Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik.

(Vorträge, gehalten im mathematischen Kolloquium Zürich.)

Von

Hermann Weyl in Zürich.

Die Antinomien der Mengenlehre werden gewöhnlich als Grenzstreitigkeiten betrachtet, die nur die entlegensten Provinzen des mathematischen Reichs angehen und in keiner Weise die innere Solidität und Sicherheit des Reiches selber, seiner eigentlichen Kerngebiete gefährden können. Die Erklärungen, welche von berufener Seite über diese Ruhestörungen abgegeben wurden (in der Absicht, sie zu dementieren oder zu schlichten), tragen aber fast alle nicht den Charakter einer aus völlig durchleuchteter Evidenz geborenen, klar auf sich selbst ruhenden Überzeugung, sondern gehören zu jener Art von halb bis dreiviertel ehrlichen Selbsttäuschungsversuchen, denen man im politischen und philosophischen Denken so oft begegnet. In der Tat: jede ernste und ehrliche Besinnung muß zu der Einsicht führen, daß jene Unzuträglichkeiten in den Grenzbezirken der Mathematik als Symptome gewertet werden müssen; in ihnen kommt an den Tag, was der äußerlich glänzende und reibungslose Betrieb im Zentrum verbirgt: die innere Haltlosigkeit der Grundlagen, auf denen der Aufbau des Reiches ruht. Ich kenne nur zwei Versuche, das Übel an der Wurzel zu packen. Der eine rührt von Brouwer her; schon seit 1907 liegen gewisse richtunggebende Ideen der von ihm angestrebten Reform der Mengenlehre und Analysis vor; doch hat er erst in den letzten Jahren seine Ansätze zu einer konsequenten Lehre ausgebildet[1]). Unabhängig davon

---

[1]) Siehe namentlich die Dissertation „Over de grondslagen der wiskunde", Amsterdam 1907, den Aufsatz in der Tijdschrift voor wijsbegeerte, **II** (1908), S. 152–158, den im Bull. Amer. Math. Society, **20** (Nov. 1913), S. 81–96, veröffentlichten Vortrag „Intuitionism and Formalism", die Abhandlungen „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten", Verh. d. K. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam 1918, 1919, und den Artikel „Intuitionistische Mengenlehre", Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1919, S. 203–208.

habe ich 1918 in einer Schrift „das Kontinuum“ lang gehegte Gedanken zu einer neuen Grundlegung der Analysis ausgestaltet[2]). Die vorliegenden Schwierigkeiten lassen sich am besten am Begriff der reellen Zahl und des Kontinuums klarmachen; ich will deshalb auch hier wieder davon ausgehen und zunächst kurz über das Wesentliche meines Versuchs, hernach in freier Weise über die Brouwerschen Ansätze berichten.

I. *Die atomistische Auffassung des Kontinuums.*

1. Der Circulus vitiosus.

Wir gehen mit Dedekind aus von dem System der rationalen Zahlen und wollen die einzelne reelle Zahl α charakterisieren durch die Menge derjenigen rationalen, welche kleiner sind als α. Wir erklären die reelle Zahl geradezu als eine Menge rationaler Zahlen, welche die „Abschnitts-Eigenschaft“ besitzt, mit jeder rationalen Zahl x auch alle rationalen Zahlen $< x$ als Elemente zu enthalten. Diese Mengen sind *unendliche* Mengen, und eine unendliche Menge kann niemals anders gegeben werden als dadurch, daß eine *Eigenschaft* hingestellt wird, welche für die Elemente der Menge charakteristisch ist. Eigenschaften rationaler Zahlen aber konstruiert man auf rein logischem Wege, indem man ausgeht von den ursprünglichen Eigenschaften und Relationen, welche dem Operieren mit rationalen Zahlen zugrunde liegen. Als solche kann man betrachten:

die Eigenschaft: x ist positiv;
die Relation $x + y = z$;
die Relation $x \cdot y = z$.

Geht man von den rationalen auf die natürlichen Zahlen zurück, so ist die einzige Grundrelation, mit Hilfe deren alle übrigen rein logisch zu definieren sind, diejenige, in der das eigentliche Wesen der natürlichen Zahlen liegt; sie besteht zwischen zwei natürlichen Zahlen n, n' dann und nur dann, wenn n' die auf n nächstfolgende Zahl ist. Ähnlich geht die Geometrie des Euklid aus von drei Grundkategorien von Gegenständen: Punkt, Gerade und Ebene, und einigen wenigen, der Anschauung zu entnehmenden „ursprünglichen“ Relationen zwischen ihnen („Punkt liegt auf Gerade“ usw.), von denen in den Axiomen die Rede ist. Alle übrigen Begriffe, insbesondere alle Eigenschaften von Punkten, Geraden und Ebenen und alle Relationen zwischen ihnen sind mit Hilfe jener ursprünglichen Relationen logisch zu erklären.

