

Näherungsformeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und unbeschränkt veränderliche Werte des Index.

Von

P. DEBYE in München.

---

§ 1.

**Vorbemerkungen.**

In der ausgedehnten Literatur der Zylinderfunktionen findet man fast ausschließlich zwei Arten von Reihenentwicklungen, die übrigens der Natur der für diese Funktionen geltenden Differentialgleichung — wir schreiben sie

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{\alpha^2}{x^2}\right) u = 0 \quad —$$

am unmittelbarsten angepaßt sind. Bei der einen Art geht man vom singulären Punkt  $x = 0$  aus, dieselben schreiten nach positiven Potenzen von  $x$  fort und sind in der ganzen Ebene konvergent. Bei der zweiten Art bildet der wesentlich singuläre Punkt  $x = \infty$  den Ausgangspunkt, die betreffenden von Hankel am eingehendsten untersuchten Reihen schreiten nach negativen Potenzen von  $x$  fort und sind semikonvergent im Sinne Poincarés. Während die erste Art der Entwicklung nur für kleine Werte von  $x$  zur wirklichen numerischen Rechnung praktisch brauchbar ist, sollen die Hankelschen Entwicklungen dasselbe leisten für den Fall sehr großer Werte des Arguments. Indessen sieht man aus den betreffenden Formeln sofort, daß letzteres nur zutrifft, solange der Index  $\alpha$  im Vergleich mit dem Argumente  $x$  eine kleine Zahl ist, ein Umstand, der ihrer Verwertung bei allen denjenigen optischen Problemen eine Grenze steckt, bei denen die Abmessungen der vom Lichte getroffenen Körper groß gegenüber der Wellenlänge sind. Ähnliches gilt ganz allgemein bei kleiner Wellenlänge, nicht nur im Falle von Zylinder- oder Kugel-Symmetrie; die dann auftretenden Schwierigkeiten sind in analoger Weise zu überwinden. Handelt es sich z. B. um die Berechnung des elektromagnetischen Feldes um einen von einer ebenen einfallenden Welle getroffenen Zylinder, so erhält

man für eine Komponente des elektrischen Feldes ohne Mühe eine Darstellung, die fortschreitet nach Zylinderfunktionen (oder komplizierteren Komplexen solcher Funktionen), deren Argument der großen Zahl: Zylinderradius durch Wellenlänge proportional ist und deren Index alle Werte von Null bis  $\infty$  durchläuft. Zu dem Werte dieser Reihe tragen auch noch diejenigen Glieder wesentlich bei, für die  $\alpha$  mit  $x$  vergleichbar wird, in welchem Falle die Hankelschen Entwicklungen versagen. Es wird deshalb im folgenden unsre Aufgabe sein, solche *Entwicklungen anzugeben, welche die Zylinderfunktionen asymptotisch ersetzen können für große Werte des Arguments bei unbeschränkt veränderlichen Werten des Index*. Dabei wollen wir uns auf den einfachsten Fall beschränken, daß sowohl  $\alpha$  wie  $x$  reell sind. Die Ausdehnung auf komplexe Werte von  $\alpha$  und  $x$ , die übrigens nach demselben Verfahren gemacht wird, werde ich gelegentlich an anderer Stelle mitteilen. Wie die betreffenden Formeln zu benutzen sind, habe ich inzwischen bei der Berechnung des Lichtdrucks auf Kugeln in meiner Münchener Dissertation gezeigt, während die Anwendung auf die Theorie der Beugung in einem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Cöln angedeutet wurde.\*) Es sei übrigens bemerkt, daß Lord Rayleigh\*\*) schon darauf hinwies, daß es für die Lösung der optischen Probleme bei Kugeln und Zylindern notwendig sei, näherungsweise Darstellungen der Zylinderfunktionen der oben definierten Art zu kennen. Wir wollen jetzt im folgenden zeigen, wie man naturgemäß auf solche Darstellungen geführt wird, wenn man für die Zylinderfunktionen die auf komplexem Wege genommenen Integraldarstellungen benutzt. Der Weg der Ableitung an sich ist nicht neu, das Prinzip der Methode wird, wie ich nachträglich bemerkte, klar ausgesprochen in einem von H. A. Schwarz ausgearbeiteten Fragmente des Riemannsches Nachlasses:\*\*\*) „Sullo svolgimento del quoziente di due serie ipergeometriche in frazione continua infinita.“ Das Verfahren wird in dieser Arbeit von Riemann dazu benutzt, den Grenzwert der hypergeometrischen Reihe

$$H(a+n, b+n, c+2n, x)$$

zu bestimmen für sehr große Werte von  $n$ . Mittels derselben Methode bestimmen Graf und Gubler†) in ihrem Buche den Grenzwert

$$\lim_{a=\infty} J_a(ax)$$

\*) Phys. Ztschr. 9, S. 775, 1908 und Verhdl. d. Deutschen physik. Ges. 10, S. 741, 1908.

\*\*) Note on Bessel's Functions, Phil. Mag. 44, S. 337, 1872.

\*\*\*) B. Riemann, Ges. math. Werke und wissenschaftlicher Nachlaß, Leipzig 1876, S. 400.

†) J. H. Graf und E. Gubler, Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen, Bern 1898, Heft 1, S. 96.

der Besselschen Funktion für reelle Werte von  $a$  und  $x$ . Nach einer anderen, mehr formalen Methode wurde das im folgenden behandelte Problem neuerdings in Angriff genommen von J. W. Nicholson\*). Er behandelt mit Anlehnung an Lorenz (Oeuvres scientifiques I, S. 405) nur den speziellen Fall, daß der untere Index die Hälfte einer ungeraden Zahl und kleiner wie das als groß vorausgesetzte Argument ist. In einer späteren Note\*\*) wird auch der Fall betrachtet, daß Argument und Index nahe gleich sind. Von den Entwicklungskoeffizienten  $B_n$  (vgl. die Zusammenstellung in § 7) werden indessen nur die Konstanten Glieder erhalten, so daß sich mit jenen Formeln nicht der Anschluß an die Fälle  $\alpha < x$  oder  $\alpha > x$  erreichen läßt. Die ursprüngliche Formel von Lorenz stimmt, wie man sich leicht überzeugt, mit dem ersten Gliede der Reihen (54) und (55) aus § 7 überein, wenn man  $\alpha = n + \frac{1}{2}$  setzt.

§ 2.

Die Riemannsche Methode in ihrer Anwendung auf die Zylinderfunktionen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die beiden Hankelschen Funktionen  $H_1^\alpha(x)$  und  $H_2^\alpha(x)$  nach der Definition von Nielsen, die im Anschluß an die Arbeit von A. Sommerfeld\*\*\*) über die „Mathematische Theorie der Diffraktion“ dargestellt werden können in der Form:

$$(1) \quad \begin{aligned} H_1^\alpha(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{(1)} e^{-ix \sin \tau} e^{i\alpha \tau} d\tau, \\ H_2^\alpha(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{(2)} e^{-ix \sin \tau} e^{i\alpha \tau} d\tau. \end{aligned}$$

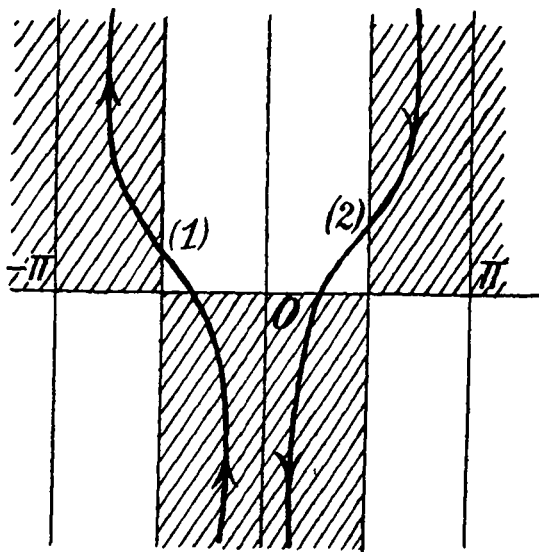


Fig. 1.

Indem wir uns auf reelle Werte von  $x$  beschränken, ist der Weg (1), auf dem das erste Integral zu führen ist, dadurch charakterisiert, daß er zwischen  $\frac{\pi}{2} - i\infty$  und  $-\frac{\pi}{2} - i\infty$  anfängt und zwischen  $-\frac{\pi}{2} + i\infty$  und  $-\frac{3\pi}{2} + i\infty$  endigt, während der Weg (2) des zweiten Integrals

\*) Phil. Mag 14, Ser. VI, 1907, S. 697.

\*\*) Phil. Mag. 16, Ser. VI, 1908, S. 271.

\*\*\*) Math. Ann. 47, S. 317, 1895.

zwischen  $\frac{3\pi}{2} + i\infty$  und  $\frac{\pi}{2} + i\infty$  beginnt und aufhört, wo der Weg (1) anfängt.

