

Die Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich.*)

Von

F. SEIDELMANN in Erlangen.

Die folgenden Bemerkungen bilden insofern eine Ergänzung der vorausgehenden Ausführungen von Frl. E. Noether, als in ihnen die *Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich wirklich aufgestellt wird*. Dabei zeigt sich, daß jede Gruppe realisierbar ist und daß durch die Parameterdarstellung mit rationalen, unabhängigen Parametern, deren Anzahl jedesmal mit der der Koeffizienten der gesuchten Gleichung übereinstimmt, auch stets die *Gesamtheit* der Gleichungen erreicht wird — bis auf eine anzugebende Ergänzung beim Körper der 3. Einheitswurzeln.**)

Der zur Aufstellung der Gleichungen eingeschlagene Weg ist bei der Durchführung der gestellten Aufgabe nicht der von Frl. E. Noether angegebene, sondern die Darstellung wird durch Berechnung der Koeffizienten als Funktionen der Parameter *direkt* in Angriff genommen und hinterher ergeben sich dann die Parameter als die rationalen Wurzelfunktionen der Minimalbasis. Jedesmal aber zeigt sich, daß

1. die aufgestellten Funktionen der Parameter und diese selbst auch wirklich *unabhängig* voneinander sind, wodurch die Erreichung aller möglichen Werte der Koeffizienten gewährleistet wird,
2. die Darstellung *rational* möglich ist und
3. auch wirklich die *Gesamtheit* der Gleichungen erreicht wird, indem die singulären Parameterwerte, für die die Darstellung versagen würde, stets Gruppenreduktion ergeben.

*) Auszug aus der gleichnamigen Dissertation des Verfassers. Erlangen 1916.

**) Wie mir nachträglich bekannt wird, hat Gösta Bucht („Über einige algebraische Körper achten Grades“, Arkiv for Matematik, Astronomi och Fysik, Uppsala, Bd. 6, Nr. 30) für die allgemeine, durch Tschirnhausen Transformation erreichbare Normalform $x^4 + ax^2 + b = 0$ die allgemeinen Wurzelformen aufgestellt. (Zusatz bei der Korrektur.)

Der zugrunde liegende *allgemeine Gedankengang* ist dabei folgender:

Man stellt eine Funktion $\varphi(x_0, x_1, x_2, x_3)$ der Wurzeln einer Gleichung 4. Grades $f(x) = 0$ her, die *formal* die Substitutionen einer vorgegebenen transitiven Untergruppe \mathfrak{G} der symmetrischen Gruppe 4. Grades, und nur diese, zuläßt. Durch Einsetzen der Cardanischen Formeln für die x_i geht φ in eine Funktion der Gleichungskoeffizienten über, deren Wert λ (inbezug auf den geg. Rationalitätsbereich) rationalisiert werden muß. Die *Galoissche Gruppe* von $f(x) = 0$ ist dann \mathfrak{G} oder eine ihrer Untergruppen.

Mit den durch die angegebene Rationalisierung gewonnenen Parametern und den dadurch ausgedrückten Wurzelformen von $f(x) = 0$ sind noch drei *gesonderte Betrachtungen* nötig, nämlich 1. eine Untersuchung auf die zu φ konjugierten Funktionen, 2. der Ausschluß der Untergruppen von \mathfrak{G} als Galoissche Gruppen von $f(x) = 0$ und 3. das Aufsuchen singulärer Werte der Parameter, für die die gefundene Darstellung versagen würde.

Die *Resultate* lassen sich folgendermaßen formulieren:

I. Die zyklischen Gleichungen 3. Grades.

Die Gleichung:

$$f(x) = x^3 - 3(p^2 + 3q^2) \cdot x + 2p(p^2 + 3q^2) = 0$$

stellt sämtliche zyklische Gleichungen 3. Grades dar, wobei p und q alle die Werte des Bereiches durchlaufen, für die $f(x)$ nicht reduzibel wird; die Diskriminante ist quadratisch.*)

II. Die Gleichungen 4. Grades mit der Vierergruppe V .

Die Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 2x^2(e + f + efg^2) - 8efgx + [(e - f - efg^2)^2 - 4eg^2f^2] = 0$$

mit der Wurzelform:

$$\begin{aligned} x_0 &= \sqrt{e} + \sqrt{f} + g\sqrt{ef}, & x_2 &= -\sqrt{e} + \sqrt{f} - g\sqrt{ef}, \\ x_1 &= \sqrt{e} - \sqrt{f} - g\sqrt{ef}, & x_3 &= -\sqrt{e} - \sqrt{f} + g\sqrt{ef}^{**}), \end{aligned}$$

enthält für rationale Parameter e, f, g alle biquadratischen Gleichungen

*) Bei Zugrundelegung des mit der 3. Einheitswurzel erweiterten Bereiches bilden die *reinen* Gleichungen $x^3 + r = 0$ eine notwendige Ergänzung hierzu.