Den Eigenschaften rationaler Zahlen entsprechen die *Mengen* in solcher Weise, daß zwei Eigenschaften $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ unter Umständen auch dann, wenn

[2]) Vgl. auch meinen Aufsatz „Der Circulus vitiosus in der heutigen Begründung der Analysis“, Jahresber. d. Deutsch. Math.-Vereinig. 1919, S. 85–92.

sie selber durch verschiedene Konstruktionen aus den ursprünglichen Eigenschaften und Relationen gewonnen sind, die gleiche Menge bestimmen; nämlich dann, wenn die beiden Eigenschaften umfangsgleich sind, d. h. wenn jede rationale Zahl, welche die eine Eigenschaft besitzt, auch der andern teilhaftig ist, und umgekehrt. Für die Identität zweier durch je eine Eigenschaft bestimmten Mengen ist also nicht der *Sinn* der Eigenschaften maßgebend, sondern ihre sachliche Übereinstimmung (im „*Umfang*"), die rein logisch aus der Definition nicht abgelesen, sondern nur auf Grund von Sachkenntnissen festgestellt werden kann. — Es ist natürlich an sich gleichgültig, ob man sich des Wortes „Menge" oder „Eigenschaft" bedient. Nur muß man sich durchaus vor der Vorstellung hüten, daß, wenn eine unendliche Menge definiert ist, man nicht bloß die für ihre Elemente charakteristische Eigenschaft kenne, sondern diese Elemente selber sozusagen ausgebreitet vor sich liegen habe und man sie nur der Reihe nach durchzugehen brauche, wie ein Beamter auf dem Polizeibureau seine Register, um ausfindig zu machen, ob in der Menge ein Element von dieser oder jener Art existiert. Das ist gegenüber einer unendlichen Menge sinnlos.

Wir betrachten in der Analysis nicht bloß einzelne reelle Zahlen, sondern auch Mengen reeller Zahlen und Zuordnungen zwischen ihnen. Eine reelle Zahl ist nach unserer Erklärung gegeben durch eine Eigenschaft rationaler, eine Menge reeller Zahlen demnach durch eine Eigenschaft A von Eigenschaften rationaler Zahlen. Es ist leicht, derartige „Eigenschaften von Eigenschaften" zu bilden; ein Beispiel ist folgende Definition: Eine Eigenschaft rationaler Zahlen heiße von der Art A, wenn sie der Zahl 1 zukommt (A korrespondiert der „Menge aller reellen Zahlen > 1"). Betrachten wir jetzt die Konstruktion der oberen Grenze einer beliebigen solchen Menge A von reellen Zahlen! Die Grenze, eine reelle Zahl, wird gegeben durch eine Eigenschaft $\mathfrak{E}_A$ rationaler Zahlen; und zwar wird $\mathfrak{E}_A$ folgendermaßen erklärt: sie kommt einer rationalen Zahl x dann und nur dann zu, *wenn es eine Eigenschaft* $\mathfrak{E}$ *von der Art* A *gibt*, welche der Zahl x zukommt (wenn es eine reelle Zahl $\mathfrak{E}$ in der Menge A gibt, unterhalb deren x liegt). Diese Erklärung rechnet aber, wenn sie einen Sinn besitzen soll, nicht nur darauf, daß der Begriff der Eigenschaft rationaler Zahlen ein in sich klarer und eindeutiger ist, sondern daß auch der Inbegriff „*aller möglichen*" *Eigenschaften* ein in sich bestimmter und begrenzter, prinzipiell überblickbarer ist; denn sie rechnet darauf, daß die Frage: „*Gibt es* eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von gewisser Beschaffenheit?" (nämlich eine solche, welche zugleich von der Art A ist und der Zahl x zukommt) einen Sinn besitzt, sich an einen an sich bestehenden Sachverhalt wendet, der die Frage mit Ja oder Nein beantwortet. *Dies ist jedoch evidentermaßen nicht der Fall.* Denn es sei gelungen, auf irgendeine Weise einen derartigen in sich bestimmten und begrenzten Kreis von Eigenschaften rationaler Zahlen abzustecken (ich will sie $\varkappa$-Eigenschaften nennen), und es sei A wie oben irgendeine Eigenschaft von Eigenschaften; dann hat es einen klaren Sinn, mit Bezug auf irgendeine rationale Zahl x zu fragen, ob es eine $\varkappa$-Eigenschaft von der Art A gibt, welche der Zahl x zukommt. Ist dies der Fall, so wollen wir ihr die Eigenschaft $\mathfrak{E}_{\mathsf{A}}$ zuschreiben, sonst absprechen. Nun ist aber ganz deutlich, daß diese Eigenschaft $\mathfrak{E}_{\mathsf{A}}$ (die ja auf Grund der *Gesamtheit* aller $\varkappa$-Eigenschaften definiert ist) ihrem Sinne nach *außerhalb* des $\varkappa$-Kreises steht. Hierin gibt sich kund, daß der Begriff „Eigenschaft rationaler Zahlen", wie ich mich ausdrücken will, nicht umfangs-definit ist, und unsere Erklärung der oberen Grenze einen Circulus vitiosus enthält. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß die Eigenschaft $\mathfrak{E}_{\mathsf{A}}$ mit einer $\varkappa$-Eigenschaft umfangsgleich ist. Um dem Satz von der Existenz der oberen Grenze einer jeden Menge reeller Zahlen einen klaren Sinn zu erteilen und seine Wahrheit sicherzustellen, wäre also dies erforderlich: es müßte ein in sich bestimmter und begrenzter Inbegriff von Eigenschaften, „$\varkappa$-Eigenschaften", konstruiert werden, für welchen nachweislich der Satz gilt, daß eine Eigenschaft $\mathfrak{E}_{\mathsf{A}}$, welche nach dem obigen Schema aus der Gesamtheit der $\varkappa$-Eigenschaften konstruiert ist, stets mit einer bestimmten $\varkappa$-Eigenschaft umfangsgleich ist. Dies ist niemals versucht worden; es liegt nicht das leiseste Anzeichen dafür vor, daß eine solche Konstruktion möglich ist; sie ist von vornherein so ungeheuer unwahrscheinlich, daß man niemandem vernünftigerweise zumuten kann, danach zu suchen.

