SUR UN THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES DE PREMIÈRE ESPÈCE ET SUR QUELQUES PROBLÈMES DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE [1].

Par M. **Émile Picard** (Paris).

Adunanza dell'11 luglio 1909.

Nous nous proposons de faire connaître d'abord un théorème général donnant la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation intégrale de première espèce

$$f(x) = \int_a^b K(x, y) F(y) dy \tag{1}$$

puisse être résolue, et d'indiquer ensuite divers exemples empruntés à quelques problèmes de physique mathématique, comme le problème de l'armille avec chaleur spécifique variable, et le problème classique de Dirichlet pour le plan dans le cas où la solution peut être mise sous la forme d'un potentiel logarithmique de simple couche [1]).

I.

Un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce.

1. Dans l'équation (1), $f(x)$ et $K(x, y)$ sont deux fonctions *données*, et $F(y)$ est la fonction *inconnue*. Pour simplifier, nous faisons l'hypothèse que $f(x)$ et $K(x, y)$ sont des fonctions continues (on pourrait relativement à K se borner à le supposer sommable et de carré sommable); quant à la fonction cherchée $F(y)$, nous faisons l'hypothèse qu'elle *est sommable et de carré sommable.*

Il est bien connu que l'équation (1) n'a pas en général de solution. On peut, sous une forme simple, donner *la condition nécessaire et suffisante* pour la possibilité de la

[1]) Les questions faisant l'objet de ce Mémoire, ont été traitées dans mon cours au printemps dernier. J'ai donné quelques indications à ce sujet dans les Notes: *Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et sur certains problèmes de Physique mathématique* [Comptes rendus hebdomadaire des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLVIII (1er semestre 1909), pp. 1563-1568 (séance du 14 juin 1909)]; *Sur les équations intégrales de première espèce* [Ibid., id., pp. 1707-1708 (séance du 28 juin 1909)].

résolution de l'équation (1) au moyen d'une fonction $F(y)$ satisfaisant aux conditions indiquées; c'est ce que je me propose de montrer.

2. Je rappelle d'abord un résultat obtenu par M. ERHARD SCHMIDT dans ses belles études sur l'équation de FREDHOLM (Mathematische Annalen, tome LXIII). Soient les deux équations conjuguées simultanées

$$(2)\qquad \begin{cases} \varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\psi(y)dy, \\ \psi(x) = \lambda \int_a^b K(y, x)\varphi(y)dy. \end{cases}$$

Il existe (sauf un cas particulier facile à caractériser) une infinité de valeurs réelles de λ (qu'on peut supposer positives), pour lesquelles ces équations sont satisfaites autrement que pour

$$\varphi(x) = \psi(x) = 0.$$

Soient, rangées par ordre de grandeur croissante,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

ces valeurs de λ, et les valeurs correspondantes des φ et des ψ

$$(3)\qquad \varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$$

$$(4)\qquad \psi_1, \quad \psi_2, \ldots, \psi_n, \ldots.$$

Les fonctions continues φ et ψ forment un système orthogonal et normal, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (m \neq n), \qquad \int_a^b \varphi_m^2(x)dx = 1.$$

Et pareillement pour les ψ.

3. Nous aurons aussi besoin d'un remarquable théorème de M. F. RIESZ (Göttingen Nachrichten, 1907). Étant donnée une suite telle que (3), orthogonale et normale, appelons, à l'exemple de certains géomètres allemands, *coefficients de* FOURIER *d'une fonction $f(x)$ relatifs à cette suite* les expressions

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

D'après M. F. RIESZ, étant donnée une suite de nombres a_n, la condition nécessaire et suffisante pour qu'on puisse trouver une fonction $f(x)$, sommable et de carré sommable, ayant les a_n comme coefficients de FOURIER, est que *la série*

$$\sum a_n^2$$

soit convergente [2]).

[2]) M. FISCHER a donné du théorème de M. F. RIESZ une seconde démonstration très intéressante, où il s'appuie sur la notion de convergence en moyenne {E. FISCHER, *Sur la convergence en moyenne* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), tome CXLIV (1er semestre 1907), pp. 1022-1024 (séance du 13 mai 1907)]; *Applications d'un théorème sur la convergence en moyenne* [Ibid., id., pp. 1148-1151 (séance du 27 mai 1907)]}.

4. Envisageons maintenant l'équation fonctionnelle (1), et considérons les constantes λ_n et les fonctions φ_n et ψ_n correspondant, avec les équations (2), au noyau $K(x, y)$. Je suppose de plus que *la suite des* φ *soit fermée* [3]), c'est-à-dire qu'il n'y ait pas en dehors de *zéro* de fonction $h(x)$ satisfaisant aux relations

$$\int_a^b h(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

On a, dans ces conditions, le théorème suivant:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) *puisse être résolue par une fonction* $F(y)$ *sommable et de carré sommable est que, en désignant par* a_n *les coefficients de* FOURIER *de* $f(x)$ *relatifs aux* φ, *la série*

$$\sum \lambda_n^2 a_n^2$$

soit convergente.

