keine Verzweigungspunkte sind. Es seien U_1 bzw. U_2 Umgebungen von $\mathfrak{P}_1$ bzw. $\mathfrak{P}_2$, die folgendermaßen gewählt sind: U_1 und U_2 sind einer hinreichend kleinen Umgebung U von $\mathfrak{P}$ überlagert und relativ unverzweigt bezüglich U; sie gehören dem Innern von $\tilde{N}$ an und gehen durch eine Decktransformation auseinander hervor. Unter Zuhilfenahme von U_1 und U_2 kann man in $\tilde{N}$ passend gewählte, zu den Periodenpaaren der vierten Art gehörige parallelogrammatische Rahmen einbetten. Man braucht zu dem Ende nur aus U_1 im ganzen $(p-\varrho-\sigma-\tau)$ Kreise von genügend kleinem Radius auszustanzen, die weder innere noch Peripheriepunkte miteinander gemein haben, und sodann die gleiche Anzahl dazu kongruenter Kreise längs passend geführter Verzweigungsstrecken an U_2 anzuheften; und zwar soll dieses Anheften so erfolgen, daß jeder neu hinzugefügte Kreis gerade zwei neue Verzweigungspunkte entstehen

---

[19]) Vgl. Klein, l. c. [2]), S. 79; auch Haupt, l. c. [1]), S. 29; ferner das Zitat in Fußnote [21]) vorliegender Arbeit.

[20]) Vgl. Klein, l. c. [2]), S. 74.

läßt und daß seine Peripherie durch eine Decktransformation in eine der durch Ausstanzen gebildeten kreisförmigen Begrenzungslinien übergeht[21]).

Aus der so konstruierten Parallelogrammfigur für die Normalform des gegebenen Periodensystems ergibt sich [etwa mit Hilfe kombinatorischer Methoden oder des Dirichletschen Prinzips] ein Abelsches Integral erster Gattung von der gewünschten Beschaffenheit.

§ 10.

Der Ausnahmefall.

Wie man aus § 9 ersieht, versagt die dort angegebene Konstruktion einer Riemannschen Parallelogrammfigur lediglich dann, wenn $\varrho + \sigma + \tau = 1$, d. h. wenn $\varrho = 1$, $\sigma = \tau = 0$ ist. Dies liegt in der Natur der Sache begründet. Es besteht nämlich der Satz:

Ein Abelsches Integral erster Gattung, dessen Periodensystem entweder die Form hat $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0$, $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, p)$ *oder (allgemeiner) zu einem solchen (im Sinne der Definition des* § 2) *äquivalent ist, kann nur ein elliptisches Integral sein; es ist also notwendig* $p = 1$.

Einen sehr einfachen Beweis dieses Satzes verdanke ich brieflicher Mitteilung von Herrn Wirtinger und gebe ihn mit seiner Erlaubnis hier wieder.

Angenommen, $w = \int\limits_{z_0}^{z} dw$ sei ein Integral erster Gattung mit den angegebenen speziellen Perioden; T sei die zugehörige Riemannsche Fläche. Man bilde mit $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}_1$ als Perioden die Weierstraßsche Sigmafunktion: $\sigma(u; \omega_1, \omega_2)$, wobei also $\omega_1 = \mathfrak{A}_1$, $\omega_2 = \mathfrak{B}_2$. Führt man hierin an Stelle der unabhängig Veränderlichen u das Integral w ein: $u = \int\limits_{z_0}^{z} dw$, so zeigt die Betrachtung des über die Begrenzung von T' erstreckten Integrals $\int d[\log(\sigma(w; \omega_1, \omega_2))]$, daß $\sigma(w; \omega_1, \omega_2)$ auf der zu w gehörigen Fläche T' nur eine einzige Nullstelle besitzt. Infolgedessen sind jetzt $\frac{d^2 \log \sigma}{du^2}$, $\frac{d^3 \log \sigma}{du^3}$, ... algebraische Funktionen des in Rede stehenden Gebildes T, die nur einen einzigen Pol zweiter bzw. dritter usw. Ordnung besitzen. Nach dem Weierstraßschen Lückensatze ist daher das Geschlecht von T gleich Eins.