Wir fixieren die gewonnene Einsicht, ohne uns auf eine tiefere erkenntnistheoretische Analyse einzulassen, mit den folgenden Worten. Durch den Sinn eines klar und eindeutig festgelegten Gegenstandsbegriffs mag wohl stets den Gegenständen, welche des im Begriffe ausgesprochenen Wesens sind, ihre Existenzsphäre angewiesen sein; aber es ist darum keineswegs ausgemacht, daß der Begriff ein *umfangs-definiter* ist, daß es einen Sinn hat, von den unter ihn fallenden *existierenden* Gegenständen als einem an sich bestimmten und begrenzten, ideal geschlossenen Inbegriff zu sprechen. Dies schon darum nicht, weil hier die ganz neue Idee des Existierens, des Daseins, hinzutritt, während der Begriff nur von einem Wesen, einem So-sein handelt. Zu dieser Voraussetzung scheint allein das Beispiel des wirklichen Dinges im Sinne der realen Außenwelt, welche als eine an sich seiende und an sich ihrer Beschaffenheit nach bestimmte geglaubt wird, verführt zu haben. Ist $\mathfrak{E}$ eine ihrem Sinne nach klar und eindeutig gegebene Eigenschaft der unter einen Begriff B fallenden Gegenstände, so behauptet für einen beliebigen derartigen Gegenstand x der Satz: x hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}$, einen bestimmten Sachverhalt, der besteht oder nicht besteht; das Urteil ist an sich wahr oder nicht wahr — ohne Wandel und Wank und ohne Möglichkeit irgendeines zwischen diesen beiden entgegengesetzten vermittelnden Standpunktes. Ist der Begriff B insbesondere umfangs-definit, so hat aber nicht nur die Frage „hat x die Eigenschaft $\mathfrak{E}$?" für einen beliebigen unter B fallenden Gegenstand x einen in sich klaren und eindeutigen Sinn, sondern auch die Existenzfrage „gibt es einen unter B fallenden Gegenstand, welcher die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt?" Gestützt auf den uns in der Anschauung gegebenen Erzeugungsprozeß der natürlichen Zahlen, halten wir daran fest, daß der Begriff der natürlichen Zahl umfangs-definit ist; ebenso ist es dann mit den rationalen Zahlen bestellt. Nicht umfangs-definit sind aber gewiß die Begriffe „Gegenstand", „Eigenschaft natürlicher Zahlen" und ähnliche. Es ist wertvoll, sich nicht bloß durch die oben angestellten Überlegungen dessen überführen zu lassen, sondern diese Tatsache in unmittelbarer Einsicht zu ergreifen.

2. Die Konstruktion.

Die auf reelle Zahlen bezüglichen Existential-Aussagen und, wie wir hinzufügen können, die auf sie bezüglichen allgemeinen Aussagen (sie können als negative Existentialurteile ausgelegt werden) bekommen, wie wir sahen, nur dann einen Sinn, wenn wir den schrankenlosen und umfangsvagen Begriff „Eigenschaft rationaler Zahlen" zu einem umfangs-definiten „$\varkappa$-Eigenschaft" einschränken. Wie soll das geschehen? Ein Blick auf das *konstruktive Verfahren* der Mathematik gibt darauf die Antwort. Ich sagte schon oben, daß alle Eigenschaften und Relationen (die Eigenschaften können wir immer mit als Relationen rechnen, es sind Relationen mit nur *einer* Unbestimmten) aus wenigen ursprünglichen Relationen auf rein logischem Wege aufgebaut werden. Der Aufbau geschieht mit Hilfe weniger *logischer Konstruktionsprinzipien,* welche in den Worten „nicht", „und", „oder", „es gibt" enthalten sind und welche lehren, wie aus einer oder zwei schon konstruierten Relationen eine neue hergeleitet wird. Sie spielen im Gebiete der Relationen die gleiche Rolle wie die vier Spezies im Gebiete der rationalen Zahlen, die ja auch durch ihre Wiederholung in beliebiger Anzahl und Kombination gestatten, von der Zahl 1 aus alle rationalen Zahlen zu erzeugen. Die Konstruktionsprinzipien regeln die Genesis der Eigenschaften und Relationen, sie definieren auf genetische Weise den umfangs-definiten Begriff der $\varkappa$-Eigenschaft und $\varkappa$-Relation. Es ist aber das Verhängnis bisheriger Analysis, daß sie unter ihren Konstruktionsprinzipien auf Schritt und Tritt auch das folgende benutzt: Ist A eine Eigenschaft von Eigenschaften, so erzeuge man daraus die Eigenschaft $\mathfrak{E}_{\mathsf{A}}$, welche einer rationalen Zahl x dann und nur dann zukommt, wenn sich mit Hilfe der Konstruktionsprinzipien (insbesondere auch dieses Prinzips selbst!) eine Eigenschaft von der Art A bilden läßt, welche der Zahl x zukommt. Solche Regel ist aber als Konstruktionsprinzip natürlich sinnlos; die Fehlerhaftigkeit des Zirkels ist ja hier mit Händen zu greifen.