5. Tout d'abord la condition est nécessaire. Supposons l'équation (1) vérifiée dans les conditions indiquées. On aura

$$a_n = \int_a^b f(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b K(x, y)\varphi_n(x)F(y)\,dx\,dy$$

et, en se servant de l'équation

$$\psi_n(x) = \lambda_n \int_a^b K(y, x)\varphi_n(y)\,dy, \tag{5}$$

on a de suite

$$a_n = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b F(y)\psi_n(y)\,dy.$$

Si donc on appelle B_n le coefficient de FOURIER de $F(y)$ relatif aux ψ, on a

$$B_n = \lambda_n a_n.$$

Mais la fonction F étant sommable et de carré sommable, la série

$$\sum B_n^2$$

est convergente, d'après un théorème bien connu. *Il en sera de même de la série*

$$\sum \lambda_n^2 a_n^2,$$

comme nous voulions l'établir; *la condition est donc nécessaire.*

6. Inversement, supposons cette condition vérifiée pour la fonction $f(x)$ dont les a_n représentent les coefficients de FOURIER relatifs aux φ. Il existera, d'après le théorème de M. F. RIESZ, une fonction $F(x)$ sommable et de carré sommable, ayant relativement aux ψ les coefficients de FOURIER

$$\lambda_n a_n.$$

Posons alors

$$f_1(x) = \int_a^b K(x, y)F(y)\,dy, \tag{6}$$

[3]) On verra plus loin les circonstances qui se présentent quand la suite n'est pas fermée.

et cherchons les coefficients a'_n de FOURIER de $f_1(x)$ relatifs aux φ. Les coefficients a'_n sont donnés par les intégrales

$$a'_n = \int_a^b f_1(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Or on trouve de suite, en utilisant l'équation (5),

$$a'_n = \int_a^b \int_a^b K(x, y)\varphi_n(x)F(y)\,dx\,dy = \frac{1}{\lambda_n}\int_a^b F(y)\psi_n(y)\,dy = \frac{1}{\lambda_n}\cdot\lambda_n a_n = a_n.$$

Donc les coefficients de FOURIER de $f_1(x)$ relatifs aux φ sont les mêmes que ceux de la fonction donnée $f(x)$. Par suite, puisque le système des φ *a été supposé fermé,* on aura

$$f_1(x) = f(x),$$

et l'égalité (6) nous donne

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)F(y)\,dy,$$

ce qui démontre bien que *la condition est suffisante.* Le théorème est donc complètement établi.

7. Nous avons supposé que le système des φ était *fermé.* Si il en était autrement, on ne pourrait pas conclure nécessairement à l'identité de $f_1(x)$ et de $f(x)$. Le raisonnement montre seulement que

$$\int_a^b [f_1(x) - f(x)]\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

La fonction $f_1 - f$ rentre donc dans les fonctions $h(x)$ telles que

$$\int_a^b h(x)\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{7}$$

On aurait donc la relation

$$f(x) = h(x) + \int_a^b K(x, y)F(y)\,dy, \tag{8}$$

$h(x)$ étant une fonction satisfaisant aux relations (7).

On pourrait se demander, quand $h(x)$ n'est pas identiquement nul, si il ne serait pas néanmoins possible de mettre $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)F_1(y)\,dy, \tag{9}$$

$F_1(y)$ étant une fonction convenablement choisie. La comparaison des équations (8) et (9), donne

$$h(x) = \int_a^b K(x, y)F_2(y)\,dy, \tag{10}$$

en posant $F_2(y) = F_1(y) - F(y)$.

Or de l'équation (10), en multipliant par $\varphi_n(x)\,dx$ et intégrant, on tire de suite, en tenant compte de (7),

$$\int_a^b F_2(y)\psi_n(y)\,dy = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{11}$$

Or de la théorie du système des équations conjuguées (2), telle qu'elle a été développée par M. SCHMIDT, il résulte que les équations (11) entraînent l'identité

$$\int_a^b K(x, y)F_2(y)dy = 0.$$

Donc $h(x)$ serait identiquement nul, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Nous concluons du calcul précédent que, quand le système des φ n'est pas fermé, il peut être impossible de satisfaire à l'équation fonctionnelle (1) considérée au début, quand bien même la condition relative à la convergence de la série $\sum \lambda_n^2 a_n^2$ est vérifiée.

8. Nous avons supposé la fonction $K(x, y)$ continue, mais si cette fonction est sommable et de carré sommable, on voit aisément que rien n'est changé à nos conclusions. Il en est ainsi en particulier, si $K(x, y)$ devient infini comme

$$\log |x - y|;$$

c'est ce qui se présentera dans une application que nous ferons plus loin.

Quant à la fonction $f(x)$, elle a été supposée continue, mais c'est manifestement là encore une hypothèse trop restrictive. On pourrait, *par exemple,* supposer qu'elle a un nombre limité de sauts brusques finis.

9. Si la fonction $K(x, y)$ était symétrique en x et y, la théorie précédente est susceptible de simplification. On peut en effet considérer, au lieu du système (2) l'équation

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Il y a des valeurs singulières

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$$

qu'on peut supposer rangées par ordre de modules croissants. Les raisonnements faits plus haut subsistent, et on aura toujours à considérer la série

$$\sum \lambda_n^2 a_n^2.$$

Si on avait

$$K(x, y) = H(x, y)p(y),$$

$H(x, y)$ étant symétrique, et $p(y)$ étant une fonction positive de y, l'équation

$$f(x) = \int_a^b K(x, y)F(y)dy$$

devient, en posant

$$f(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt{p(x)}}, \qquad F(y) = \frac{F_1(y)}{\sqrt{p(y)}},$$

$$f_1(x) = \int_a^b H(x, y)\sqrt{p(x)p(y)}F_1(y)dy$$

qui nous ramène au cas symétrique.

II.

Le problème de l'armille.

10. Le problème de l'armille avec chaleur spécifique variable et sans communication calorifique avec l'extérieur nous donnera l'occasion de vérifier les conclusions précédentes dans des circonstances différentes seulement en apparence. On sait que ce problème conduit à l'équation aux dérivées partielles

$$A(\theta)\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2},$$

$A(\theta)$ étant une fonction *positive* et de période 2π.

