Sur quelques applications des sommes de Gauss.

(*Par* M. Lerch, *à Fribourg - Suisse.*)

Soit n un nombre entier impair et positif, m un entier quelconque premier avec n, on a, d'après Gauss, la relation

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\pi i}{n}} = \left(\frac{m}{n}\right) i^{\frac{1}{4}(n-1)^2} \sqrt{n},$$

où la racine $\sqrt{n}$ est positive et le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ représente le signe de Legendre, dans la façon que lui a donnée Iacobi.

Au moyen de la formule précédente nous allons évaluer l'expression

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\mu\pi i}{n}},$$

dont nous aurons besoins pour l'application qui va suivre.

Désignons à cet effet par d_μ le plus grand commun diviseur de μ avec n, en retenant l'hypothèse que m soit premier avec n; posons ensuite

$$\mu' = \frac{\mu}{d_\mu}, \quad d'_\mu = \frac{n}{d_\mu}.$$

Alors, comme il est facile de le voir, les termes de notre somme se composent de d_μ groupes égaux entre eux, et il vient

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{\frac{2\alpha^2 m\mu\pi i}{n}} = \left(\frac{m\mu'}{d'_\mu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\mu-1)^2} d_\mu \sqrt{d'_\mu}. \tag{1}$$

Cela étant, désignons par $E(x)$ ou par $[x]$ le plus grand entier contenu dans x, puis notons par $E^*(x)$ la fonction qui pour x fractionnaire est égale à $E(x)$, et se réduit à $E(x) - \frac{1}{2}$ pour x entier. Cette fonction-là est donnée sans restriction par le développement bien connu

$$E^*(x) = x - \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sin 2\nu x \pi}{\nu \pi}. \tag{2}$$

En nous appayant sur les formules (1) et (2), nous allons évaluer l'expression

$$S = \sum_{\alpha=0}^{n-1} E^*\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

où les entiers m et n sont soumis aux conditions indiquées ci-dessus.

La formule (2) fournit immédiatement la représentation

$$S = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right). \tag{a}$$

Pour évaluer la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) \tag{b}$$

je l'envisage comme partie immaginaire de la somme

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} e^{2\nu\pi i\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)}$$

qui, d'après (1), est égale à

$$\left(\frac{m\nu'}{d'_\nu}\right) i^{\frac{1}{4}(d'_\nu - 1)^2} d_\nu \sqrt{d'_\nu} \cdot e^{2 d_\nu \nu' x \pi i}, \tag{b'}$$

où d_ν représente le plus grand commun diviseur de n et ν, puis

$$d'_\nu = \frac{n}{d_\nu}, \qquad \nu' = \frac{\nu}{d_\nu}.$$

En employant l'écriture

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu\pi} \sum_{\alpha=0}^{n-1} \sin 2\nu\pi \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right),$$

la somme S sera d'après (a)

$$S = \sum_{\alpha=0}^{n-1} \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n} \right) - \frac{n}{2} + S_1 ,$$

et tout revient à évaluer S_1. D'après (b') la série S_1 est la partie immaginaire de l'expression

$$S'_1 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu \pi} \left(\frac{m \nu'}{d'_\nu} \right) d_\nu \sqrt{d'_\nu} \, . \, i^{\frac{1}{4}(d'_\nu - 1)^2} e^{2 d_\nu \nu' x \pi i}.$$

Les termes de cette série peuvent être décomposés en groupes tels que dans chacun d'eux la valeur d_ν est constante. Il y aura donc autant de groupes que le nombre n présente des diviseurs, et la série appartenant à un de ces diviseurs d s'obtient en faisant

$$d'_\nu = d, \quad \frac{n}{d} = d' = d_\nu ;$$

l'indice ν sera alors $\mu d'$, et la série en question sera

$$S'(d) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu \pi} \left(\frac{m \mu}{d} \right) \sqrt{d} \, . \, i^{\frac{1}{4}(d-1)^2} e^{2 d' \mu x \pi i},$$