Daß das Bild nicht gar zu unbestimmt bleibe, will ich die übrigbleibenden zirkelfreien Definitionsprinzipien hier kurz kennzeichnen.

1. *Identifizierung* mehrerer Unbestimmten; so entsteht aus $N(xy)$ „x ist Neffe von y“: $N(xx)$ „x ist Neffe von sich selber“.

2. *Negation*; aus $N(xy)$ entsteht $\bar{N}(xy)$ „x ist nicht Neffe von y“.

3. Verknüpfung zweier Relationen durch *und*; dabei muß angegeben werden, wie die Unbestimmten beider Relationen miteinander zu identifizieren sind; z. B. aus $N(xy)$ und $V(xy)$ „x ist Vater von y“ die ternäre Relation $N(xy) \cdot V(yz)$ „x ist Neffe von y und y Vater von z“.

4. Verknüpfung zweier Relationen durch *oder*.

5. *Ausfüllung* einer Unbestimmten durch einen gegebenen Gegenstand; aus $\mathcal{F}(nn')$ „die natürliche Zahl n' folgt auf n“ entsteht so z. B. die Eigenschaft $\mathcal{F}(5n')$ mit der Unbestimmten n': „n' folgt auf 5“.

6. Ausfüllung einer Unbestimmten durch „*es gibt*“; aus der Relation $\mathcal{F}(nn')$ geht so die Eigenschaft $\mathcal{F}(*n')$ hervor mit der Unbestimmten n': „es gibt eine Zahl, auf welche n' folgt“ (sie kommt allen Zahlen außer 1 zu).