Remplaçons l'angle θ par x, et écrivons l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = A(x)\frac{\partial V}{\partial t}, \tag{12}$$

$A(x)$ étant une fonction *positive* et de période $b - a$, de sorte que $x = a$ et $x = b$ $(a < b)$ correspondent aux extrémités de la circonférence de l'armille transformée en droite.

Posant dans l'équation (12)

$$V(x, t) = e^{-\lambda} . y(x),$$

nous sommes conduit à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda A(x) y = 0. \tag{13}$$

Comme on veut que $V(x, t)$ soit périodique en x, avec période $b - a$, il faut étudier les cas où l'équation (13) admet une intégrale périodique. Quoique ce problème ait déjà fait l'objet de bien des recherches, je reprendrai sommairement la question, ayant besoin de fixer l'ordre de grandeur des valeurs singulières.

11. Il résulte tout d'abord, de propositions élémentaires relatives aux équations différentielles linéaires, que les valeurs de λ pour lesquelles l'équation (13) admet une solution périodique de période $b - a$, non identiquement nulle, sont racines d'une certaine fonction entière; nous appellerons ces valeurs de λ valeurs *singulières*. Il est aussi très aisé de voir que les valeurs singulières sont *réelles et positives*.

Montrons maintenant que les valeurs singulières sont en nombre infini. On sait qu'à l'équation (13) correspondent des valeurs positives de λ, en nombre infini,

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots, \tag{14}$$

telles que une intégrale y (non identiquement nulle) s'annule pour $x = a$ et pour $x = b$; nous appellerons φ_i l'intégrale nulle en a et b, déterminée à un facteur constant près et correspondant à λ_i.

Envisageons maintenant l'intégrale de (13) (λ étant arbitraire)

$$u(x, \lambda)$$

prenant pour $x = a$ et $x = b$ la valeur *un*. La fonction $u(x, \lambda)$ envisagée comme fonction de λ, ne peut avoir d'autres pôles que des points figurant dans la suite (14).

Supposons que λ_i ne soit pas pôle de $u(x, \lambda)$; je dis que l'équation (13) aura alors une solution périodique pour $\lambda = \lambda_i$. Soit en effet dans le voisinage de $\lambda = \lambda_i$

$$u(x, \lambda) = y_0 + (\lambda - \lambda_i) y_1 + \cdots,$$

y_0 prenant nécessairement en a et b la valeur *un*, et y_1, y_2, ... s'annulant en a et b. En substituant $u(x, \lambda)$ dans l'équation (13), nous avons

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + \lambda_i A(x) y_0 = 0;$$

comme d'ailleurs

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} + \lambda_i A(x) \varphi_i = 0,$$

on déduit de ces deux dernières relations

$$\left(\varphi_i \frac{dy_0}{dx} - y_0 \frac{d\varphi_i}{dx}\right)_a^b = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_a = \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_b.$$

La fonction φ_i s'annulant en a et b, et sa dérivée prenant la même valeur en a et b, il en résulte qu'elle admet bien la période $b - a$.

On remarquera que la circonstance indiquée ne peut se présenter (si elle se présente) que pour les λ d'indices pairs; ce qui se voit de suite, en se rappelant que le nombre des racines de φ_i entre a et b est précisément égal à $i - 1$.

12. Soit maintenant λ_i un pôle (nécessairement simple) de $u(x, \lambda)$. Cherchons le signe de la différence

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_b - \left(\frac{du}{dx}\right)_a$$

un peu avant et un peu après le passage de λ par λ_i. Nous avons dans le voisinage de $\lambda = \lambda_i$

$$u(x, \lambda) = \frac{\varphi_i}{\lambda - \lambda_i} + v_0 + v_1(\lambda - \lambda_i) + \cdots,$$

v_0 prend en a et b la valeur *un*, et φ_i rentre dans le type des fonctions de ce nom, la constante (non nulle) se trouvant complètement déterminée. En substituant, on a

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} + \lambda_i A(x) \varphi_i = 0,$$

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} + A(x) \varphi_i + \lambda_i A(x) v_0 = 0.$$

On en tire, en multipliant respectivement ces équations, par v_0 et φ_i, retranchant et intégrant

$$\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_b - \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_a = \int_a^b A(x) \varphi_i^2(x)\, dx > 0.$$

Or

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_b - \left(\frac{du}{dx}\right)_a = \frac{\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_b - \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_a}{\lambda - \lambda_i} + \cdots.$$

Nous en concluons que

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_b - \left(\frac{du}{dx}\right)_a$$

passe du signe *moins* au signe *plus,* quand λ passe par λ_i.

Soient alors deux pôles *consécutifs* λ_m et λ_p de $u(x, \lambda)$. Il y aura certainement entre λ_m et λ_p au moins une valeur cherchée de λ; car la différence

$$\left(\frac{du}{dx}\right)_b - \left(\frac{du}{dx}\right)_a, \tag{15}$$

continue entre $\lambda_m + \varepsilon$ et $\lambda_p - \eta$, passe du signe *plus* au signe *moins,* quand λ varie dans cet intervalle. Il y a donc une valeur de λ, au moins entre λ_m et λ_p, telle que u prend la valeur *un* en a et b, et que $\frac{du}{dx}$ a aussi la même valeur en ces points. Pour cette valeur de λ, $u(x, \lambda)$ *est alors périodique.*

13. On peut aller plus loin, en montrant que la différence (15) va toujours en diminuant quand λ varie entre λ_m et λ_p, de sorte qu'il n'y a entre λ_m et λ_p qu'*une seule* valeur de λ correspondant à une solution périodique.