où l'on devrait prendre soin de supprimer les termes dont l'indice μ ne soit pas premier avec d; mais ce soin est inutile, puisque les termes en question sont nuls, grâce à la présence du facteur

$$\left(\frac{m \mu}{d} \right).$$

Cela posé, observons que la partie imaginaire de la quantité

$$i^{\frac{1}{4}(d-1)^2} e^{2 d \mu x \pi i}$$

est

$$\cos 2 d \mu x \pi, \quad \text{si} \quad d \equiv -1 \pmod{4}$$

et

$$\sin 2 d \mu x \pi, \quad \text{si} \quad d \equiv +1 \pmod{4}.$$

Nous sommes ainsi amenés à introduire les fonctions

$$\Phi(z, d) = \sqrt{d} \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d} \right) \frac{\cos 2 \nu z \pi}{\nu \pi} \quad \text{pour} \quad d \equiv -1 \pmod{4}, \qquad (3^a)$$

et

$$\Phi(z,\ d) = \sqrt{d}\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\sin 2\nu z \pi}{\nu \pi} \quad \text{pour} \quad d \equiv 1 \pmod{4}. \tag{3^b}$$

Avec cette écriture, la partie imaginaire de la quantité $S\ (d)$ sera

$$\left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d),$$

de sorte qu'il vient

$$S_1 = \sum_d \left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d), \tag{4}$$

où la sommation s'étend à tous les diviseurs d du nombre n. Nous avons ainsi le résultat principal

$$\sum_{\alpha=0}^{n-1} \left\{ E^*\left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) - \left(x + \frac{\alpha^2 m}{n}\right) \right\} = -\frac{n}{2} + \sum_d \left(\frac{m}{d}\right) \Phi(d' x,\ d). \tag{4*}$$

Observons que le diviseur $d = 1$ ne fait aucune exception, en convenant de prendre suivant l'habitude

$$\left(\frac{m}{1}\right) = 1,$$

car la formule (1) subsiste pour $d' = 1$.

Les séries Φ qui figurent au second membre s'expriment aisément sous forme finie, mais je me borne à considérer des cas particuliers. Soit d'abord $x = 0$; alors les fonctions $\Phi(d' x,\ d)$ qui correspondent aux diviseurs $d \equiv 1 \pmod{4}$, s'évanouissent d'après (3^b) et il ne reste que des séries $\Phi(0,\ d)$ provenant des diviseurs $d \equiv -1 \pmod{4}$; or une telle quantité

$$\Phi(0,\ d) = \sqrt{d}\ \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{1}{\nu \pi}$$

s'exprime comme on sait à l'aide du nombre des classes de formes quadratiques.

Si $-\Delta$ est un discriminant négatif, posons $\tau_\Delta = 2$ pour $\Delta > 4$, puis $\tau_4 = 4$, $\tau_3 = 6$, et représentons par $Cl(-\Delta)$ le nombre des classes positives et primitives de formes quadratiques $a x^2 + b x y + c y^2$, dont le discriminant $b^2 - 4ac$ est égal à $-\Delta$; on aura, d'après Dirichlet et Kronecker,

$$\frac{2}{\tau}\ Cl(-\Delta) = \sqrt{\Delta}\ \sum_1^{\infty} \left(\frac{-\Delta}{\nu}\right) \frac{1}{\nu \pi} = \Phi(0,\ \Delta)$$

et la formule (4*) donne

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{\alpha^2 m}{n}\right\}=-\frac{n-1}{2}+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).$$