In allen Teilen der Mathematik findet man, daß sich die Neubildung von Eigenschaften und Relationen durch kombinierte Anwendung dieser Prinzipien vollzieht. Sobald aber die *Mengenlehre* eine Rolle zu spielen beginnt, reichen sie nicht mehr aus; diese nämlich beruht darauf, daß sie auch die Eigenschaften und Relationen als Gegenstände betrachtet, zwischen denen neue Relationen bestehen können; sie bildet Mengen, Mengen von Mengen usf. Relationen können dann ebensogut wie die ursprünglichen Gegenstände als „Argumente“ in andern Relationen auftreten. Die Möglichkeit dazu liefert folgender Kunstgriff. Eine Aussage wie etwa „die Rose ist rot“ wird nicht mehr dem Schema „x ist rot“ untergeordnet, sondern dem allgemeineren „x hat die Eigenschaft E“, aus welchem sie durch die Ausfüllung $x =$ Rose, $E =$ rot hervorgeht. Die Worte „hat die Eigenschaft“ bezeichnen eine gewisse Relation ε, welche zwischen einem willkürlichen Gegenstand x und einer willkürlichen Eigenschaft E bestehen kann. Z. B., als wir oben erklärten: eine Eigenschaft E rationaler Zahlen ist von der Art A, wenn sie der Zahl 1 zukommt, bildeten wir die Relation $\varepsilon(xE)$ zwischen einer unbestimmten Zahl x und einer unbestimmten Eigenschaft E und füllten dann x nach dem Prinzip 5. durch die bestimmte Zahl 1 aus. Nehmen wir beim Aufbau der Analysis unsern Ausgang von der ersten Grundlage, den natürlichen Zahlen, so ist dies also das einzuschlagende Verfahren: Wir haben eine einzige Grundkategorie von Gegenständen, die natürlichen Zahlen; ferner unäre, binäre, ternäre, ... Relationen zwischen solchen. Diese alle nennen wir Relationen 1. Stufe; die Kategorie, der eine solche Relation angehört, ist vollständig gekennzeichnet durch die Anzahl der Unbestimmten, welche in sie eingehen. Die Relationen 2. Stufe sind Relationen, deren Unbestimmte teils willkürliche natürliche Zahlen, teils willkürliche Relationen 1. Stufe sind. Die Kategorie, der eine solche Relation 2. Stufe zugehört, ist festgelegt durch die Zahl ihrer Unbestimmten und durch die Gegenstandskategorien, auf welche jede ihrer Unbestimmten bezogen ist. Relationen 3. Stufe sind solche, in denen unbestimmte Relationen 2. Stufe auftreten usf. Jeder Kategorie $\mathfrak{K}$ von Relationen entspricht eine Relation $\varepsilon(xx' \ldots ; X)$, welche bedeutet: $xx' \ldots$ stehen in der Relation X zueinander. X ist darin eine unbestimmte Relation der Kategorie $\mathfrak{K}$, die Unbestimmten $xx' \ldots$ beziehen sich auf die gleichen Gegenstandskategorien wie die Unbestimmten der Relationen X von der Kategorie $\mathfrak{K}$. Diese Relationen ε benutzen wir neben der Relation 1. Stufe F als Ausgangsmaterial. Die Konstruktion vollzieht sich mit Hilfe der oben angegebenen Prinzipien. Von ihnen sind die Prinzipien 1. bis 4. ohne weiteres schrankenlos anwendbar. 5. ist, wenn mit seiner Hilfe eine unbestimmte Relation in einer Relation höherer Stufe ausgefüllt wird, so zu interpretieren, daß die zur Ausfüllung benutzte Relation ihrerseits auch mit Hilfe der Konstruktionsprinzipien aufgebaut sein muß. Dieses Prinzip kann noch in einem erweiterten Umfang angewendet werden, welcher wichtig ist. Wir können nämlich z. B. eine quinäre Relation $R(uv \mid xyz)$ auffassen als eine von den Unbestimmten xyz abhängige binäre Relation zwischen uv, nachdem wir aus den Unbestimmten die Gruppe der „unabhängigen" xyz abgesondert haben. (Hier liegt in meiner Theorie die Wurzel des *Funktionsbegriffs.*) Diese von xyz abhängige binäre Relation kann also zur Ausfüllung einer unbestimmten binären Relation benutzt werden. Das Prinzip 6. endlich, die Ausfüllung durch „es gibt" darf nur auf Zahlargumente, niemals aber auf Argumente, die selbst Relationen irgendeiner Stufe sind, angewendet werden; es führte uns sonst zu Sinnlosigkeiten. Die Einführung von ε bliebe aber ohne jeden Wert, wenn man nicht dem für Relationen in Argumentstellung wirksam werdenden erweiterten Substitutionsprinzip 5. ein solches der *Iteration* hinzufügte. Ich formuliere einen einfachen Fall davon. Es sei $R(mn \mid X)$ eine Relation zwischen zwei willkürlichen Zahlen mn und einer willkürlichen binären Zahlrelation X. Aus $R = R_1$ erhalte ich eine Relation R_2 der gleichen Kategorie, wenn ich in $R(mn \mid X)$ die Unbestimmte X durch R selber ausfülle, das hier (gemäß der Einteilung der Unbestimmten durch den Vertikalstrich) als eine von X abhängige binäre Relation zwischen den willkürlichen Zahlen m und n aufzufassen ist. In $R_2(mn \mid X)$ kann ich abermals für die Unbestimmte X das so aufgefaßte R substituieren und erhalte dadurch eine Relation R_3, usf. Und nun bilde ich diejenige

Relation $R(k; mn \mid X)$, aus welcher R_1, R_2, R_3, ... dadurch hervorgehen, daß ich die unbestimmte Zahl k der Reihe nach durch 1, 2, 3, ... ausfülle. — Begriffsbildungen und Beweisführungen nach Art der Dedekindschen Kettentheorie haben an dem hier aufgewiesenen Zirkel teil; wir sind darum außerstande, die Definition durch *vollständige Induktion* auf etwas Ursprünglicheres zurückzuführen. Die Reihe der natürlichen Zahlen und die in ihr liegende Anschauung der Iteration ist ein letztes Fundament des mathematischen Denkens. In unserm Iterationsprinzip kommt diese ihre grundsätzliche Bedeutung für den Aufbau aller Mathematik zum Ausdruck.