La vérification est immédiate. Soit λ_0 quelconque entre λ_m et λ_p; on a

$$u(x, \lambda) = u_0 + (\lambda - \lambda_0)u_1 + \cdots,$$

u_0 étant égal à *un* en a et b, et les autres u étant nuls. On substitue dans l'équation, ce qui donne

$$\frac{d^2u_0}{dx^2} + \lambda_0 A(x)u_0 = 0,$$

$$\frac{d^2u_1}{dx^2} + A(x)u_0 + \lambda_0 A(x)u_1 = 0,$$

d'où se déduit

$$\left(u_1\frac{du_0}{dx} - u_0\frac{du_1}{dx}\right)_a^b = \int_a^b A(x)u_0^2\,dx > 0$$

et par suite

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_a > \left(\frac{du_1}{dx}\right)_b.$$

Or prenons la dérivée de (15) par rapport à λ, et faisons $\lambda = \lambda_0$; la valeur de cette dérivée est

$$\left(\frac{du_1}{dx}\right)_b - \left(\frac{du_1}{dx}\right)_a;$$

elle est donc négative, comme nous voulions l'établir.

Il y a donc *une seule* valeur singulière entre deux pôles consécutifs de $u(x, \lambda)$.

Il résulte de ce qui précède que les valeurs singulières de λ sont en nombre infini;

écrivons la suite de ces valeurs singulières

$$0, \quad k_1, \quad k_2, \ldots, k_n, \ldots,$$

la valeur *zéro* étant manifestement la première. Comme les λ_n sont *de l'ordre de* n^2, le théorème du § précédent nous apprend que les k_n *sont aussi de l'ordre de* n^2, résultat important pour la suite.

En général [c'est-à-dire quand la fonction positive périodique $A(x)$ est quelconque] les λ_i ne sont pas des k_i, et entre deux λ il y a un k.

14. Dans certains cas particuliers, il peut arriver qu'un λ soit un k. Nous avons vu au § 11 qu'il en est ainsi, si un certain λ_i n'est pas un pôle de $u(x, \lambda)$; il arrive alors que φ_i admet la période $b - a$. J'ajoute qu'il y aura pour $\lambda = \lambda_i$ une autre solution périodique linéairement indépendante de φ_i. En effet λ_{i-1} et λ_{i+1} sont nécessairement ici des pôles consécutifs de $u(x, \lambda)$ (*voir* la fin du § 11), et il résulte du raisonnement du § 12 que

$$u(x, \lambda_i)$$

est une solution périodique, manifestement distincte de φ_i. Ainsi donc, l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda_i A(x) y = 0$$

aura, dans le cas particulier qui nous occupe, *deux* solutions périodiques linéairement indépendantes.

La réciproque est exacte, c'est-à-dire que si l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k_i A(x) y = 0$$

a toutes ses solutions périodiques, k_i fait nécessairement partie de la suite des λ_i. Désignons en effet par $f_i(x)$ et $F_i(x)$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation ci-dessus. Il est clair que $f_i(a)$ et $F_i(a)$ ne sont pas nuls à la fois, si non toutes les solutions de l'équation s'annuleraient en a. On peut choisir les constantes α et β de manière que

$$\alpha f_i(a) + \beta F_i(a) = 0.$$

Alors $\alpha f_i(x) + \beta F_i(x)$ s'annulera en a et b; donc k_i est un λ_n.

On peut encore se demander quand l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda_i A(x) y = 0$$

a une solution périodique, si on est nécessairement dans le cas du commencement de ce § où φ_i admettait la période $b - a$. Il en est bien ainsi, car autrement l'équation admet nécessairement une intégrale périodique prenant la valeur *un* en a et b, que nous désignerons par U. Des deux équations

$$\frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} + \lambda_i A(x) \varphi = 0,$$

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \lambda_i A(x) U = 0,$$

on déduit immédiatement $\left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_a = \left(\frac{d\varphi_i}{dx}\right)_b$, c'est-à-dire que φ_i est périodique.

Nous pouvons résumer ce §, en disant que tous les cas et les seuls cas où, pour une valeur de λ, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda A(x)y = 0$$

a toutes ses solutions périodiques, est celui où λ fait à la fois partie des λ_i et des k_n.

15. Le cas particulier visé dans le § précédent se rencontre toujours (sauf pour $\lambda = 0$) quand $A(x)$ se réduit à une constante A. Le calcul se fait ici complètement; on a

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{A(b-a)^2}, \qquad k_n = \frac{4n^2\pi^2}{A(b-a)^2},$$

tous les k sont donc des λ, à l'exception de $k = 0$.

A k_n correspondent les deux solutions périodiques distinctes $(n \neq 0)$

$$\cos\frac{2n\pi x}{b-a} \quad \text{et} \quad \sin\frac{2n\pi x}{b-a}.$$

16. D'une manière générale désignons, comme plus haut, par

$$(16) \qquad 0, \quad k_1, \quad k_2, \ \ldots, \ k_n, \ \ldots$$

la suite des valeurs singulières, et par

$$(17) \qquad \Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \ \ldots, \ \Phi_n, \ \ldots$$

les solutions périodiques correspondantes; la première Φ_0 est une constante. Il peut arriver exceptionnellement que deux k consécutifs soient égaux, soit $k_i = k_{i+1}$, mais les fonctions correspondantes Φ_i et Φ_{i+1} ne sont pas identiques.