Ici nous avons transporté au second membre le terme $\alpha=0$ dont la valeur est

$$E^*(0)=-\frac{1}{2}\cdot$$

Nous allons encore introduire la fonction habituelle $E(x)$ au lieu de $E^*(x)$; pour ce but il faudra connaître les termes où

$$\frac{\alpha^2 m}{n}$$

est un entier et nous allons supposer m positif; m étant premier avec n, il faudra que α^2 soit divisible par n; posant $n=n_0 q^2$, où n_0 n'admet aucun diviseur carré, le quotient $\alpha^2 : n_0 q^2$ ne sera entier que pour

$$\alpha=n_0 q\,,\quad 2n_0 q\,,\quad 3n_0 q\,,\ldots\quad (q-1)\,n_0 q\,;$$

ces termes étant au nombre de $q-1$, il s'ensuit

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} E^*\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)=\sum_{\alpha=1}^{n-1} E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)-\frac{q-1}{2}\,,$$

et nous aurons en changeant les signes

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\frac{n-q}{2}-\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d),\qquad (5)$$

où d parcourt les diviseur de n qui ont la forme $4x+3$, q^2 signifie le plus grand diviseur carré du nombre impair n, puis m et n étant des nombres positifs premiers entre eux.

On peut employer la formule élémentaire

$$\sum_{1}^{n-1}\alpha^2=\frac{n^3}{3}-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}$$

pour écrire au lieu de (5)

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right)=m\left(\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)-\frac{n-q}{2}+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).\qquad (5^*)$$

Si en particulier les facteurs premiers de n sont tous de la forme $4x+1$, on aura comme second membre l'expression élémentaire

$$m\left(\frac{n^2}{3}-\frac{n}{2}+\frac{1}{6}\right)-\frac{n-q}{2}.$$

Faisons ensuite $x=\frac{1}{2}$; les séries (3^b) seront identiquement nulles et il ne reste que des séries

$$\Phi\left(\frac{d'}{2}, d\right)=\sqrt{d}\sum_1^\infty \frac{\cos d'\nu\pi}{\nu\pi}\cdot\left(\frac{\nu}{d}\right)=\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi}$$

provenant des diviseurs d de la forme $4x+3$.

L'identité

$$\sum_1^\infty(-1)^{\nu-1}c_\nu=\sum_1^\infty c_\nu-2\sum_1^\infty c_{2\nu}$$

fait voir que l'on a

$$\sqrt{d}\sum\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{(-1)^\nu}{\nu\pi}=\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{2\nu}{d}\right)\frac{1}{\nu\pi}-\sqrt{d}\sum_1^\infty\left(\frac{\nu}{d}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

ou bien

$$\Phi\left(\frac{d'}{2}, d\right)=\left[\left(\frac{2}{d}\right)-1\right]\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).$$

Comme la quantité

$$\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}$$

ne devient jamais un entier, on peut remplacer $E^*\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$ par sa valeur $E\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)$ et il vient

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{1}{2}+\frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\}=\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\left(1-\left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d), \tag{6}$$

d parcourant les diviseurs de la forme $4x+3$ du nombre n.

On trouverait de même

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{\alpha^2 m}{n}-E\left(\frac{\alpha^2 m}{n}-\frac{1}{2}\right)\right\}=n-1+\sum_d\left(\frac{m}{d}\right)\left(1-\left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d).$$

La relation (6) s'écrit plus simplement en faisant usage de la notation usuelle

$$R(z) = z - E\left(z + \frac{1}{2}\right),$$

où $R(z)$ signifie le plus petit reste absolu de la quantité z. On a ainsi

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1} R\left(\frac{\alpha^2 m}{n}\right) = \sum_d \left(\frac{m}{d}\right)\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{2}{\tau_d}\, Cl(-d). \tag{6*}$$

Posons enfin, dans la formule (4), $x = \frac{1}{4}\cdot$ On a pour $d \equiv -1 \pmod{4}$

$$\Phi\left(\frac{d'}{4}, d\right) = \sqrt{d}\, \sum \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\cos\frac{\nu d' x}{2}}{\nu \pi};$$

les termes provenant de ν impair sont nuls et il reste

$$\Phi\left(\frac{d'}{4}, d\right) = \sqrt{d}\, \sum \left(\frac{2\nu}{d}\right) \frac{(-1)^\nu}{2\nu\pi},$$