Die Relationen, welche durch beliebige Wiederholung und Kombination der angegebenen Konstruktionsprinzipien gewonnen werden können, insbesondere die Relationen 1. Stufe zwischen natürlichen Zahlen dieser Art, bezeichne ich als definite oder $\varkappa$-Relationen. Das ist die umfangsdefinite Einschränkung des Relationsbegriffs, auf welche wir ausgingen. Im Hinblick auf diesen genetisch begrenzten Kreis hat es nun einen klaren Sinn, zu fragen: Gibt es eine $\varkappa$-Relation von der und der Art? Definiten Eigenschaften rationaler Zahlen entsprechen (sofern sie selber der Abschnittseigenschaft teilhaftig sind) die reellen Zahlen. Nur wenn wir den Begriff in dieser Weise fassen, die seinen Umfang bestimmt und begrenzt, bekommen Existenzfragen über reelle Zahlen einen Sinn. Durch diese Begriffseinschränkung wird aus dem fließenden Brei des Kontinuums sozusagen ein Haufen einzelner Punkte herausgepickt. Das Kontinuum wird in isolierte Elemente zerschlagen und das Ineinanderverflossensein aller seiner Teile ersetzt durch gewisse, auf dem „größer-kleiner" beruhende begriffliche Relationen zwischen diesen isolierten Elementen. Ich spreche daher von einer *atomistischen Auffassung des Kontinuums*. So verfuhr auch schon die heute anerkannte Analysis. Aber sie entlehnte der Anschauung des Kontinuums die Überzeugung von der „Existenz an sich" aller reellen Zahlen und wurde so nicht gewahr, daß die Möglichkeiten, aus dem Kontinuum einzelne reelle Zahlen herauszulesen, keinen umfangs-definiten Inbegriff bilden. Sie war also eine „Schaukeltheorie", welche hin und herschwankte zwischen (falsch interpretierter) Anschauung und logisch-arithmetischer Konstruktion. Die Theorie, welche hier geschildert wurde, entspringt daraus und nur daraus, daß man sich entschlossen und ohne Kompromiß auf den letzten Standpunkt stellt, die atomistische Auffassung streng konsequent durchführt. — Verstehe ich unter einer „Euklidischen Zahl" eine solche, welche von 1 aus gewonnen werden kann, indem man in beliebiger Kombination die vier Spezies und als fünfte Operation das Quadratwurzelziehen aus einer schon gewonnenen positiven Zahl anwendet, so genügt nach einer gelegentlichen Bemerkung von Dedekind dieses umfangsdefinite System der Euklidischen Zahlen, um innerhalb seiner alle Konstruktionen der Euklidischen Geometrie auszuführen. Treibt man Euklidische Geometrie, so kann man sich also auf das System der Punkte beschränken, deren Koordinaten Euklidische Zahlen sind; die kontinuierliche „Raumsauce", welche zwischen ihnen ergossen ist, tritt gar nicht in die Erscheinung; jenes System liefert uns ein in sich bestimmtes und begrenztes Konstruktionsfeld, über das keine Operation der Euklidischen Geometrie hinausführt. Uns ist es hier gelungen, indem wir statt der vier Spezies und der Quadratwurzeloperation gewisse andere, logische Konstruktionsprinzipien in geringer Zahl zugrunde legten, ein umfangs-definites Zahlensystem zu erzeugen, innerhalb dessen nicht bloß die Konstruktionen der Euklidischen Geometrie, sondern die viel allgemeineren Konstruktionen der Analysis (sofern sie den Charakter des Circulus vitiosus nicht an der Stirn tragen) unbeschränkt ausführbar sind. Insbesondere gilt innerhalb dieses „Weylschen Zahlsystems" das Cauchysche Konvergenzprinzip, und es gilt auch der Satz, daß eine stetige Funktion alle Zwischenwerte annimmt; — natürlich für solche Funktionen und Zahlfolgen, die selbst mit Hilfe unserer Konstruktionsprinzipien aufgebaut sind. Wenn ich hernach dazu gelangen werde, meine eigene Theorie preiszugeben, so ist es wohl erlaubt, dies ihr Verdienst hier mit Nachdruck hervorzuheben. Nie war es meine Meinung, daß das in der Anschauung gegebene Kontinuum ein Weylsches Zahlsystem ist; vielmehr, daß die Analysis lediglich eines solchen Systems zu ihren Konstruktionen bedarf und sich um das dazwischen ergossene „Kontinuum" nicht zu bekümmern braucht. Die logischen Konstruktionsprinzipien sind nicht künstlich erdacht; sie haben jedenfalls einen weit natürlicheren Charakter als die fünf Operationen, mit Hilfe deren man das System der Euklidischen Zahlen gewinnt. Sie dienen nicht nur dazu, die reellen Zahlen selbst, sondern auch Punktmengen und Funktionen reeller Variablen zu konstruieren. Hier sind gleichfalls die (niemals exakt formulierten und beständig im Fluß der Entwicklung begriffenen) algebraisch-analytischen Operationen, mit Hilfe deren die Analysis des 17. und 18. Jahrhunderts ihre Funktionen aufbaute, um der Allgemeinheit willen durch rein logische zu ersetzen. Dennoch bleibt man genötigt, sich auf einen Kreis von Funktionen und Mengen zu beschränken, welche mit Hilfe solcher Konstruktionsprinzipien gewonnen werden, darf dem Begriffe nicht jene umfangsvage Allgemeinheit lassen, die heute üblich ist, wenn generelle und Existentialurteile über Mengen und Funktionen einen Sinn behalten sollen.