Wir befassen uns zunächst mit der zweiten Hankelschen Funktion und schreiben sie in der Form:

$$(2) \quad H_2^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(2)} e^{-x f(\tau)} d\tau,$$

wobei  $f(\tau)$  eine Abkürzung ist für die Funktion

$$(3) \quad f(\tau) = i(\sin \tau - \xi \tau); \quad \xi = \frac{\alpha}{x}.$$

Zerlegt man  $f(\tau)$  in einen reellen und einen imaginären Bestandteil, so daß

$$(4) \quad f(\tau) = R + iJ$$

so ist der absolute Betrag des Integranden  $e^{-xR}$ . Für große Werte von  $x$  wird also nur diejenige Stelle des Integrationsweges in erster Näherung zu berücksichtigen sein, wo  $R$  den kleinsten Wert annimmt. Indem wir  $\tau = a + ib$  setzen, denken wir uns  $R$  als Ordinate einer über der  $a, b$ -Ebene ausgespannten Fläche und wollen jetzt den Integrationsweg so spezialisieren, daß die Ausrechnung des Integrals möglichst vorteilhaft wird.

Zunächst bemerken wir dazu folgendes. Die Integration sei ausgeführt bis zu einem gewissen Punkte; unter allen möglichen Richtungen, die von diesem Punkte ausgehen, wollen wir jetzt diejenige wählen, auf der  $R$  so stark wie möglich zunimmt. Ist  $s$  diese bevorzugte Richtung und  $n$  die dazu senkrechte, so soll also  $\frac{\partial R}{\partial n} = 0$  sein, oder da  $\frac{\partial R}{\partial n} = \frac{\partial J}{\partial s}$ , so ist die Kurve, auf der wir weitergehen müssen, dargestellt durch die Formel:

$$J = \text{const.}$$

Daß wir auf einer solchen Kurve fortschreitend wirklich den vorgeschriebenen Endbereich erreichen werden, ist gar nicht sicher und im allgemeinen auch nicht der Fall. Jedenfalls ist aber klar, daß, wenn wir unsere ganze Integration längs einer Kurve  $J = \text{const.}$  führen können, die Verhältnisse für die Berechnung des Integrals bei großem  $x$  am günstigsten werden. Dementsprechend wollen wir zusehen, ob eine solche Kurve, die überdies die beiden vorgeschriebenen Endbereiche verbindet, wirklich existiert. Beachten wir, daß (aus Konvergenzgründen) diese Gebiete so gewählt sind, daß  $R$  dort positiv unendlich wird, so ist klar, daß, wie auch sonst die Integrationskurve beschaffen ist,  $R$  wenigstens einmal ein Minimum auf dieser Kurve haben muß. Ist nun die Kurve die vorgeschlagene  $J = \text{const.}$ , für die ja nach Definition  $\frac{\partial R}{\partial n}$  überall verschwindet, so muß

sie wenigstens einmal durch einen Punkt hindurchführen, wo der Differentialquotient von  $R$  nach allen Richtungen verschwindet. Ein solcher ist notwendig ein Sattelpunkt; wir haben also das Resultat:

*Nur diejenige Kurve  $J = \text{const.}$ , die durch einen Sattelpunkt hindurchgeht, kann ihre Endpunkte in den vorgeschriebenen Bereichen haben.*

Vor allen Dingen müssen wir uns also klar werden über die Lage der Sattelpunkte in ihrer Abhängigkeit vom Verhältnis  $\frac{\alpha}{x} = \xi$ .

Da im Sattelpunkt  $\frac{\partial R}{\partial s}$  für jede beliebige Richtung  $s$  verschwindet, gilt dasselbe für  $\frac{\partial J}{\partial s}$ , so daß die Lage bestimmt wird durch

$$(5) \quad \frac{df(\tau)}{d\tau} = 0, \text{ d. h. } \cos \tau = \xi.$$

Bekanntlich wird durch (5) die von  $\xi = 1$  bis  $\xi = \infty$  und von  $\xi = -1$  bis  $\xi = -\infty$  aufgeschnittene  $\xi$ -Ebene auf den Streifen  $0 \dots \pi$  der  $\tau$ -Ebene abgebildet, so daß für jeden beliebigen komplexen Wert von  $\xi$  immer ein zugehöriger Sattelpunkt im Inneren des Streifens  $0 \dots \pi$ , z. B. bei  $\tau = \tau_0$ , liegt. Eben solche Punkte liegen dann auch noch bei  $\tau = \tau_0 + 2n\pi$  und bei  $\tau = -\tau_0 + 2n\pi$ , wobei

$$n = 0, 1, 2, 3, \dots, -1, -2, -3, \dots$$

In unserem Falle, bei dem  $\alpha$  und  $x$  beide reell vorausgesetzt werden, ist  $\xi$  stets reell und kann alle Werte von 0 bis  $\infty$  annehmen; der zugehörige Sattelpunkt  $\tau = \tau_0$  geht währenddessen von  $\frac{\pi}{2}$  bis 0 auf der reellen  $\tau$ -Achse und von 0 bis  $0 - i\infty$  auf der imaginären  $\tau$ -Achse, so daß die Werte  $\tau = \frac{\pi}{2}, 0, -i\infty$  den Werten  $\xi = 0, 1, \infty$  entsprechen. Der zweite Sattelpunkt  $\tau = -\tau_0$  bewegt sich dabei von  $-\frac{\pi}{2}$  über 0 nach  $+i\infty$ .

Wir wollen nun zunächst die Kurven  $J = \text{const.}$  untersuchen, die durch unsern Sattelpunkt  $\tau = \tau_0$  hindurchführen. Hier unterscheiden wir zwei Fälle, nämlich

$$1) \quad 0 < \xi < 1, \text{ d. h. } 0 < \alpha < x$$

Sattelpunkt auf der reellen Achse,

$$2) \quad 1 < \xi < \infty, \text{ d. h. } x < \alpha < \infty$$

Sattelpunkt auf der imaginären Achse.

Indem wir noch  $\tau_0 = a_0 + ib_0$  setzen, erhalten wir im Falle 1) (in dem ja  $b_0 = 0$ ) für die durch den Sattelpunkt hindurchgehenden Kurven  $J = \text{const.}$  (vgl. (3)) die Formel:

$$(6) \quad \Im [i (\sin \tau - \tau \cos \tau_0)] = \Im [i (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)]^*$$

\*)  $\Im$  = Imaginärer Bestandteil.

d. h.

$$(6') \quad \sin a \operatorname{Cof} b - a \cos a_0 = \sin a_0 - a_0 \cos a_0$$

oder

$$(6'') \quad \operatorname{Cof} b = \frac{\sin a_0 + (a - a_0) \cos a_0}{\sin a}.$$

Trägt man  $\sin a$  über der  $a$ -Achse auf und beachtet, daß der Zähler der rechten Seite die im Punkte  $a_0$  an diese Kurve gezogene Tangente bedeutet, so sieht man, daß, während  $a$

von 0 bis  $\pi$  geht, die rechte Seite sich von  $\infty$  bis 1 bewegt, welchen letzteren Wert sie bei  $a = a_0$  erreicht, um dann wieder von hier aus bis zum Werte  $+\infty$  bei  $a = \pi$  zu steigen. Die Kurven  $J = \text{const.}$  haben demnach für  $\xi < 1$  immer die in Fig. 2 gezeichnete Gestalt, verlaufen also z. B. ganz innerhalb des Streifens  $0 \dots \pi$ . Dabei entsprechen die spiegelbildlich gleichen Kurvenäste  $B$  und  $A'$  den Werten  $0 < a < a_0$ , die ebenfalls spiegelbildlichen Äste  $A$  und  $B'$  den Werten  $a_0 < a < \pi$ .

Die im Sattelpunkt zusammenstoßenden Winkel sind, wie man leicht einsieht, alle gleich  $\frac{\pi}{2}$ , so daß sich  $A$  stetig in  $A'$ ,  $B$  in  $B'$  fortsetzt. Auf der einen der beiden Kurven ( $BB'$ ) nimmt  $R$  vom Sattelpunkte aus nach beiden

Seiten hin so schnell wie möglich ab, auf der anderen ( $AA'$ ) steigt  $R$  so schnell wie möglich an. Letztere genügt also unserer Bedingung und verbindet überdies die vorgeschriebenen Endbereiche, ist deshalb als Integrationskurve ohne weiteres zu brauchen.

In Fig. 3a ist schematisch der Verlauf von  $R$  auf dieser Integrationskurve dargestellt.