**) Umgekehrt werden: $e = \frac{1}{16}(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)^2$; $f = \frac{1}{16}(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)^2$;

$h = 4 \frac{(x_0 - x_1 - x_2 + x_3)}{(x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3)}$ die Funktionen der Minimalbasis; entsprechend in den übrigen Fällen.

mit der Vierergruppe V ; dabei durchlaufen e, f, g alle Werte des Rationalitätsbereiches bis auf die für $e, f, e \cdot f$ quadratischen Werte; die Diskriminante ist quadratisch.

III. Die Gleichungen 4. Grades mit einer Gruppe 8. Ordnung.

Die Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 2(e^2 f + g)x^2 - 4efx + [(e^2 f - g)^2 - f] = 0$$

mit der Wurzelform:

$$x_0 = e\sqrt{f} + \sqrt{g + \sqrt{f}}, \quad x_2 = -e\sqrt{f} + \sqrt{g - \sqrt{f}},$$

$$x_1 = e\sqrt{f} - \sqrt{g + \sqrt{f}}, \quad x_3 = -e\sqrt{f} - \sqrt{g - \sqrt{f}},$$

stellt die Gesamtheit der biquadratischen Gleichungen mit der Gruppe 8er Ordnung P dar, wobei die Parameter e, f, g alle Werte des Rationalitätsbereiches durchlaufen, bis auf die quadratischen von $f, g^2 - f, \frac{g^2}{f} - 1$.

Zusatz. Die Gruppe der reinen Gleichung $x^4 - f = 0$ ist die Gruppe P , solange f und $-f$ kein rationales Quadrat ist, und der Rationalitätsbereich nicht $\sqrt{-1}$ enthält.

IV. Gleichungen mit einer zyklischen Gruppe 4. Grades.

Die Gleichung:

$$f(x) = x^4 - 2(1 + e^2)(f^2 + g)x^2 - 4fg(1 + e^2)x + (1 + e^2) \cdot [(1 + e^2)(f^2 - g)^2 - g^2] = 0;$$

mit der Wurzelform:

$$x_0 = f\sqrt{1 + e^2} + \sqrt{g[1 + e^2 + \sqrt{1 + e^2}]},$$

$$x_1 = f\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{g[1 + e^2 + \sqrt{1 + e^2}]},$$

$$x_2 = -f\sqrt{1 + e^2} + \sqrt{g[1 + e^2 - \sqrt{1 + e^2}]},$$

$$x_3 = -f\sqrt{1 + e^2} - \sqrt{g[1 + e^2 - \sqrt{1 + e^2}]}$$

enthält sämtliche zyklische Gleichungen 4. Grades mit der Gruppe Z wobei die Parameter e, f, g sämtliche Werte des Bereiches durchlaufen außer 0; e darf ferner (bei rationalem x and y) keinen Wert $\frac{x^2 - y^2}{2xy}$ annehmen.

V. Gleichungen 4. Grades mit der alternierenden Gruppe.

Die Gleichung:

$$f(x) = x^4[e^3 - (f^2 + 3g^2)(3e + 2f)] - 6x^2e - 8x \\ - 3 \cdot \frac{e^2 - 4f^2 - 12g^2}{e^3 - (f^2 + 3g^2)(3e + 2f)} = 0$$

enthält für rationale Parameter e, f, g die Gesamtheit der alternierenden Gleichungen 4. Grades; die Parameter durchlaufen dabei sämtliche Werte des Bereiches bis auf diejenigen, für die die kubische Resolvente rationale Wurzeln erhält; ihre Diskriminante ist quadratisch.*)

Gleichzeitig mit diesen Resultaten ergeben sich dann noch *notwendige und hinreichende Bedingungen* dafür, wie aus den Wurzeln der kubischen Resolvente einer irreduziblen Gleichung 4. Grades ihre Gruppe zu bestimmen ist.

Erlangen 1916.

*) Bei Zugrundelegung des mit der 3. Einheitswurzel erweiterten Bereiches ergibt sich noch eine Ergänzungsgleichung hierzu.