On peut supposer que les Φ forment un système orthogonal [le poids étant $A(x)$]. Il en est nécessairement ainsi pour deux Φ correspondant à des valeurs différentes de k, car on déduit de suite des équations différentielles

$$\int_a^b A(x)\Phi_m(x)\Phi_n(x)\,dx = 0 \qquad (k_m \neq k_n).$$

Si, ayant $k_i = k_{i+1}$, on n'avait pas

$$\int_a^b A(x)\Phi_i(x)\Phi_{i+1}(x)\,dx = 0,$$

on prendrait, au lieu de Φ_i et Φ_{i+1} les fonctions Φ_i et $\alpha\Phi_i + \Phi_{i+1}$, α étant une constante convenablement choisie pour que la condition d'orthogonalité soit alors vérifiée.

Enfin, puisque les Φ sont déterminées seulement à un facteur constant près, on peut supposer que pour $m = n$ la valeur de l'intégrale soit l'unité. On a donc relativement à la suite (17)

$$\int_a^b A(x)\Phi_m(x)\Phi_n(x)\,dx = 0,$$

$$\int_a^b A(x)\Phi_m^2(x)\,dx = 1.$$

17. *La suite des Φ est fermée,* comme nous allons maintenant l'établir. Nous montrerons que, si l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\Phi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty),$$

$f(x)$ étant une fonction continue de a à b (n'étant pas nécessairement périodique), on a nécessairement

$$f(x) = 0$$

identiquement. Envisageons en effet l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \lambda A(x) y = f(x). \tag{18}$$

Quand λ est arbitraire, il y a une intégrale de cette équation, continue ainsi que sa dérivée première, et ayant la période $b - a$. On le montre en considérant deux solutions distinctes

$$y_1(\lambda, x) \quad \text{et} \quad y_2(\lambda, x)$$

de l'équation sans second membre, et répondant pour $x = a$ à des conditions numériques (c'est-à-dire indépendantes de λ), de sorte que y_1 et y_2 sont des fonctions *entières* en λ. En appliquant la méthode de la variation des constantes, on a les deux équations

$$\frac{dC_1}{dx} y_1 + \frac{dC_2}{dx} y_2 = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dx}\frac{dy_1}{dx} + \frac{dC_2}{dx}\frac{dy_2}{dx} = f(x).$$

Par suite C_1 et C_2 sont eux mêmes des fonctions entières de λ, avec chacun une constante additive. On déterminera ces deux constantes, de manière que, pour $x = a$ et $x = b$, la fonction $C_1 y_1 + C_2 y_2$ et sa dérivée première aient les mêmes valeurs; ceci sera possible à moins que λ ne soit égale à une des valeurs singulières $0, k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$.

Désignons donc par $y(x, \lambda)$ la solution de période $b - a$ de l'équation (18). Cette fonction de λ ne peut admettre d'autres pôles que les k, ceux-ci étant alors des pôles simples, comme on le vérifie aisément.

Je dis que si on a

$$\int_a^b f(x)\Phi_n(x)\,dx = 0 \qquad (n \text{ quelconque}),$$

la fonction $y(x, \lambda)$ n'aura pas de pôles. Soit en effet dans le voisinage de $\lambda = k_i$,

$$y(x, \lambda) = \frac{\alpha \Phi_i}{\lambda - k_i} + \chi_0 + (\lambda - k_i)\chi_1 + \cdots,$$

α étant une constante, et les χ étant des fonctions continues périodiques ainsi que leurs dérivées premières. La substitution dans l'équation (18) donne

$$\frac{d^2 \Phi_i}{dx^2} + k_i A(x) \Phi_i = 0,$$

$$\frac{d^2 \chi_0}{dx^2} + \alpha \Phi_i A(x) + k_i A(x)\chi_0 = f(x).$$

On en conclut, en multipliant par χ_0 et Φ_i, puis intégrant,

$$\alpha \int_a^b A(x)\Phi_i^2(x)\,dx = \int_a^b f(x)\Phi_i(x)\,dx = 0.$$

Donc α est nul, et par suite k_i n'est pas un pôle.

Il résulte de là que $y(x, \lambda)$ est *une fonction entière de* λ. On va voir que cela est impossible, si $f(x)$ n'est pas identiquement nul.

18. Formons, à cet effet, la fonction *entière* de λ

$$F(\lambda) = \int_a^b A(x).y(x, \lambda)\,dx.$$

En posant

$$y = y_0 + \lambda y_1 + \cdots + \lambda^n y_n + \cdots,$$

les y étant périodiques ainsi que leurs dérivées premières, on a manifestement

$$(E)\qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y_0}{dx^2} = f(x), \\ \dfrac{d^2 y_1}{dx^2} + A(x)y_0 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{d^2 y_n}{dx^2} + A(x)y_{n-1} = 0. \end{cases}$$

Nous écrivons alors

$$F(\lambda) = W_0 + W_1\lambda + \cdots + W_n\lambda^n + \cdots,$$

où les W sont du type de constantes envisagées pour la première fois par Schwarz. On a d'une manière générale

$$W_n = \int_a^b A(x)y_0 y_n\,dx,$$

et toutes ces constantes sont positives, car des équations (E) il résulte que l'on peut écrire

$$W_{2n-1} = \int_a^b \left(\frac{dy_n}{dx}\right)^2 dx, \qquad W_{2n} = \int_a^b A(x)y_n^2\,dx.$$

De plus, d'après le mode de raisonnement devenu classique de Schwarz sur ce type de constantes, on a

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \cdots < \frac{W_n}{W_{n-1}} < \cdots,$$

ces considérations supposant d'ailleurs que $f(x)$ n'est pas identiquement nul. Dans ces conditions,

$$\frac{W_n}{W_{n-1}}$$

allant en croissant, a nécessairement une limite. Celle-ci est finie, sinon la série $F(\lambda)$ ne convergerait que pour $\lambda = 0$. D'autre part cette limite n'est pas nulle, d'après les inégalités ci-dessus; mais alors, la série $F(\lambda)$ a un rayon de convergence fini et n'est donc pas une fonction entière. *Il y a donc une contradiction*, et par suite $f(x)$ est identiquement nul. *Il est ainsi établi que le système des* Φ *est fermé.*

19. Le problème de l'armille fournit un intéressant développement en série, celui d'une fonction donnée $f(x)$ suivant les fonctions Φ_n, et cette question nous conduit à diverses remarques se rattachant à la première section de ce travail. Supposons que la fonction $f(x)$ soit une fonction continue ainsi que sa dérivée première, ces deux fonctions ayant la période $b-a$, et supposons de plus que la dérivée seconde $f''(x)$ existe et soit continue.