Im Falle 2) ( $\xi > 1$ ) liegt  $\tau_0$  auf der imaginären  $\tau$ -Achse, so daß  $a_0 = 0$  zu setzen ist und wir für die Gleichung der Kurven  $J = \text{const.}$  durch Einsetzen in (6) erhalten:

$$(7) \quad \sin a \operatorname{Cof} b - a \operatorname{Cof} b_0 = 0$$

oder

$$(7') \quad \frac{\operatorname{Cof} b}{\operatorname{Cof} b_0} = \frac{a}{\sin a}.$$

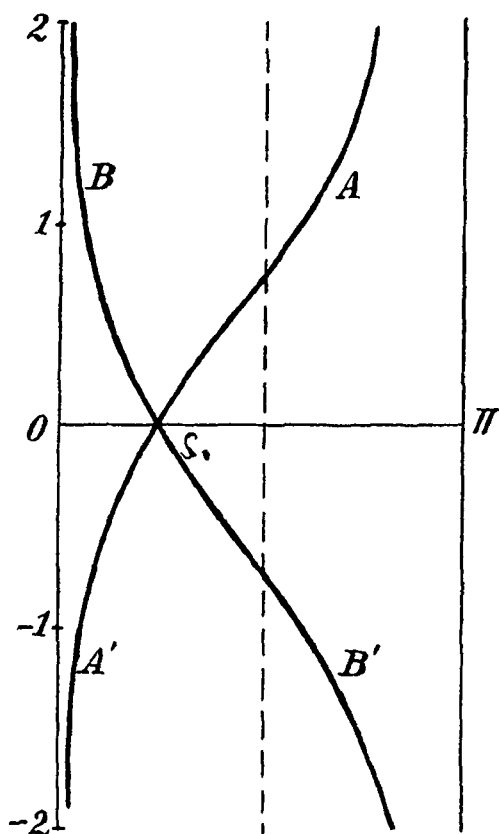


Fig. 2.

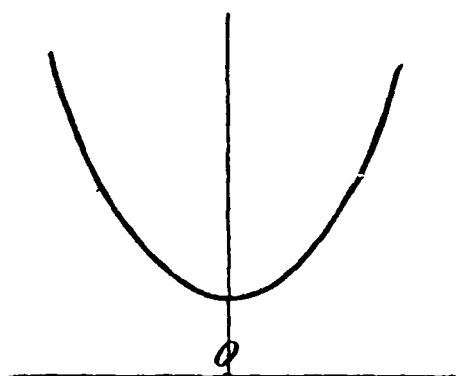


Fig. 3a.

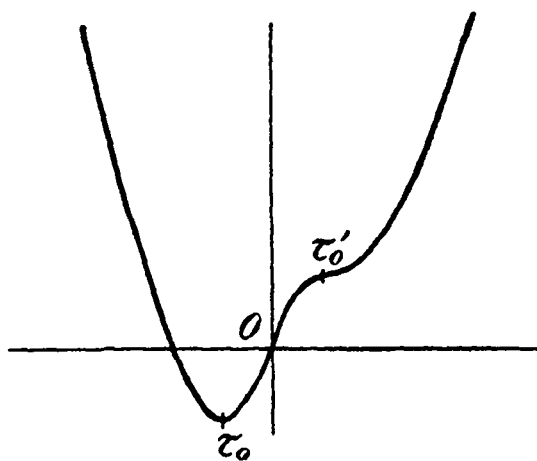


Fig. 3b.

Nach (7) resp. (7') fällt die eine der durch den Punkt  $\tau = \tau_0$  gehenden Kurven  $J = \text{const.}$  zusammen mit der imaginären  $\tau$ -Achse, die andere geht von  $-\pi - i\infty$  über den Sattelpunkt  $\tau_0$  nach  $+\pi - i\infty$ .

Die durch den zweiten Sattelpunkt (vgl. Fig. 4)  $\tau = \tau'_0 = -\tau_0$  durchgehenden Kurven  $J = \text{const.}$  entstehen durch Spiegelung der vorigen Kurven an der reellen  $\tau$ -Achse; wir haben also einerseits wieder die imaginäre  $\tau$ -Achse und zweitens eine Kurve, die von  $-\pi + i\infty$  über den Sattelpunkt  $\tau = \tau'_0$  nach  $+\pi + i\infty$  führt.

Will man jetzt die vorgeschriebenen Endbereiche durch eine Kurve  $J = \text{const.}$  verbinden, so ist man gezwungen, durch die beiden Sattelpunkte  $\tau = -\tau_0$  und  $\tau = +\tau_0$  hindurchzugehen, indem man, wie ohne weiteres aus der Figur ersichtlich, von  $\pi + i\infty$  bis  $\tau = -\tau_0$  die Kurve  $B$  und von  $\tau = -\tau_0$  über  $\tau = \tau_0$  bis  $\tau = -i\infty$  die „Kurve  $A$ “ (imaginäre Achse) benutzt. Auf dem Stück von  $\tau = \pi + i\infty$  über  $\tau = \tau'_0 = -\tau_0$  bis  $\tau = +\tau_0$  nimmt  $R$  beständig ab in einer Weise, wie es Fig. 3b schematisch veranschaulicht, um von hier aus wieder so schnell wie möglich anzusteigen.

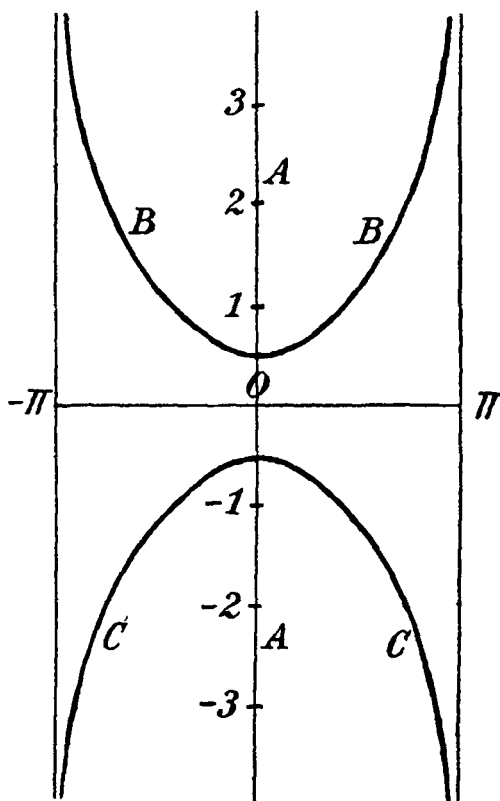


Fig. 4.

Eine Sonderstellung nimmt der Grenzfall  $\xi = 1$  ein; jetzt sind die beiden Sattelpunkte  $\tau = \tau_0$  und  $\tau = -\tau_0$  zusammengefallen im Punkte  $\tau = 0$ , so daß sich  $f(\tau)$  in der Umgebung dieser Stelle (vgl. Gl. (3)) verhält wie  $\tau^2$ . Dementsprechend gehen von diesem Punkte, unter  $60^\circ$  gegen-

einander geneigt, drei Kurven  $J = \text{const.}$  aus: die imaginäre  $\tau$ -Achse  $A$  und die zwei transzendenten Kurven  $B, C$  von der Gleichung:

$$(8) \quad \zeta \operatorname{of} b = \frac{a}{\sin a},$$

die in Fig. 5 gezeichnet sind.

Als Integrationsweg ist offenbar zu wählen: Kurve  $B$  von  $\tau = \pi + i\infty$  bis  $\tau = 0$  und die imaginäre Achse  $A$  von  $\tau = 0$  bis  $\tau = 0 - i\infty$ , auf denen beiden  $R$  von  $\tau = 0$  an so schnell wie möglich wächst. Die Darstellung von  $R$  im Sinne der Fig. 3 würde sich qualitativ mit Fig. 3a decken und nur insofern abweichen, als in der Nähe von  $\tau = \tau_0 = \tau_0'$  eine innigere Berührung mit der Horizontalen stattfindet.

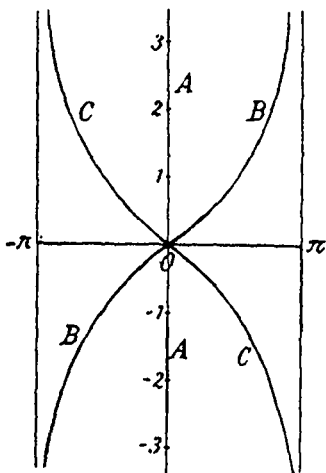


Fig. 5.