quantité qui comme on vient de voir n'est autre chose que

$$\left(1 - \left(\frac{2}{d}\right)\right)\frac{1}{\tau_d}\, Cl(-d).$$

Pour $d \equiv +1 \pmod{4}$ la fonction $\Phi(d' x)$ sera

$$\Phi\left(\frac{d'}{4}, d\right) = \sqrt{d}\, \sum_1^\infty \left(\frac{\nu}{d}\right) \frac{\sin\frac{\nu d' \pi}{2}}{\nu\pi},$$

où l'on peut se borner aux ν impairs. Or on a

$$\sin\frac{\lambda\pi}{2} = \left(\frac{-4}{\lambda}\right),$$

et puisque ici

$$\left(\frac{\nu}{d}\right) = \left(\frac{d}{\nu}\right),$$

il vient

$$\Phi\left(\frac{d'}{4}, d\right) = \sqrt{d}\, \sum_1^\infty \left(\frac{-4d}{\nu}\right)\left(\frac{-4}{d'}\right)\frac{1}{\nu\pi}$$

d'où

$$\Phi\left(\frac{d'}{4},\, d\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-4}{d'}\right) \cdot \frac{2}{\tau_{4d}}\, Cl\,(-4\,d).$$

On a ensuite

$$\left(\frac{-4}{d'}\right) = \left(\frac{-4}{d\,d'}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

et en somme, nous aurons

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n} - E\left(\frac{1}{4} + \frac{\alpha^2 m}{n}\right)\right\} \\ &= \frac{2n-1}{4} - (-1)^{\frac{n-1}{2}} \sum_{d_1}\left(\frac{m}{d_1}\right)\frac{1}{\tau_{4d_1}}\, Cl\,(-4\,d_1) \\ &\quad - \sum_{d_3}\left(\frac{m}{d_3}\right)\frac{1-\left(\frac{2}{d_3}\right)}{d_3}\, Cl\,(-d_3), \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

où d_1 parcourt les diviseurs de la forme $4\,x+1$ de n et d_3 les diviseurs de la forme $4\,x+3$ du même nombre.

On trouverait des résultats également simples en prenant $x = -\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\pm\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$. Mais je me borne aux cas établis que j'avais présentés dans un mémoire publié par l'Académie de Prague, en 1898 (*), résultats qui étaient auparavant connus sous certaines restrictions.

Revenons sur la formule (5) dans le cas de $m=1$; nous aurons

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\left\{\alpha^2 - n\,E\left(\frac{\alpha^2}{n}\right)\right\} = \frac{n(n-q)}{2} - n\sum_{d}\frac{2}{\tau_d}\, Cl\,(-d). \tag{5°}$$

Le premier membre est la somme des residus quadratiques du module n, comptés chacun autant de fois qu'il se présente comme reste dans la suite

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2, \ldots\ (n-1)^2.$$

On voit que cette somme est divisible par n sauf lorsque n est divisible par trois; dans ce cas exceptionnel, le second membre contient le terme pro-

(*) *Rozpravy ceské Akademie,* VII^e année, n.° 7.

venant de $d=3$:

$$-\frac{n}{3};$$

et la somme en question sera congrue à $-\frac{n}{3}$ suivant le module n.

Il peut avoir quelque intérêt de connaître la somme des résidus quadratiques du module n, premiers avec le module et différents entre eux. Je dis que cette somme que je désigne par A est donnée par la formule

$$2^{\varpi} A=\sum_{\nu=1}^{n}\left(1+\left(\frac{\nu}{p_1}\right)\right)\left(1+\left(\frac{\nu}{p_2}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{\nu}{p_{\varpi}}\right)\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

où $p_1, p_2, \ldots p_{\varpi}$ sont des différents facteurs premiers du nombre impair n. En effet, le produit

$$\left(1+\left(\frac{\nu}{p_1}\right)\right)\cdots\left(1+\left(\frac{\nu}{p_{\varpi}}\right)\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)$$

est nul, si ν n'est pas premier avec n, ou si n n'est pas un résidu de n; car dans ce cas un au moins des signes $\left(\frac{\nu}{p}\right)$ est égal à -1. Si au contraire ν est un résidu quadratique premier avec le module n, le produit en question est égal à