On peut alors développer $f(x)$ en série suivant les Φ_n

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \Phi_n, \tag{19}$$

où le coefficient a_n est donné par

$$a_n = \int_a^b A(x) f(x) \Phi_n(x)\, dx.$$

Nous allons montrer que *la série*

$$\sum k_n^2 a_n^2$$

est convergente. En effet, l'équation

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dx^2} + k_n A(x) \Phi_n = 0$$

permet d'écrire

$$a_n = -\frac{1}{k_n} \int_a^b f(x) \frac{d^2 \Phi_n}{dx^2}\, dx.$$

En intégrant par parties, et se rappelant les hypothèses faites sur $f(x)$, on a

$$a_n = -\frac{1}{k_n} \int_a^b \Phi_n(x) f''(x)\, dx,$$

ou encore

$$k_n a_n = \int_a^b A(x) \Phi_n(x) f_1(x)\, dx,$$

en posant

$$f_1(x) = -\frac{f''(x)}{A(x)}.$$

Le théorème est alors démontré, car, si on pose

$$\alpha_n = \int_a^b a(x) \Phi_n(x) f_1(x)\, dx,$$

on sait que la série $\sum \alpha_n^2$ est convergente, comme il résulte de l'égalité classique

$$\int_a^b A(x) [f_1(x) - \alpha_1 \Phi_1 - \cdots - \alpha_n \Phi_n]^2\, dx = \int_a^b A(x) f_1^2(x)\, dx - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \cdots - \alpha_n^2.$$

Nous voyons donc que la série

$$\sum k_n^2 a_n^2$$

est convergente.

On remarquera que nous sommes ici tout à fait dans le même ordre d'idées que dans la section I, et que la série de terme général $\sum k_n^2 a_n^2$ intervient au fond dans les mêmes conditions qu'aux §§ 5 et 6.

20. J'ai démontré de la manière suivante dans mes leçons de l'année dernière la formule (19) relative au développement de $f(x)$.

La fonction Φ_n a certainement des racines entre a et b. Soit α l'une d'elles; nous pourrons écrire

$$\Phi_n = \int_\alpha^x \Phi'_n dx,$$

d'où, en appliquant l'inégalité dite de Schwarz, on aura

$$\Phi_n^2 < \left|\int_\alpha^x \Phi_n'^2 dx\right| \cdot \left|\int_\alpha^x dx\right|$$

et par suite

$$\Phi_n^2 < \int_a^b \Phi_n'^2 dx . (b-a) = k_n . (b-a),$$

car on a de suite

$$\int_a^b \Phi_n'^2 dx = k_n .$$

Nous avons donc

$$|\Phi_n| < \sqrt{b-a} . \sqrt{k_n} .$$

D'autre part, avec les notations du § précédent,

$$a_n = \frac{\alpha_n}{k_n},$$

la série $\sum \alpha_n^2$ étant convergente.

Nous pouvons alors montrer que la série

$$\sum |a_n| \cdot |\Phi_n|$$

est uniformément convergente dans l'intervalle (a, b).

Il suffira de montrer que la série

$$\sum \frac{1}{\sqrt{k_\nu}} \cdot |\alpha_\nu|$$

est convergente. Or, d'après une inégalité élémentaire, la somme

$$\sum_n^m \frac{1}{\sqrt{k_\nu}} \cdot |\alpha_\nu| \qquad (n < m)$$

est inférieure à la racine carrée du produit

$$\left(\sum_n^m \frac{1}{k_\nu}\right) \cdot \left(\sum_n^m \alpha_\nu^2\right) .$$

Or nous avons vu plus haut que k_ν était de l'ordre de ν^2, c'est-à-dire était égal à ν^2 multiplié par un nombre restant compris entre deux nombres fixes positifs. Chacun des termes du produit est donc aussi petit que l'on veut, si n est assez grand (m étant quelconque, supérieur à n). *La convergence uniforme et absolue de la série*

$$\sum a_n \Phi_n$$

est donc établie.

21. Il est aisé maintenant d'établir que cette série représente $f(x)$. Considérons en effet la différence

$$f(x) - \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu \Phi_\nu(x),$$

que nous désignerons par $R(x)$. Le calcul de l'intégrale

$$\int_a^b A(x) R(x) \Phi_n(x) dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

est immédiat. *Sa valeur est nulle,* et, puisque le système des Φ est *fermé* (§ 17) il en résulte que $R(x)$ est identiquement nulle, et par suite

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} a_\nu \Phi_\nu(x),$$

ce qui démontre la possibilité du développement.

III.

Sur le problème de Dirichlet dans le plan et sur le potentiel logarithmique de simple couche.