Nach Feststellung der Integrationswege bleibt noch übrig, die wirkliche Ausführung der Integration näher ins Auge zu fassen. Um bestimmte Vorstellungen zu haben, wollen wir für die folgende Überlegung Fig. 2 zugrunde legen, d. h. also  $\xi < 1$  voraussetzen. Die anderen Fälle erledigen sich dann genau so. Die Definition des Integrationsweges durch die Formel  $J = J_0 = \text{const.}$  legt es nahe, für die wirkliche Ausführung der Integration nicht die Variable  $\tau$  selbst beizubehalten, sondern  $f(\tau)$

oder  $f(\tau) - \text{const.}$  als neue Integrationsvariable einzuführen. Wählen wir für die Konstante den Wert  $f(\tau_0)$ , den die Funktion  $f(\tau)$  im Sattelpunkt annimmt, so ist in der durch

$$(9) \quad t = f(\tau) - f(\tau_0)$$

definierten  $t$ -Ebene die Integration längs der reellen Achse zu erstrecken. Der einen Hälfte des Weges  $A$  der  $\tau$ -Ebene von  $\tau = \pi + i\infty$  bis  $\tau = \tau_0$  entspricht in der  $t$ -Ebene eine Integration von  $t = +\infty$  bis  $t = 0$ . Beachtet man jetzt, daß in der Nähe des Punktes  $\tau = \tau_0$  die Funktion

$$t = f(\tau) - f(\tau_0)$$

sich gemäß der Definition des Sattelpunktes verhält wie  $(\tau - \tau_0)^2$ , so sieht man, daß der Drehung um den Winkel  $\pi$ , durch die man von einem Punkte der oberen Hälfte des Weges  $A$  auf einen Punkt der unteren Hälfte gelangt, in der  $t$ -Ebene eine Drehung um den Winkel  $2\pi$  entspricht. Die Integration längs der unteren Hälfte des Weges  $A$  geht also in der  $t$ -Ebene über in eine solche von  $t = 0$  bis  $t = +\infty$ . Durch Einführung unserer neuen Integrationsvariablen hat die Integraldarstellung unserer Funktion  $H_2^\alpha(x)$  die Form angenommen

$$(10) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{e^{-xf(\tau_0)}}{\pi} \left( \int_0^\infty e^{-xt} \Phi(t) dt - \int_0^\infty e^{-xt} \Phi_1(t) dt \right),$$



wobei  $\Phi(t)$  sowohl wie  $\Phi_1(t)$  unter Vermittlung von (9) als Funktionen von  $t$  gegeben sind durch die Formeln:

$$(11) \quad \Phi(t), \text{ resp. } \Phi_1(t) = \frac{1}{f'(\tau)}.$$

Diese unterscheiden sich nur durch die Definition der Wurzel  $t^{\frac{1}{2}}$ , nach deren Potenzen sie um den Nullpunkt der  $t$ -Ebene zu entwickeln sind; in erster Näherung ist  $\Phi(t)$  resp.  $\Phi_1(t)$  durch  $\text{const. } t^{-\frac{1}{2}}$  gegeben, wird also in erlaubter Weise unendlich. Dementsprechend erhält man aus dieser Näherung einen asymptotischen Wert für  $H^\alpha$ . Behält man andererseits mehrere Glieder der (nach  $t^{\frac{1}{2}}$  fortschreitenden) Potenzreihen für  $\Phi(t)$  resp.  $\Phi_1(t)$  bei, so ergibt sich für  $H_2^\alpha(x)$  eine aus der entsprechenden Gliederzahl bestehende Reihe, die bei konstant gehaltenem Verhältnis  $\frac{\alpha}{x}$  nach negativen Potenzen von  $x^{\frac{1}{2}}$  fortschreitet. Konvergent wird freilich die so erhaltene Reihe nicht, sie ist aber semikonvergent im Sinne Poincarés\*) und deshalb für die praktische Rechnung vorzüglich geeignet. Die einzige Schwierigkeit, die übrig bleibt, ist also elementarer Natur und besteht in der Bestimmung der Entwicklungskoeffizienten einer nur mittelbar als Funktion von  $t$  dargestellten Größe.

### § 3.

#### Die semikonvergenten Reihen im ersten Fall ( $0 < \alpha < x$ ).

Nach den Erörterungen des § 2 ist für unsere Zwecke die Funktion  $H_2^\alpha(x)$  definiert durch Gleichung (10), so daß es zunächst darauf ankommt, die durch (11) erklärte Funktion  $\Phi(t)$  nach Potenzen von  $t^{\frac{1}{2}}$  zu entwickeln. Man kann hier natürlich in verschiedenster Weise vorgehen; verhältnismäßig übersichtlich wird das Bildungsgesetz der Koeffizienten, wenn man folgendermaßen verfährt. Setzt man vorübergehend:

$$(12) \quad f(\tau) - f(\tau_0) = t = T^2,$$

wobei  $f(\tau)$  die in Gleichung (3) definierte Funktion von  $\tau$  bedeutet, so wird nach (11) und (28):

---

\*) Der Beweis der Semikonvergenz gelingt leicht, indem man für den Rest der abgebrochenen, nach Potenzen von  $t$  fortschreitenden Reihe für  $\Phi(t)$  eine ähnliche Ungleichung beachtet, wie sie z. B. von E. Borel, *Leçons sur les séries divergentes*, Paris 1901, S. 25 nach dem Vorgange Cauchys zum Beweise der Semikonvergenz der Stirlingschen Reihe herangezogen wird.

$$(13) \quad \Phi(t) = \frac{1}{f'(\tau)} = \frac{1}{2T} \frac{d\tau}{dT}.$$

Für  $\tau = \tau_0$ , oder, was dasselbe ist,  $T = 0$  bleibt  $\frac{d\tau}{dT}$  endlich, so daß eine Entwicklung nach positiven Potenzen von  $T$  möglich ist. Setzt man deshalb

$$(14) \quad \frac{d\tau}{dT} = \sum_0^{\infty} a_n T^n,$$

so wird nach Cauchy:

$$(15) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dT}{T^{n+1}} \frac{d\tau}{dT},$$

wobei das Integral um den Nullpunkt der  $T$ -Ebene zu erstrecken ist, oder indem man wieder auf die  $\tau$ -Ebene, mittels (12), zurückgeht:

$$(16) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int \{f(\tau) - f(\tau_0)\}^{-\frac{n+1}{2}} d\tau,$$

wobei der Integrationsweg in der  $\tau$ -Ebene sich in einen Umgang um den Punkt  $\tau = \tau_0$  verwandelt. Gleichung (16) zeigt, daß die fraglichen Koeffizienten sämtlich erhalten werden können durch Entwicklung von

$$\{f(\tau) - f(\tau_0)\}^{-\frac{n+1}{2}}$$

nach Potenzen von  $\tau - \tau_0$ . Sei nämlich:

$$(17) \quad f(\tau) - f(\tau_0) = (\tau - \tau_0)^2 [c_0 + c_1(\tau - \tau_0) + c_2(\tau - \tau_0)^2 + \dots]$$

so ist nach Ausführung der Potenz

$$(18) \quad \begin{aligned} & \{f(\tau) - f(\tau_0)\}^{-\frac{n+1}{2}} \\ &= (\tau - \tau_0)^{-n-1} [a_0(n) + a_1(n)(\tau - \tau_0) + a_2(n)(\tau - \tau_0)^2 + \dots], \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $a$  sich aus einer endlichen Anzahl der Koeffizienten  $c$  und aus der Zahl  $n$  berechnen. Das Cauchysche Residuum dieser Reihe ist dann  $a_0(0)$  für  $n = 0$ ,  $a_1(1)$  für  $n = 1$ ,  $a_2(2)$  für  $n = 2$ , usw. Nach Gleichung (16) wird also  $a_n(n)$  direkt mit dem gesuchten  $a_n$  identisch. Die Ausrechnung liefert:

$$(19) \quad \begin{cases} c_0 = -i \frac{\sin \tau_0}{2!}, & c_1 = -i \frac{\cos \tau_0}{3!}, & c_2 = i \frac{\sin \tau_0}{4!}, \\ c_3 = i \frac{\cos \tau_0}{5!}, & c_4 = -i \frac{\sin \tau_0}{6!}, & \dots, \end{cases}$$

während man allgemein findet:

$$(20) \left\{ \begin{aligned} a_0(n) &= c_0^{-\frac{n+1}{2}}, \\ a_1(n) &= c_0^{-\frac{n+1}{2}} \left[ -\frac{n+1}{1! 2} \frac{c_1}{c_0} \right], \\ a_2(n) &= c_0^{-\frac{n+1}{2}} \left[ -\frac{n+1}{1! 2} \frac{c_2}{c_0} + \frac{(n+1)(n+3)}{2! 2^2} \frac{c_1^2}{c_0^2} \right], \\ a_3(n) &= c_0^{-\frac{n+1}{2}} \left[ -\frac{n+1}{1! 2} \frac{c_3}{c_0} + \frac{(n+1)(n+3)}{2! 2^2} 2 \frac{c_1 c_2}{c_0^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{3! 2^3} \frac{c_1^3}{c_0^3} \right], \\ a_4(n) &= c_0^{-\frac{n+1}{2}} \left[ -\frac{n+1}{1! 2} \frac{c_4}{c_0} + \frac{(n+1)(n+3)}{2! 2^2} \left( 2 \frac{c_1 c_3}{c_0^2} + \frac{c_2^2}{c_0^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n+1)(n+3)(n+5)}{3! 2^3} \frac{c_1^2 c_2}{c_0^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+1)(n+3)(n+5)(n+7)}{4! 2^4} \frac{c_1^4}{c_0^4} \right] \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Durch Einsetzen der vorher angegebenen Werte für  $c_0, c_1, c_2, \dots$  erhält man schließlich:

$$(21) \left\{ \begin{aligned} a_0 &= a_0(0) = + \left( -i \frac{\sin \tau_0}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \\ a_1 &= a_1(1) = - \left( -i \frac{\sin \tau_0}{2} \right)^{-1} \left[ \frac{1}{3} \cotg \tau_0 \right], \\ a_2 &= a_2(2) = + \left( -i \frac{\sin \tau_0}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} \left[ \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0 \right], \\ a_3 &= a_3(3) = - \left( -i \frac{\sin \tau_0}{2} \right)^{-2} \left[ \frac{2}{15} \cotg \tau_0 + \frac{4}{27} \cotg^3 \tau_0 \right], \\ a_4 &= a_4(4) = + \left( -i \frac{\sin \tau_0}{2} \right)^{-\frac{5}{2}} \left[ \frac{3}{128} + \frac{\sqrt{7}}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0 \right] \\ &\dots \end{aligned} \right.$$