$$2^{\varpi}.$$

Cela étant, représentons par d tous les diviseurs du nombre n qui ne contiennent que des facteurs premiers différents, et le diviseur $d=1$; l'expression précédente s'écrira

$$2^{\varpi} A=\sum_{d}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

de sorte qu'en posant

$$B_d=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)\nu,$$

on aura

$$2^{\varpi} A=\sum_{d} B_d.$$

Pour calculer B_d, posons $n=d\,d'$, on aura

$$\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{n^2}{\nu}\right)=\left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{d'^2}{\nu}\right)$$

et par conséquent

$$B_d = \sum_{n}^{\nu=1} \left(\frac{\nu}{d}\right)\left(\frac{d'^2}{\nu}\right)\nu.$$

Cela posé, représentons par $\mu(s)$ les nombres dits de Moebius, c'est-à-dire posons $\mu(1)=1$, $\mu(s)=0$ si s admet un diviseur carré supérieur à un, mais $\mu(s)=(-1)^r$, si s est le produit de r nombres premiers différents. Alors, la dernière forme de la quantité B_d se transforme en lui appliquant l'identité importante bien connue

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{Q^2}{\nu}\right)f(\nu) = \sum_{\delta}\mu(\delta)\ \sum_{\nu=1}^{\infty} f(\nu\,\delta),$$

où δ parcourt les diviseurs de Q.

Dans notre cas

$$Q = d',\quad f(\nu) = \left(\frac{\nu}{d}\right)\nu \text{ pour } \nu \leqq n,\quad f(\nu) = 0 \text{ pour } \nu > n,$$

et nous aurons

$$B_d = \sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)\left(\frac{\delta_1}{d}\right)\delta_1 \sum_{\nu=1}^{d\delta_2}\left(\frac{\nu}{d}\right)\nu,$$

où δ_1 parcourt les diviseurs de d', puis $\delta_1\delta_2 = d'$.

Il s'agit encore de la somme

$$C(\delta_2) = \sum_{\nu=1}^{d\delta_2}\left(\frac{\nu}{d}\right)\nu.$$

Pour l'obtenir, faisons

$$\nu = \rho + \sigma d,\quad (\rho = 1, 2, .\ .\ d;\ \sigma = 0, 1, \dots \delta_2 - 1),$$

il s'ensuit

$$C(\delta_2) = \sum_{\rho=1}^{d}\left(\frac{\rho}{d}\right)\sum_{\sigma=0}^{\delta_2-1}(\rho + \sigma d),$$

ce qui en vertu de la relation

$$\sum_{\rho=1}^{d}\left(\frac{\rho}{d}\right) = 0$$

prend la forme

$$C(\delta_2) = \delta_2 \sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{\rho}{d}\right)\rho.$$

Si d a la forme $4k+1$, d sera un discriminant positif fondamental et la somme

$$\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{\rho}{d}\right)\rho=\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{d}{\rho}\right)\rho$$

est nulle; mais pour $d=4k+3$ c'est $-d$ qui est un discriminant et nous aurons

$$\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{\rho}{d}\right)\rho=\sum_{\rho=1}^{d-1}\left(\frac{-d}{\rho}\right)\rho$$

ce qui en vertu d'une formule connue, due à Dirichlet et à Kronecker, a pour valeur

$$-\frac{2}{\tau_d}\,d\,Cl(-d).$$

En résumé,

$$C(\delta_2)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\tau_d}\,d\,\delta_2\,Cl(-d), & d\equiv -1 \pmod{4}\\ 0 & d\equiv +1 \pmod{4}.\end{cases}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression récemment obtenue de B_d, il vient

$$B_d=-\frac{2}{\tau_d}\,Cl(-d)\,.\,n\sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)\left(\frac{\delta_1}{d}\right),$$

si $d\equiv -1 \pmod{4}$ et $B_d=0$ dans le cas contraire.