22. Considérons dans le plan un contour C. On sait que l'on peut mettre la fonction harmonique continue dans C, et prenant sur C une succession donnée de valeurs sous la forme *d'un potentiel de double couche,* et il est bien connu que le problème posé sous cette forme conduit à une équation de Fredholm. Cherchons d'une manière analogue si la solution du problème de Dirichlet est possible sous la forme *d'un potentiel logarithmique de simple couche.*

En appelant s l'arc de la courbe C, soit $f(s)$ la succession des valeurs données sur C. Désignons par r la distance de deux points du contour correspondant à s et à σ. La réponse à la question posée sera affirmative, si l'on peut résoudre l'équation intégrale de première espèce

$$f(s) = \int_0^l \rho(\sigma) \log \frac{1}{r} d\sigma \qquad (l = \text{longueur de } C),$$

l'inconnue étant la fonction $\rho(\sigma)$.

Le noyau $\log \frac{1}{r}$ est ici une fonction symétrique de s et de σ. Il devient d'ailleurs infini pour $s = \sigma$, mais dans des conditions qui ne modifient en rien la théorie de la section I (§ 8). A cause de la symétrie du noyau, nous avons ici à considérer l'unique équation

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^l \log \frac{1}{r} \varphi(\sigma) d\sigma,$$

qui conduit aux valeurs singulières et fonctions correspondantes en nombre infini

$$\lambda_1, \quad \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots,$$
$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots,$$

ces fonctions étant orthogonales.

23. Montrons tout d'abord que le système des φ sera fermé *en général*; il ne peut y avoir d'exceptions que dans des cas particuliers. Supposons en effet que le système ne soit pas fermé. On aura pour une certaine fonction $h(\sigma)$

$$\int_0^l h(\sigma)\varphi_n(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

D'après la théorie générale de M. Schmidt relative aux noyaux symétriques, ces équations entraînent l'identité en s

$$\int_0^l h(\sigma)\log\frac{1}{r}\,d\sigma = 0. \tag{20}$$

Cette identité signifie que, pour une couche de densité $h(\sigma)$ étalée sur C, le potentiel logarithmique correspondant est nul sur C, et par conséquent nul à l'intérieur de l'aire limitée par C. L'attraction de la couche (attraction en raison inverse de la première puissance de la distance) sera donc nulle sur tout point intérieur. Mais on peut se poser ce problème de trouver une couche sur C sans action sur un point intérieur; il se traite, en écrivant que la dérivée normale *intérieure* du potentiel logarithmique de simple couche est nulle sur C. Ceci conduit à une équation de Fredholm sans second membre, qui, à un facteur constant près, possède une seule solution. Le problème posé est donc, à un facteur constant près, complètement déterminé, et le potentiel correspondant aura *une valeur constante,* mais cette valeur *ne sera pas nulle en général,* et, par suite, il n'y aura pas de fonction $h(\sigma)$ répondant à l'équation (20), en dehors de *zéro*.

Il peut évidemment arriver dans certains cas particuliers (c'est-à-dire pour certains contours C spéciaux) qu'il en soit autrement. Étudions à cet effet le cas d'une circonférence. Envisageons le cas d'une couche sans action sur un point intérieur. D'après la formule générale donnant la dérivée normale intérieure du potentiel logarithmique, on aura

$$h(s) - \frac{1}{\pi}\int \frac{\cos\psi}{r} h(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

où ψ désigne l'angle que fait la normale intérieure en s avec la direction allant de s à σ. Or ici, puis qu'il s'agit d'une circonférence, on a

$$\frac{r}{2} = R\cos\psi \qquad (R \text{ étant le rayon}).$$

On a donc l'équation

$$h(s) - \frac{1}{2\pi R}\int h(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Cette équation montre que $h(s)$ est indépendant de s. Ainsi la densité h correspondant à la couche cherchée est constante, soit Γ; le potentiel logarithmique correspondant est égale à la *constante*

$$\Gamma . \int \log \frac{1}{r} d\sigma \qquad (\Gamma \neq 0).$$

Or le calcul de cette intégrale est immédiat, car, étant constante sur C, elle sera constante à l'intérieur. Si donc nous nous plaçons au centre, nous aurons pour le potentiel l'expression

$$\Gamma . \log \frac{1}{R}$$

qui ne sera pas nulle *sauf dans le cas particulier* $R = 1$.

24. Revenons au cas général, où, le contour C étant quelconque, la suite des φ est fermée. Supposons, pour fixer les idées, la fonction $f(s)$ continue ou présentant un nombre limité de sauts brusques finis. D'après le théorème général de la première partie, en posant

$$a_n = \int_0^l f(\sigma)\varphi_n(\sigma)\,d\sigma,$$

la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse avoir un potentiel logarithmique prenant les valeurs $f(s)$ sur C (la densité satisfaisant aux conditions de sommabilité indiquées) est que *la série*

$$\sum \lambda_n^2 a_n^2$$

soit convergente.

Cette condition ne sera pas remplie en général, en supposant même que la fonction $f(s)$ soit une fonction continue présentant la période l, de manière que la succession des valeurs données sur C soit continue. Nous indiquerons tout à l'heure un exemple pour la circonférence.

25. Si la suite des φ n'était pas fermée, il y aurait, d'après ce que nous avons dit plus haut, une fonction $h(\sigma)$ déterminée à un facteur constant près pour laquelle

$$\int_0^l h(\sigma)\varphi_n(\sigma)\,d\sigma = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

En se reportant aux démonstrations des §§ 6 et 7, on voit que $f(s)$ ne serait pas nécessairement égale à $f_1(s)$ (nous supposons remplie la condition de convergence de la série), mais on pourrait avoir

$$f(s) = f_1(s) + A h(s),$$

A étant une constante non nulle, et par suite on aurait

$$f(s) = A h(s) + \int_0^l \log \frac{1}{r} . \rho(\sigma)\,d\sigma.$$

On a vu (§ 7) que $h(s)$ ne pourrait pas se mettre sous la forme d'une intégrale du type du second terme, et par suite $f(s)$ n'est pas susceptible de la forme cherchée.