Einige *Konsequenzen* dieser Lehre sind schon im vorangehenden gestreift worden. Wir erwähnten, daß das Cauchysche Konvergenzprinzip für Zahlfolgen zu Recht besteht, ebenso die Hauptsätze über stetige Funktionen. Der Satz hingegen, daß eine beschränkte Punktmenge stets eine präzise obere Grenze besitzt, muß aufgegeben werden, und es ist gar nicht daran zu denken, dieses „Dirichletsche Prinzip“ irgendwie zu retten. — Wie steht es mit der *Abzählbarkeit des Kontinuums*? Die Richardsche Antinomie bekommt hier im folgenden Sinne Recht: Man kann offenbar die Anwendung der logischen Konstruktionsprinzipien so regulieren, daß in einem geordneten Entstehungsprozeß die definiten Eigenschaften und Relationen in bestimmter Reihenfolge erscheinen, wobei man die Sicherheit hat, daß jede derartige Relation an einer gewissen Stelle des Prozesses erzeugt werden wird. Damit ist dann auch insbesondere das System der „reellen Zahlen“ (in unserm Sinne) in eine abgezählte Reihe geordnet. Aber in einem andern und offenbar in der Mathematik allein in Betracht kommenden Sinne bleibt die Gültigkeit von Cantors Behauptung, das Kontinuum sei nicht abzählbar, sowie der von ihm geführte Beweis durchaus zu Recht bestehen: Es gibt keine definite, mit Hilfe unserer Konstruktionsprinzipien aufzubauende Relation $R(x, n)$ zwischen einer willkürlichen rationalen Zahl x und einer willkürlichen natürlichen n, von der Art, daß zu jeder definiten Eigenschaft rationaler Zahlen $E(x)$, welche eine reelle Zahl bestimmt (die Abschnittseigenschaft besitzt), eine natürliche Zahl n gehört, für welche die Eigenschaft $R(\bullet, n)$ mit $E(\bullet)$ umfangsgleich ist. Und diese Aussage genügt auch vollständig, um daraus die von Cantor gezogenen, mathematisch belangreichen Folgerungen zu ziehen, z. B. die Existenz transzendenter Zahlen. Versteht man aber Abzählbarkeit in diesem Sinne, so liegt natürlich nicht der mindeste Grund vor, zu glauben, daß in jeder unendlichen Menge eine abzählbare Teilmenge enthalten sein müßte; die Lückenlosigkeit der $\aleph$'s ist schon bei dem Übergang von den endlichen Kardinalzahlen zu $\aleph_0$ in keiner Weise mehr gewährleistet. — Endlich sei noch eine Bemerkung über die Begründung der *Geometrie* hinzugefügt. Da die Punkte, sofern der Begriff der reellen Zahl in seiner umfangsvagen Allgemeinheit belassen wird, keinen in sich bestimmten und begrenzten Inbegriff bilden, ist es widersinnig, auf dieser Grundkategorie von Gegenständen in analoger Weise die Geometrie zu errichten, wie hier andeutungsweise der Aufbau der Analysis auf dem Fundament des Begriffs der natürlichen Zahl vollzogen wurde. Vielmehr sind wir, um ein umfangs-definites System von Punkten zu erhalten, angewiesen auf ihre logisch-arithmetische Konstruktion. Die „Stetigkeit“ in der Geometrie läßt sich also durch kein „Axiom des Dedekindschen Schnitts“ oder dergleichen fassen; Stetigkeitsgeometrie läßt sich gar nicht als eine selbständige axiomatische Wissenschaft betreiben, sondern man muß analytisch verfahren: Übertragung der fertig entwickelten Analysis in die Sprache der Geometrie mit Hilfe des Übertragungsprinzips, das im Koordinatenbegriff liegt.

II. Das Kontinuum als Medium freien Werdens.

1. Die Grundgedanken.

Wir heben von neuem an und gehen diesmal von einer etwas andern Auffassung der reellen Zahlen aus, welche ihr Wesen reiner zum Ausdruck bringt. Wenn eine reelle Zahl α bekannt ist bis zur h-ten Dezimale mit einem Fehler kleiner als ± 1 der h-ten Dezimale, so ist damit ein die Zahl α im Innern enthaltendes Intervall angewiesen, das von einer Zahl $\frac{m-1}{10^h}$ bis zur Zahl $\frac{m+1}{10^h}$ reicht; dabei ist m eine gewisse ganze Zahl. Ersetzen wir die Dezimalbrüche um der mathematischen Einfachheit willen durch Dualbrüche, so werden wir also der Definition der reellen Zahlen die „Dualintervalle" von der Form