Toutefois l'hypothèse de $d=1$ échappe aux conclusions précédentes et la recherche directe donne

$$B_1=\sum_{\delta_1}\mu(\delta_1)\,\delta_1\sum_{1}^{\delta_2}\nu,\quad (\delta_1\,\delta_2=n),$$

ou bien

$$B_1=\sum\mu(\delta_1)\,\delta_1\,\frac{\delta_2+\delta_2^2}{2}=\frac{1}{2}\sum\mu(\delta_1)\,n$$

$$+\frac{1}{2}\sum\mu(\delta_1)\,n\,\delta_2$$

d'où en faisant usage du théorème

$$\sum\mu(\delta_1)=0,$$

puis observant que

$$\sum\mu(\delta_1)\,\delta_2=\varphi(n),$$

il vient

$$B_1 = \frac{1}{2} n \varphi(n).$$

Nous avons ainsi

$$2^{\circ}\ A = \frac{1}{2} n \varphi(n) - n \sum_{d} \frac{2}{\tau_d} Cl(-d)\, M_d(n), \tag{8}$$

où l'on fait pour abréger

$$M_d(n) = \sum_{\delta_1} \mu(\delta_1) \left(\frac{\delta_1}{d}\right),$$

et d parcourt des diviseurs de n composés de facteurs premiers différents et satisfaisant à la condition

$$d \equiv -1 \text{ (mod. 4)}.$$

Autrement dit, le symbole d signifie tout diviseur de n tel que $-d$ soit un discriminant fondamental

La somme $M_d(n)$ est évidemment égale au produit

$$\Pi\left(1 - \left(\frac{p'}{d}\right)\right),$$

où p' parcourt les differents facteurs premiers du nombre $d' = \frac{n}{d}$ · On peut y ajouter les parenthèses

$$1 - \left(\frac{p''}{d}\right) = 1$$

où p'' sont des facteurs premiers du nombre d, car alors

$$\left(\frac{p''}{d}\right) = 0,$$

et l'on aura

$$M_d(n) = \left(1 - \left(\frac{p_1}{d}\right)\right)\left(1 - \left(\frac{p_2}{d}\right)\right) \cdots \left(1 - \left(\frac{p_\omega}{d}\right)\right). \tag{9}$$

La formule (8) avec la valeur (9) du facteur $M_d(n)$ résout le problème.

Si n ne contient pas 3 comme facteur, on aura partout $\tau_d = 2$ et la formule (8) fait voir que A est divisible par n. Mais si n est divisible par 3, le second membre contient un terme provenant de $d=3$ et qui est

$$-n\cdot\frac{1}{3}M_3(n)=-\frac{n}{3}\prod_{\nu=1}^{\varpi}\left(1-\left(\frac{p_\nu}{3}\right)\right).$$

Si un au moins des facteurs p_ν est de la forme $3k+1$, le terme en question sera nul et le nombre A sera encore divisible par n. Mais si tous les autres facteurs de n sont de la forme $3k+2$, le terme étudié sera

$$-\frac{n}{3}\cdot 2^{\varpi-1},$$

et nous aurons

$$2A\equiv-\frac{n}{3}\ (\text{mod. } n).$$

Le second membre pouvant s'écrire

$$n-\frac{n}{3}=\frac{2}{3}n,$$

on aura

$$A\equiv\frac{n}{3}\ (\text{mod. } n).$$

On a ainsi le théorème :

La somme A des résidus quadratiques d'un nombre impair n, supposés différents entre eux et compris entre zéro et n, et premiers avec le module n, satisfait à la congruence

$$A\equiv\frac{n}{3}\ (\text{mod. } n),$$

si n est divisible par trois, tous les autres facteurs premiers de n ayant la forme $3k+2$. Dans tous les autres cas on a

$$A\equiv 0\ (\text{mod. } n).$$

Ce résultat répond à la question 2208 (année 1901) de l'*Intermédiaire des mathématiciens*, posée par M. DURÀN LORIGA.