Schreibt man zur Abkürzung

$$(22) \quad u = \left( \frac{2it}{\sin \tau_0} \right)^{\frac{1}{2}},$$

so gilt demnach:

$$(23) \quad \Phi(t), \text{ resp. } \Phi_1(t) = \frac{i}{\sin \tau_0} \frac{1}{u} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cotg \tau_0 u + \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0 \right) u^2 \right. \\ \left. - \left( \frac{2}{15} \cotg \tau_0 + \frac{4}{27} \cotg^3 \tau_0 \right) u^3 \right. \\ \left. + \left( \frac{3}{128} + \frac{\sqrt{7}}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0 \right) u^4 - \dots \right].$$

Es erübrigt noch den Wert von  $u$  eindeutig fest zu legen. Nun gilt in der Umgebung des Punktes  $\tau = \tau_0$

$$(24) \quad \frac{1}{f'(\tau)} = \frac{1}{i(\cos \tau - \cos \tau_0)} = \frac{i}{\sin \tau_0} \frac{1}{\tau - \tau_0}$$

und da der Integrationsweg  $A$  in der  $\tau$ -Ebene (vgl. Fig. 2) die reelle Achse unter  $45^\circ$  schneidet, so gilt für die erste Hälfte dieses Weges, die dem ersten Integral in (10) entspricht

$$(25) \quad \tau - \tau_0 = |\tau - \tau_0| e^{i \frac{\pi}{4}}.$$

Eine Vergleichung von (24) mit (23) zeigt demnach, daß man  $\Phi(t)$  aus (23) erhält, indem man für  $u$  den Wert

$$(26) \quad u = \left(\frac{2t}{\sin \tau_0}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

einsetzt;  $\Phi_1(t)$  bekommt man, indem man in (23)

$$(26') \quad u = - \left(\frac{2t}{\sin \tau_0}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\pi}{4}}$$

substituiert, unter der Voraussetzung, daß die Größe  $\left(\frac{2t}{\sin \tau_0}\right)^{\frac{1}{2}}$  positiv reell angenommen wird.

Nach diesen Bemerkungen ergibt sich der Wert von  $H_2^\alpha(x)$  ohne weiteres aus (10) zu

$$(27) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{1}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[ \frac{e^{i \frac{\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0\right) \frac{e^{i \frac{3\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{128} + \frac{77}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0\right) \frac{e^{i \frac{5\pi}{4}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

indem sich die Integrale mit geraden Potenzen von  $t^{\frac{1}{2}}$  in der Differenz der beiden Integrale aufheben.\*)

Wir rekapitulieren:

Ist der Index  $\alpha$  kleiner als das Argument  $x$ , das seinerseits groß gegen 1 angenommen wird, so definiere man den reellen Winkel  $\tau_0$  durch die Formel:

$$\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x},$$

\*) Der Ausdruck (27) ist so normiert, daß alle gebrochenen Potenzen positiv reell zu nehmen sind.

alsdann ist  $H_2^\alpha(x)$  in semikonvergenter Weise dargestellt durch die Reihe (27).

Man beachte dabei die eigenartige Abhängigkeit von  $\alpha$  und  $x$ , die durch das Vorkommen von  $\tau_0$  vermittelt wird. Man überzeugt sich leicht, daß die Darstellung (27) für kleine Werte von  $\alpha$  den sonst bekannten Näherungswert ergibt. In diesem Fall ist nämlich wegen  $\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x}$  näherungsweise:

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \sin \tau_0 = 1,$$

so daß man für das erste Glied von (43) erhält:

$$(28) \quad H_2^\alpha(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-ix} e^{i\frac{\pi}{2}\alpha} e^{i\frac{\pi}{4}},$$

derselbe Wert, den auch z. B. Nielsen als asymptotischen Wert für sehr große Werte von  $x$  und, wie wir hinzufügen müssen, endliche Werte von  $\alpha$  angibt.

Will man unter denselben Voraussetzungen wie soeben ( $\alpha$  klein gegen  $x$ ,  $x$  groß gegen 1) die vollständige, schon von Hankel\*) abgeleitete Reihe für  $H_2^\alpha(x)$  erhalten, so ist es bequemer, nicht von (10) auszugehen sondern im Integral (1) von vornherein zu berücksichtigen, daß  $\alpha$  endlich ist, indem man schreibt:

$$H_2^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(2)} e^{-ix \sin \tau} e^{i\alpha \tau} d\tau$$

und nur den Exponententeil  $i \sin \tau$  als Funktion  $f(\tau)$  einführt. Derselbe Gedankengang wie früher führt dann darauf,  $i(\sin \tau - 1)$  als neue Variable  $t$  einzuführen und dann die Funktion

$$\frac{e^{i\alpha \tau}}{i \cos \tau}$$

nach Potenzen von  $t$  zu entwickeln. Man kann sich überzeugen, daß die Reihe dann genau in der Hankelschen Form resultiert.

Ein Übelstand der Darstellung (43) stellt sich heraus, sobald das Verhältnis  $\frac{\alpha}{x}$  nahe 1 wird, da dann  $\tau_0$  sehr klein und damit die auftretenden Größen  $\cotg \tau_0$  sehr groß werden. Die Formel verhält sich in diesem Fall analog wie eine ungleichmäßig konvergente Reihe, da man, wenn  $\alpha$  an  $x$  heranrückt, immer größere Werte von  $x$  voraussetzen muß, damit z. B. das erste Glied eine genügende Näherung darstellt. Im übrigen ist es klar, daß diese Sachlage von vornherein zu erwarten ist. Rückt nämlich der eine Sattelpunkt  $\tau = \tau_0$  an Null heran, so geschieht

\*) Math. Ann. Bd. 1, S. 494, 1869.

dasselbe mit dem Sattelpunkt  $\tau = -\tau_0$ . Da nun die Bilder der Sattelpunkte in der  $t$ -Ebene, die zu gleicher Zeit einander nahe rücken, Verzweigungspunkte für die Funktion  $\Phi(t)$  sind, so wird bei fortgesetzter Annäherung von  $\alpha$  an  $x$  der Konvergenzradius der Reihe für  $\Phi(t)$  immer kleiner, was, wie man sich leicht überzeugt, die Brauchbarkeit von (27) immer mehr beeinträchtigt.

Im nächsten Paragraphen wird deshalb eine andere Darstellung für den Fall abgeleitet werden, wo  $\alpha$  nahe gleich 1 ist.

#### § 4.

### Semikonvergente Reihe für $H_2^\alpha(x)$ im Grenzfall $\alpha \cong x$ .

Wir setzen

$$(29) \quad \frac{\alpha}{x} = 1 - \varepsilon,$$

wobei  $\varepsilon$  nach den Voraussetzungen dieses Paragraphen eine sehr kleine Zahl (mit 1 verglichen) bedeuten soll. Verschwindet  $\varepsilon$  vollends, so hat man nach (1) für  $H_2^\alpha(x)$  die Darstellung

$$(30) \quad H_2^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int e^{-ix(\sin \tau - \tau)} d\tau,$$

wobei das Integral über den auf S. 542 näher diskutierten Weg zu erstrecken ist. Für den Fall, daß  $\varepsilon$  zwar nicht Null, aber doch sehr klein ist, liegt es nahe, die Definitionsgleichung unserer Zylinderfunktion mit Rücksicht auf (29) in der Form zu schreiben:

$$(31) \quad H_2^\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int e^{-ix(\sin \tau - \tau)} e^{-i\varepsilon x \tau} d\tau$$

und als maßgebenden Teil nur den ersten Faktor des Integranden zu betrachten. Der Gedankengang ist dann weiterhin genau derselbe, wie der in § 3 angedeutete, allerdings nicht genau ausgeführte, zur Gewinnung der Hankelschen Reihen. Es wird also wieder zunächst

$$(32) \quad t = i(\sin \tau - \tau)$$

gesetzt; dabei ist die Integration längs der reellen Achse der  $t$ -Ebene zu erstrecken, einmal von  $\infty$  bis 0, sodann von 0 bis  $\infty$ .