Man ersieht aus dem eben Bewiesenen, daß in diesem (Ausnahme-) Fall *jede* Reduktion des Periodensystems (auf eine Normalform) notwendig zu der in Rede stehenden Normalform $(\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0$, $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{B}_\nu = 0$ $(\nu = 2, \ldots, p)$ führen muß[22]).

[21]) Vgl. auch Thomae, Sammlung von Formeln usw. (Halle 1876, S. 21, Fig. 1).

[22]) Vgl. das Zitat in Fußnote [23]).

Der Satz ergänzt zugleich ein Theorem betreffend die auf elliptische Integrale reduzierbaren Abelschen Integrale erster Gattung. Ein Integral erster Gattung, welches auf ein elliptisches reduzierbar ist, wird nämlich dadurch charakterisiert, daß sein Periodensystem durch „lineare, ganzzahlige“ Transformationen entweder auf die Form

$$\mathfrak{A}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{B}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{A}_2 = \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3 = \ldots = \mathfrak{B}_p = 0, \quad (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0,$$

oder auf die Form

$$\mathfrak{A}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{B}_1 \neq 0, \quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{A}_1}{k}, \quad \mathfrak{B}_2 = \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{B}_3 = \ldots = \mathfrak{B}_p = 0, \quad (\mathfrak{A}_1 \overline{\mathfrak{B}}_1) > 0,$$

wo k eine ganze rationale Zahl $k \geqq 2$ bedeutet, gebracht werden kann [23]). Bezeichnet man, je nachdem der erste oder zweite Fall vorliegt, das *reduzierbare Integral* als *von der ersten* oder *zweiten Art*, so ergibt sich der

Zusatz: *Jedes reduzierbare Integral erster Art ist selbst ein elliptisches Integral.*

Andererseits existieren immer (sogar unbegrenzt viele) Integrale erster Gattung vom Geschlechte $p \geqq 2$, die *zu einem vorgegebenen Periodensystem zweiter Art* gehören und mithin *reduzierbare Integrale zweiter Art vom Geschlechte* $p \geqq 2$ sind. Diese Behauptung ergibt sich aus den Darlegungen des § 9.

Auch der geometrische Inhalt des formulierten Satzes erscheint nicht ohne Interesse, nämlich die Tatsache, daß ein der komplexen w-Ebene überlagertes Gebiet endlicher Blätterzahl notwendig einfach zusammenhängend sein muß, wenn es von einem einzigen parallelogrammatischen Rahmen [24]) begrenzt werden, eine Umgebung des unendlich fernen Punktes der w-Ebene nicht überdecken und eine gerade Anzahl (gegebenenfalls auch Null) einfacher Verzweigungspunkte enthalten soll. Daß dies nicht mehr richtig ist, wenn als Begrenzung ein beliebiger, einfacher geschlossener Streckenzug zugelassen wird, beweisen Beispiele. Doch soll hier darauf nicht näher eingegangen werden.

Schluß.

Schließlich ist auf Untersuchungen von Herrn Koebe [25]) hinzuweisen. Aus diesen geht unter anderem hervor: Die Gesamtheit der Periodensysteme der Abelschen Integrale erster Gattung vom Geschlecht p bildet ein offenes, zusammenhängendes, $4p$-dimensionales Kontinuum. Der in

[23]) Vgl. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903, S. 474, Satz II).

[24]) Der sich selbst nicht schneidet.

[25]) Koebe, Unif. d. algebr. Kurven IV (Math. Ann. 75, 1914, I. Teil, S. 51—98).

§ 1 angegebene und oben bewiesene Satz bestimmt die vollständige Begrenzung dieses Kontinuums.

Wie sich die im vorstehenden behandelte Frage einer allgemeineren, betreffend die Prymschen Funktionen, unterordnet, habe ich bereits früher dargelegt[26]).

Der Satz des § 10 läßt sich verallgemeinern[27]).

Karlsruhe i. B., 24. April 1919.

[26]) Haupt, l. c. [1]), S. 61.

[27]) Vgl. hierzu auch Wirtinger, Untersuchungen über Thetafunktionen (Leipzig 1895, S. 73).

(Eingegangen am 27. Mai 1919.)