26. Le cas particulier de la circonférence va nous donner des exemples des diverses circonstances qui viennent d'être indiquées. Il est facile de trouver ici les valeurs singulières correspondant à l'équation

$$\varphi(s) - \lambda \int_0^l \log \frac{1}{r}\, \varphi(\sigma)\, d\sigma = 0.$$

En prenant comme variable l'angle polaire θ, nous avons

$$(21) \qquad \varphi(\theta) - \lambda R \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} \cdot \varphi(\theta')\, d\theta' = 0.$$

Pour trouver les valeurs singulières de λ, envisageons un point (ρ, θ) à l'intérieur de la circonférence C $(\rho < R)$ et un point (R, θ') sur C. Si on désigne par r la distance de ces deux points, $\log \frac{1}{r}$ représente la partie réelle de

$$-\log(z' - z),$$

en représentant par z et z' les affixes des points (ρ, θ) et (R, θ'). Or

$$\log(z' - z) = \log z' - \frac{z}{z'} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{z'^2} - \cdots - \frac{1}{n}\frac{z^n}{z'^n} - \cdots.$$

On aura donc

$$\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{R} + \frac{\rho}{R}\cos(\theta - \theta') + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\theta - \theta') + \cdots.$$

Le potentiel logarithmique de la couche correspondant à la densité $\varphi(\theta')$ sera donc représenté à l'intérieur de la circonférence par le développement en série

$$(22) \qquad \int_0^{2\pi} \left[\log \frac{1}{R} + \frac{\rho}{R}\cos(\theta - \theta') + \cdots + \frac{1}{n}\frac{\rho^n}{R^n}\cos n(\theta - \theta') + \cdots\right]\varphi(\theta')\, d\theta',$$

et, si $\varphi(\theta)$ satisfait à l'équation fonctionnelle (21), il est clair que la fonction harmonique ainsi obtenue prend sur C la valeur

$$\frac{\varphi(\theta)}{\lambda R}.$$

Or on sait que la fonction harmonique prenant sur C ces valeurs est représentée à l'intérieur de C par le développement

$$\frac{a_0}{2} + (a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta)\frac{\rho}{R} + \cdots + (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)\frac{\rho^n}{R^n} + \cdots,$$

où les a et b sont les coefficients de Fourier relatifs à $\frac{\varphi(\theta)}{\lambda R}$, c'est-à-dire

$$a_n = \frac{1}{\lambda \pi R}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta') \cos n\theta'\, d\theta',$$

$$b_n = \frac{1}{\lambda \pi R}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta') \sin n\theta'\, d\theta',$$

et, par conséquent, le développement précédent peut s'écrire:

$$(23) \qquad \frac{1}{\lambda\pi R}\int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \cos(\theta - \theta')\frac{\rho}{R} + \cdots + \cos n(\theta - \theta')\frac{\rho^n}{R^n} + \cdots\right]\varphi(\theta')\, d\theta'.$$

Les développements (22) et (23) doivent être identiques. Il en résulte de suite que, si R est différent de *un,* les valeurs singulières de λ sont

$$\lambda = \frac{n}{\pi R} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

auxquelles il faut adjoindre

$$\lambda = \frac{1}{2\pi R} \log \frac{1}{R}.$$

A $\lambda = \frac{n}{\pi R}$ correspondent les *deux* solutions distinctes de (21)

$$\varphi(\theta) = \cos n\theta \quad \text{et} \quad \sin n\theta;$$

à $\lambda = \frac{1}{2\pi R} \log \frac{1}{R}$ correspond la solution $\varphi =$ constante.

Dans le cas de $R = 1$, la dernière solution disparait, $\lambda = 0$ donnant $\varphi(\theta) = 0$.

27. Si maintenant nous arrivons à l'équation intégrale de première espèce pour la circonférence

$$f(\theta) = R \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r} \cdot \rho(\theta') d\theta' \qquad (R \neq 1),$$

le théorème général nous donnera le résultat suivant, en se rappelant que la suite

$$1, \quad \cos\theta, \quad \sin\theta, \ \ldots, \ \cos n\theta, \quad \sin n\theta, \ \ldots$$

est *fermée.*

On pourra mettre la fonction harmonique prenant sur C les valeurs $f(\theta)$ sous la forme d'un potentiel logarithmique de simple couche avec densité sommable et de carré sommable, si la série

$$\sum n^2(a_n^2 + b_n^2) \tag{24}$$

est convergente, en désignant par a_n et b_n les coefficients de Fourier de $f(\theta)$.

Il est clair que cette condition peut n'être pas remplie. Prenons comme exemple

$$f(\theta) = \sum_1^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n^\alpha},$$

où

$$\tfrac{3}{2} > \alpha > 1.$$

La série (24) correspondante est divergente, et par suite il est impossible de mettre la fonction harmonique prenant les valeurs $f(\theta)$ sous la forme d'un potentiel de simple couche avec la densité remplissant les conditions indiquées.

28. Dans le cas de $R = 1$, nous sommes dans le cas particulier étudié à la fin du § 23. Le système des solutions singulières n'est pas alors fermé, et il peut arriver, la condition relative à la convergence étant remplie, que l'on ne puisse satisfaire au problème posé qu'à une constante près. Une constante (non nulle) ne peut en effet se mettre ici sous la forme d'un potentiel logarithmique.

Paris, juillet 1909.

ÉMILE PICARD.