Das Resultat erscheint in der Form:

$$(33) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^\infty e^{-xt} \Phi(t) dt - \int_0^\infty e^{-xt} \Phi_1(t) dt \right\},$$

wobei mit Rücksicht auf (32) die Funktion  $\Phi(t)$  als Funktion von  $t$  gegeben ist durch den Ausdruck:

$$(34) \quad \Phi(t) = \frac{e^{-i\varepsilon x \tau}}{i(\cos \tau - 1)};$$

$\Phi_1(t)$  ist nur dadurch von  $\Phi(t)$  verschieden, daß die gebrochenen Potenzen von  $t$  hier anders zu definieren sind als dort. Ersichtlich entspricht der Einführung von  $T$  in Gleichung (12), die für den einfachen Sattelpunkt der Fig. 2 am Platze war, nunmehr nach Zusammenrücken zweier Sattelpunkte in Fig. 5 die Einführung einer Hilfsvariablen  $T$  gemäß der Gleichung  $t = T^3$ . Es kommen also jetzt Entwicklungen nach Potenzen von  $t^{\frac{1}{3}}$  in Betracht. Schreibt man

$$(35) \quad \Phi(t) = t^{-\frac{2}{3}} \sum_0^{\infty} a_n t^{\frac{n}{3}},$$

so erhält man, ebenso wie in § 3, für die Koeffizienten  $a_n$  die Darstellung

$$(36) \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-i\frac{n+1}{3}\frac{\pi}{2}}}{3} \int \frac{e^{-i\pi\tau}}{(\sin\tau - \tau)^{\frac{n+1}{3}}} dt,$$

wobei das Integral um den Nullpunkt der  $\tau$ -Ebene zu erstrecken ist. Die Ausrechnung ergibt, wenn man wie im vorigen Paragraphen in  $\Phi$  und  $\Phi_1$  gemäß der früheren Festlegung die Potenzen richtig bestimmt

$$(37) \quad \begin{aligned} \Phi(t) &= \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} t^{-\frac{2}{3}} \left[ 1 - i\epsilon x 6^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\pi}{6}} t^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\epsilon^2 x^2}{2} - 20\right) 6^{\frac{2}{3}} e^{i\frac{2\pi}{6}} t^{\frac{2}{3}} \right. \\ &\quad \left. + i\left(\frac{\epsilon^3 x^3}{6} - \frac{\epsilon x}{15}\right) 6^{\frac{3}{3}} e^{i\frac{3\pi}{6}} t^{\frac{3}{3}} + \left(\frac{\epsilon^4 x^4}{24} - \frac{\epsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280}\right) 6^{\frac{4}{3}} e^{i\frac{4\pi}{6}} t^{\frac{4}{3}} \dots \right], \\ \Phi_1(t) &= \left(\frac{2}{9}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{2}} t^{-\frac{2}{3}} \left[ 1 - i\epsilon x 6^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{2}} t^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{\epsilon^2 x^2}{2} - 20\right) 6^{\frac{2}{3}} e^{-i\pi} t^{\frac{2}{3}} \right. \\ &\quad \left. + i\left(\frac{\epsilon^3 x^3}{6} - \frac{\epsilon x}{15}\right) 6^{\frac{3}{3}} e^{-i\frac{3\pi}{2}} t^{\frac{3}{3}} + \left(\frac{\epsilon^4 x^4}{24} - \frac{\epsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280}\right) 6^{\frac{4}{3}} e^{-i2\pi} t^{\frac{4}{3}} \dots \right]. \end{aligned}$$

Eine gliedweise Integration liefert jetzt nach (33) für  $H_2^\alpha(x)$  die Darstellung:

$$(38) \quad \begin{aligned} H_2^\alpha(x) &= \frac{2i}{3\pi} \left[ e^{-i\frac{\pi}{6}} 6^{\frac{1}{3}} \sin \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{x^{\frac{1}{3}}} - i(\epsilon x) e^{-i\frac{2\pi}{6}} 6^{\frac{2}{3}} \sin \frac{2\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{x^{\frac{2}{3}}} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\epsilon^2 x^2}{2} - 20\right) e^{-i\frac{3\pi}{6}} 6^{\frac{3}{3}} \sin \frac{3\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{3}\right)}{x^{\frac{3}{3}}} + i\left(\frac{\epsilon^3 x^3}{6} - \frac{\epsilon x}{15}\right) e^{-i\frac{4\pi}{6}} 6^{\frac{4}{3}} \sin \frac{4\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{x^{\frac{4}{3}}} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\epsilon^4 x^4}{24} - \frac{\epsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280}\right) e^{-i\frac{5\pi}{6}} 6^{\frac{5}{3}} \sin \frac{5\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{x^{\frac{5}{3}}} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Die vorstehenden Ausdrücke sind so normiert, daß alle Potenzen positiv reell sind.

Wir heben noch den Spezialfall  $\varepsilon = 0$  hervor, wo also  $\alpha$  nicht näherungsweise, sondern genau gleich  $x$  ist, für welchen (54) übergeht in\*):

$$(39) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{2i}{3\pi} \left[ e^{-i\frac{\pi}{6}} 6^{\frac{1}{3}} \sin \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{1}{20} e^{-i\frac{3\pi}{6}} 6^{\frac{3}{3}} \sin \frac{3\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{3}\right)}{x^{\frac{3}{3}}} + \frac{1}{280} e^{-i\frac{5\pi}{6}} 6^{\frac{5}{3}} \sin \frac{5\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{x^{\frac{5}{3}}} + \dots \right].$$

### § 5.

#### Semikonvergente Reihe für $H_2^\alpha(x)$ im zweiten Falle ( $\alpha > x$ ).

In diesem Falle tritt, wie in § 2, S. 541 hervorgehoben, der neue Umstand auf, daß die zur Integration zu benutzende Kurve durch zwei Sattelpunkte hindurchführt. Nehmen wir wieder den Exponenten als Integrationsvariable, so wird der Integrand unendlich an zwei Stellen der Integrationslinie, die den beiden Sattelpunkten entsprechen. Man sieht indessen sofort ein, daß nur die Umgebung des einen Sattelpunktes zu berücksichtigen ist, da der von der Umgebung des zweiten Sattelpunktes herrührende Bestandteil gegen den mitgenommenen exponentiell verschwindet. Im vorliegenden Fall ist, wie aus Fig. 4 ersichtlich, der früher (Fig. 3 b) mit  $\tau_0$  bezeichnete untere Sattelpunkt maßgebend, wir setzen also ebenso wie früher in § 3:

$$(40) \quad t = f(\tau) - f(\tau_0) = i \{ (\sin \tau - \tau \cos \tau_0) - (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) \}$$

und haben dann zunächst die Funktion

$$(41) \quad \frac{1}{f'(\tau)} = \frac{1}{i(\cos \tau - \cos \tau_0)}$$

nach Potenzen von  $t$  zu entwickeln. Auf der oberen Hälfte des Weges  $A$  (Fig. 3) d. h. auf der imaginären Achse der  $\tau$ -Ebene oberhalb des Sattelpunktes  $\tau = \tau_0$  oder in der  $t$ -Ebene auf der reellen Achse bei der Integration von  $\infty$  bis 0 erhält man

$$(42) \quad \Phi(t) = \frac{i}{\sin \tau_0} \frac{1}{u} \left[ 1 - \frac{1}{3} \cotg \tau_0 u + \left( \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0 \right) u^2 - \left( \frac{4}{15} \cotg \tau_0 + \frac{2}{27} \cotg^3 \tau_0 \right) u^3 + \left( \frac{3}{128} + \frac{7}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0 \right) u^4 + \dots \right]$$

mit der Abkürzung:

$$(43) \quad u = \left( \frac{2t}{i \sin \tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\pi}{2}},$$

\*) In (38), resp. (39) verschwindet das dritte, resp. zweite Glied der Klammer, weil  $\sin \frac{3\pi}{3} = 0$ .



die mit der früheren Gl. (23) übereinstimmt und nur anders geschrieben ist. Auf der unteren Hälfte des Weges  $A$  in der  $\tau$ -Ebene, nachdem der Sattelpunkt  $\tau = \tau_0$  überschritten ist, oder in der  $t$ -Ebene auf der reellen Achse, wenn wir uns wieder vom Nullpunkt fortbewegen, gilt für  $\Phi(t) = \Phi_1(t)$  wieder die Entwicklung (42), aber mit dem Unterschiede, daß  $u$  jetzt definiert ist durch

$$(43') \quad u = - \left( \frac{2t}{i \sin \tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} e^{i \frac{\pi}{2}}.$$

Durch Einsetzen in (10) und Integration bis  $\infty^*$ ) folgt jetzt für  $H_2^\alpha(x)$  die Darstellung:

$$(44) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{3}{128} + \frac{77}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

worin wieder die gebrochenen Potenzen positiv reell zu nehmen sind. (Man bemerke, daß die Nenner dieses Ausdrucks nur in imaginärer Form erscheinen, während tatsächlich  $i \frac{x}{2} \sin \tau_0$  eine positive reelle Zahl bedeutet.) Indem wir rekapitulieren und diese letzte Darstellung mit Gleichung (27) vergleichen, sehen wir:

*Ist der Index  $\alpha$  größer als das Argument  $x$ , das seinerseits groß gegen 1 angenommen wird, so definiere man einen jetzt imaginären Winkel  $\tau_0$  durch die negativ imaginäre Wurzel der Gleichung*

$$(45) \quad \cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x},$$

*alsdann gilt für  $H_2^\alpha(x)$  die semikonvergente Reihe (44), die sich von (27) formal nur durch eine andere Definition der auftretenden Einheitswurzeln unterscheidet.*

Wir wollen jetzt noch aus (44) den Grenzwert der Hankelschen Funktion ableiten für den Fall, daß  $\alpha$  groß gegen  $x$  ist. Schreiben wir  $\tau = -ib$ , so ist wegen  $\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x}$  in erster Näherung für sehr große Werte von  $b$ :

$$\frac{e^b}{2} = \frac{\alpha}{x} \quad \text{oder} \quad b = \log \frac{2\alpha}{x}$$

\*) Daß man bis  $t = \infty$  integrieren kann, ohne der Semikonvergenz der Reihe Abbruch zu tun, folgt sofort, wenn man bedenkt, daß der so vernachlässigte Bruchteil bei wachsendem  $x$  wieder gegen die rechte Seite von (44) exponentiell verschwindet.

so daß wir haben

$$\tau_0 = -i \log 2 \frac{\alpha}{x};$$

$$\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x}; \quad \sin \tau_0 = -i \frac{\alpha}{x}$$

und durch Einsetzen in (44)

$$H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} e^{-\alpha + \alpha \log 2 \frac{\alpha}{x}}$$

oder:

$$(46) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \left(\frac{2}{x}\right)^\alpha \alpha^\alpha e^{-\alpha}.$$

Daß dieser Ausdruck mit dem sonst bekannten übereinstimmt, ist leicht zu sehen. Nach den Formeln (1) S. 16 und (8) S. 11 von Nielsen\*) gilt nämlich die asymptotische Gleichheit:

$$H_2^\alpha(x) = J_\alpha(x) - i Y_\alpha(x) = \frac{i}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\alpha \Gamma(\alpha),$$

was unter Benutzung der Stirlingschen asymptotischen Formel\*\*) für  $\Gamma(\alpha)$

$$\Gamma(\alpha) = \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}} \alpha^\alpha e^{-\alpha}$$

sofort in unsere Formel (46) übergeht.

## § 6.

### Darstellungen für die Hankelschen Funktionen erster Art und für die Besselschen Funktionen.

In den vorigen Paragraphen wurde immer nur die zweite Hankelsche Funktion näher ins Auge gefaßt; bedenkt man indessen, daß für reelle Werte von  $\alpha$  und  $x$  die beiden Hankelschen Funktionen konjugiert imaginär sind, so erhält man aus (27), (38) und (44) ohne weitere Rechnung die entsprechenden Reihen für die erste Hankelsche Funktion  $H_1^\alpha(x)$ , welche im nächsten Paragraphen zusammengestellt sind.

Um Darstellungen für die gewöhnlichen Besselschen Funktionen  $J_\alpha(x)$  und  $J_{-\alpha}(x)$  zu erhalten, kann man im Falle  $\alpha < x$  Gebrauch machen von den bekannten Zusammenhangsformeln:\*\*\*)

\*) N. Nielsen, Handbuch der Theorie der Zylinderfunktionen, Leipzig 1904.

\*\*) Vgl. z. B. Nielsen, Handbuch der Theorie der Gammafunktionen, Leipzig 1906, S. 96. Wir bemerken noch, daß auch diese Formel sich ohne weiteres nach der hier benutzten Methode aus der Hankelschen komplexen Integraldefinition von  $F(\alpha)$  ergibt.

\*\*\*) Die Formeln (47) folgen ohne weiteres aus den Gleichungen (3) und (4) von Nielsen, loc. cit. § 17.

$$(47) \quad \begin{cases} J_\alpha(x) = \frac{1}{2} [H_1^\alpha(x) + H_2^\alpha(x)], \\ J_{-\alpha}(x) = \frac{1}{2} [e^{i\alpha\pi} H_1^\alpha(x) + e^{-i\alpha\pi} H_2^\alpha(x)]. \end{cases}$$

Wenn  $\alpha > x$  vorausgesetzt wird, versagt dagegen die erste der Gl. (47). In diesem Falle würde man nämlich, wie die nachfolgenden Formeln zeigen, erhalten:

$$J_\alpha(x) = 0,$$

da die beiden Hankelschen Funktionen jetzt (52') und (53') entgegengesetzt gleich sind. Nun sind aber alle in diesem Abschnitt behandelten Reihen (für  $H_1^\alpha(x)$  und  $H_2^\alpha(x)$ ) semikonvergent, d. h. wie aus der Poincaréschen Definition der Semikonvergenz folgt: man kann nur behaupten, daß der Unterschied zwischen der beim  $n^{\text{ten}}$  Gliede abgebrochenen Reihe und dem genauen Werte der Funktion, dividiert durch diesen, für sehr große Werte von  $x$  unendlich klein wird, wie eine negative Potenz von  $x$ , deren Exponent absolut genommen desto größer wird, je mehr Glieder der Reihe man berücksichtigt. Eine Abweichung der Näherung von dem wirklichen Wert, die für große Werte von  $x$  z. B. wie eine Exponentialfunktion verschwindet, kann aber immer noch stattfinden und kommt in den Reihen nicht zum Ausdruck. Finden wir also auf Grund der Reihe (44), resp. (52') und (53') der Zusammenstellung in § 7:

$$J_\alpha(x) = 0,$$

so bedeutet dieses Rechnungsergebnis nicht, daß  $J_\alpha(x)$  tatsächlich verschwindet, sondern nur, daß in diesem Falle ( $\alpha > x$ ) die Besselsche Funktion so viel kleiner ist als die Hankelsche, daß das Verhältnis dieser beiden im Limes für  $x = \infty$  nicht mehr durch eine Potenz von  $x$  gemessen werden kann. Die Figuren 1 und 4 veranschaulichen den Sachverhalt ohne weiteres. Während man nämlich, um z. B.  $H_2^\alpha(x)$  zu erhalten, die Funktion  $e^{-x f(\tau)}$  integrieren muß auf einem Wege, der im positiv imaginären Teil der  $\tau$ -Ebene anfängt und im negativ imaginären Teile endigt, der also, wenn wir uns wieder der Linie  $J = \text{const.}$  als Integrationslinie bedienen, durch die beiden Sattelpunkte  $\tau = \tau_0$  und  $\tau = \tau_0'$  hindurchgeht, ist das für die Funktion  $J_\alpha(x)$  nicht mehr der Fall. Die erste der Gleichungen (47) zeigt nämlich mit Rücksicht auf Fig. 1, daß man  $J_\alpha(x)$  definieren kann durch das Integral

$$(48) \quad J_\alpha(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{(3)} e^{-x f(\tau)} d\tau,$$

welches über eine Linie (3) zu führen ist, die zwischen  $\frac{\pi}{2} + i\infty$  und  $\frac{3\pi}{2} + i\infty$  anfängt und zwischen  $-\frac{\pi}{2} + i\infty$  und  $-\frac{3\pi}{2} + i\infty$  endigt, wie

sie durch Verschmelzung der beiden Integrationswege (1) und (2) entstanden gedacht werden kann. Die Linie  $J = \text{const.}$ , die wir gemäß unseren früheren Überlegungen als Integrationslinie wählen, ist demnach die in Fig. 4 gezeichnete Kurve  $B$ , welche nur durch den *einen* Sattelpunkt  $\tau_0'$  hindurchgeht. Weiterhin sieht man ohne weiteres, daß

$$f(\tau_0') = i (\sin \tau_0' - \tau_0' \cos \tau_0')$$

einen positiven Wert hat, während  $f(\tau_0)$  negativ ist. Da nun für sehr große Werte von  $x$  nur die nächste Umgebung des Sattelpunktes den Wert der Funktion bestimmt, so ist klar, daß sowohl  $J_\alpha(x)$ , wie das Verhältnis  $J_\alpha(x)/H_\alpha(x)$  im Limes  $x = \infty$  für  $\alpha > x$  wie eine Exponentialfunktion verschwindet. Die Ableitung der semikonvergenten Reihe für  $J_\alpha(x)$ , die unter Benutzung der Formel (48) durchzuführen ist, unterscheidet sich in keiner Weise von den in § 3 und § 5 ausführlich betrachteten Rechnungen für die zweite Hankelsche Funktion; es möge deshalb das Schlußresultat ohne weiteres angegeben werden:

*Ist der Index  $\alpha$  größer als das Argument  $x$ , das seinerseits groß gegen 1 angenommen wird, so definiere man wie in § 5 den Winkel  $\tau_0$  durch die negativ imaginäre Wurzel der Gleichung:*

$$(49) \quad \cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x};$$

*alsdann gilt für  $J_\alpha(x)$  die semikonvergente Darstellung:*

$$(50) \quad J_\alpha(x) = \frac{1}{\pi} e^{i x (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \left[ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{1}{2}}} + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{3}{2}}} \right. \\ \left. + \left(\frac{3}{128} + \frac{77}{576} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0\right) \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{\frac{5}{2}}} + \dots \right],$$

wobei die gebrochenen Potenzen positiv reell zu nehmen sind.

Wir kommen schließlich zu der Funktion  $J_{-\alpha}(x)$ , für die im allgemeinen aus der zweiten der Zusammenhangsformeln (47) eine näherungsweise Darstellung auch dann folgt, wenn  $\alpha > x$  ist. Nur dann, wenn zu gleicher Zeit  $\alpha$  gleich einer ganzen Zahl  $n$  ist, versagt diese Rechnungsweise, da die Zusammenhangsformeln (47) dann wieder wegen der aus den semikonvergenten Reihen folgenden Beziehung  $H_1^\alpha(x) = -H_2^\alpha(x)$  für  $J_{-\alpha}(x)$  den Wert Null ergeben würden. Man braucht indessen diesen Fall nicht näher zu betrachten, da bekanntlich  $J_{-n}(x)$  keine von  $J_n(x)$

linear unabhängige Lösung der Differentialgleichung der Zylinderfunktionen darstellt; es gilt vielmehr die Beziehung\*)

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x),$$

womit dieser Fall auf den vorher betrachteten zurückgeführt ist.

§ 7.

Zusammenstellung der Resultate.

Schließlich geben wir in diesem Paraphen eine Übersicht über die für die verschiedenen Zylinderfunktionen gültigen Näherungsdarstellungen. Wir führen zunächst Abkürzungen  $A_n$  und  $B_n$  ein für die in den Reihen auftretenden Funktionen des Winkels  $\tau_0$ , welche sich in jedem der drei zu unterscheidenden Fälle  $\alpha < x$ ,  $\alpha > x$  und  $\alpha \cong x$  mittels der nachher angegebenen Formeln aus dem Verhältnis  $\frac{\alpha}{x}$  des Index zum Argument berechnen. Die Entstehungsweise der Funktionen  $A_n$  als Entwicklungskoeffizienten ist in § 3 näher erläutert; die drei ersten lauten:

$$(51) \quad \begin{cases} A_0(\tau_0) = 1, \\ A_1(\tau_0) = \frac{1}{8} + \frac{5}{24} \cotg^2 \tau_0, \\ A_2(\tau_0) = \frac{3}{128} + \frac{7}{16} \cotg^2 \tau_0 + \frac{385}{3456} \cotg^4 \tau_0 \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad \begin{matrix} \\ \\ \frac{174}{576} \end{matrix}$$

Mit diesen Abkürzungen lassen sich jetzt die Resultate folgendermaßen zusammenfassen:

1) *Der Index  $\alpha$  ist kleiner als das Argument  $x$ .*

Man definiere den reellen Winkel  $\tau_0$  ( $0 < \tau_0 < \frac{\pi}{2}$ ) durch die Formel:

$$\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x},$$

dann gilt:

$$(52) \quad H_1^\alpha(x) = \frac{1}{\pi} e^{i x (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(\tau_0) \frac{e^{-i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(53) \quad H_2^\alpha(x) = \frac{1}{\pi} e^{-i x (\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(\tau_0) \frac{e^{i(2n+1)\frac{\pi}{4}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

\*) Man vergleiche z. B. N. Nielsen, loc. cit. S. 5.

$$(54) \quad J_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}} \cos \left\{ x(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0) - (2n + 1) \frac{\pi}{4} \right\},$$

$$(55) \quad J_{-\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}} \cos \left\{ x(\sin \tau_0 - (\tau_0 - \pi) \cos \tau_0) - (2n + 1) \frac{\pi}{4} \right\}$$

2) Der Index  $\alpha$  ist größer als das Argument  $x$ .

Man definiere den negativ imaginären Winkel  $\tau_0$  durch die Formel:

$$\cos \tau_0 = \frac{\alpha}{x},$$

dann gilt:

$$(52') \quad H_1^{\alpha}(x) = -\frac{i}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(53') \quad H_2^{\alpha}(x) = \frac{i}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(54') \quad J_{\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} e^{ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}},$$

$$(55') \quad J_{-\alpha}(x) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} e^{-ix(\sin \tau_0 - \tau_0 \cos \tau_0)} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n(\tau_0) \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\left(i \frac{x}{2} \sin \tau_0\right)^{n + \frac{1}{2}}}.$$

3) Der Index  $\alpha$  ist ungefähr gleich dem Argumente  $x$ .

Man schreibe

$$\frac{\alpha}{x} = 1 - \varepsilon$$

und definiere Funktionen  $B_n(\varepsilon x)$  durch die Formeln:

$$(56) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_0(\varepsilon x) = 1, \\ B_1(\varepsilon x) = \varepsilon x, \\ B_2(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} - \frac{1}{20}, \\ B_3(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^3 x^3}{6} - \frac{\varepsilon x}{16}, \\ B_4(\varepsilon x) = \frac{\varepsilon^4 x^4}{24} - \frac{\varepsilon^2 x^2}{24} + \frac{1}{280} \\ \dots \end{array} \right.,$$

dann gilt:

$$(52'') \quad H_1^\alpha(x) = -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(\varepsilon x) 6^{\frac{n+1}{3}} e^{i(n+1)\frac{2\pi}{3}} \sin(n+1) \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$(53'') \quad H_2^\alpha(x) = -\frac{2}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(\varepsilon x) 6^{\frac{n+1}{3}} e^{-i(n+1)\frac{2\pi}{3}} \sin(n+1) \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$(54'') \quad J_\alpha(x) = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(\varepsilon x) 6^{\frac{n+1}{3}} \sin(n+1) \frac{\pi}{3} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}},$$

$$(55'') \quad J_{-\alpha}(x) = \frac{1}{3\pi} \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n(\varepsilon x) 6^{\frac{n+1}{3}} \left[ \sin\left(\left(n+1\right)\frac{\pi}{3} + \alpha\pi\right) - \sin(n+1+\alpha)\pi \right] \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{3}\right)}{x^{\frac{n+1}{3}}}.$$

Anmerkung. Daß die oben angegebenen Formeln alle für große Werte von  $x$  in Betracht kommenden Fälle umfassen und nicht etwa für Werte von  $x \cong \alpha$  eine Lücke übrig bleibt, wo weder die Formeln (52) bis (55) oder (52') bis (55'), noch die Formeln (52'') bis (55'') anwendbar sind, möge noch durch die folgende Überlegung klar gestellt werden. Für kleine Werte von  $\varepsilon$  (vgl. (29)) werden nach (51) die Funktionen  $A_n(\tau_0)$  groß von der Ordnung  $\varepsilon^{-n}$ , da mit  $\varepsilon$  auch  $\tau_0$  klein wird und zwar mit Berücksichtigung der Definitionsformel (29) nach der Gleichung:

$$\tau_0 = (2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}.$$

Betrachtet man nun zwei aufeinander folgende Glieder  $T_{n-1}$  und  $T_n$  z. B. der Reihe (52), so bekommt man für ihr Verhältnis:

$$\frac{T_{n-1}}{T_n} = \frac{\text{const.}}{x\varepsilon^{\frac{2}{3}}}$$

wenn man noch  $\sin \tau_0$  durch  $\tau_0$  resp.  $(2\varepsilon)^{\frac{1}{2}}$  ersetzt. Dieses Verhältnis wird also dann endlich, wenn  $x\varepsilon^{\frac{2}{3}}$  endlich ist, d. h. wenn  $\varepsilon$  mit unendlich wachsendem  $x$  unendlich klein wird von der Ordnung  $x^{-\frac{2}{3}}$ . In analoger Weise zeigt die für den Fall  $\alpha \cong x$  angegebene Formel (52'') unter Berücksichtigung der Gleichungen (56), daß in der betreffenden Reihe, das Verhältnis der zwei aufeinander folgenden Glieder  $T_{n-1}$  und  $T_n$  dargestellt wird durch:

$$\frac{T_{n-1}}{T_n} = \text{const.} \varepsilon x^{\frac{2}{3}}.$$

Auch bei den unter 3) angeführten Darstellungen wird also das Verhältnis dann endlich, wenn  $\varepsilon$  mit unendlich wachsendem  $x$  unendlich klein wird von der Ordnung  $x^{-\frac{2}{3}}$ . Läßt man in den Fällen 1) und 2)  $\varepsilon$  wie  $x^{-\frac{2}{3} + \eta}$  an Null heranrücken, so verschwindet  $\frac{T_{n-1}}{T_n}$  wie  $x^{-\frac{3}{2}\eta}$ , läßt man andererseits im Falle 3) diese Annäherung wie  $x^{-\frac{2}{3} - \eta}$  stattfinden, so verschwindet  $\frac{T_{n-1}}{T_n}$  wie  $x^{-\eta}$ . Demnach ist klar, daß die Formeln (52) bis (55) und (52'') bis (55'') gerade da aufhören praktisch brauchbar zu sein, wo das Anwendungsgebiet von (52') bis (55') einsetzt.

München, Math. phys. Sammlung, Dezember 1908.

---