$$\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right)$$

zugrunde legen, wo m und h beliebige ganze Zahlen sind. Das hingeschriebene ist insbesondere ein Intervall „von der h-ten Stufe". Die Dualintervalle h-ter Stufe greifen übereinander; wir müssen diese sich überdeckenden Intervalle benutzen und nicht etwa diejenigen, in welche die Zahlgerade durch die Punkte von der Form $\frac{m}{2^h}$ zerlegt wird, damit immer, wenn eine reelle Zahl mit einem gewissen (von h abhängigen) Grad der Genauigkeit gegeben ist, mit Bestimmtheit eines unter den Intervallen h-ter Stufe angegeben werden kann, in welches die Zahl notwendig hineinfällt. Der Begriff der reellen Zahl, als einer *zwar nur approximativ gegebenen Zahl, für welche sich aber der Grad der Annäherung über jede Grenze treiben läßt*, ist demnach einfach so zu formulieren: Eine reelle Zahl ist eine unendliche Folge von Dualintervallen $i, i', i'', \ldots$ von der Art, daß jedes Intervall dieser Reihe das nächstfolgende ganz in seinem Innern enthält. Da jedes der Dualintervalle durch zwei ganzzahlige Charaktere gekennzeichnet werden kann (m und h in der obigen Bezeichnung) und das Enthaltensein eines Intervalls in einem andern sich durch eine einfache Relation zwischen diesen ihren Charakteren ausdrückt, so bedeutet es nur eine unwesentliche Vereinfachung unserer Überlegungen, wenn wir zunächst statt der Folgen ineinander geschachtelter Dualintervalle keiner Einschränkung unterworfene *Folgen natürlicher Zahlen* betrachten.

Die Schwierigkeit liegt im Begriff der *Folge*. Wenn der heutigen Analysis überhaupt ein Standpunkt zugrunde liegt, von dem aus ihre Aussagen und Beweise verständlich sind, so ist es der: die Folge entsteht dadurch, daß die einzelnen Zahlen der Reihe nach willkürlich gewählt werden; das Resultat dieser unendlich vielen Wahlakte liegt fertig vor, und im Hinblick auf die fertige unendliche Folge kann ich z. B. fragen, ob unter ihren Zahlen die 1 vorkommt. Aber dieser Standpunkt ist sinnwidrig und unhaltbar; denn die Unerschöpflichkeit liegt im Wesen des Unendlichen. Eine einzelne *bestimmte* (und ins Unendliche hinaus bestimmte) Folge kann nur durch ein *Gesetz* definiert werden. Entsteht hingegen eine Folge Schritt für Schritt durch freie Wahlakte, so will sie als eine *werdende* betrachtet sein, und nur solche Eigenschaften können sinnvollerweise von einer werdenden Wahlfolge ausgesagt werden, für welche die Entscheidung „ja oder nein" (kommt die Eigenschaft der Folge zu oder nicht) schon fällt, wenn man in der Folge bis zu einer gewissen Stelle gekommen ist, ohne daß die Weiterentwicklung der Folge über diesen Punkt des Werdens hinaus, wie sie auch ausfallen möge, die Entscheidung wieder umstoßen kann. So können wir mit Bezug auf eine Wahlfolge wohl fragen, ob in ihr an vierter Stelle die Zahl 1 auftritt, aber nicht, ob in ihr die Zahl 1 überhaupt nicht auftritt. Es ist eine erste grundlegende Erkenntnis Brouwers, daß die durch freie Wahlakte werdende Zahlfolge mögliches Objekt mathematischer Begriffsbildung ist. Repräsentiert das *Gesetz* φ, welches eine Folge ins Unendliche hinaus bestimmt, die einzelne *reelle Zahl*, so die durch kein Gesetz in der Freiheit ihrer Entwicklung eingeschränkte Wahlfolge das *Kontinuum*. Daß es möglich ist, mit Wahlfolgen mathematisch zu operieren, ist gewiß schon hinreichend dadurch belegt, daß man Zuordnungen zwischen Wahlfolgen stiften kann. Z. B. enthält die Formel

$$n_h = m_1 + m_2 + \ldots + m_h$$

ein Gesetz, gemäß welchem eine durch freie Wahlakte werdende Folge $m_1, m_2, m_3, \ldots$ eine werdende Zahlfolge $n_1, n_2, n_3, \ldots$ erzeugt. Allgemeiner kann dazu jedes Gesetz dienen, zufolge dessen in einer werdenden Folge natürlicher Zahlen jede Wahl, die ihr ein weiteres Glied hinzufügt, eine bestimmte Zahl erzeugt. Die etwa beim h-ten Schritt erzeugte Zahl wird dabei im allgemeinen nicht bloß von der beim h-ten Schritt getroffenen Wahl abhängen, sondern von dem ganzen in diesem Augenblick fertigen Abschnitt der Wahlfolge vom 1. bis zum h-ten Gliede. (Dabei hält die Entwicklung der als Funktionswert auftretenden Folge gleichen Schritt mit der Entwicklung der Argumentfolge: rückt diese um eine Stelle vor, so auch jene. Es sind natürlich kompliziertere Verhältnisse denkbar, auf die wir hernach genau zurückkommen müssen.) Die Brouwersche Bemerkung ist einfach, aber tief: hier ersteht uns ein „Kontinuum", in welches wohl die einzelnen reellen Zahlen hineinfallen, das sich aber selbst keineswegs in eine Menge fertig seiender reeller Zahlen auflöst; vielmehr ein *Medium freien Werdens*.

Wir befinden uns im Bezirk eines uralten Problems des Denkens, des Problems der Kontinuität, der Veränderung und des Werdens. Von welch zentraler Bedeutung es für die denkende Bewältigung der Wirklichkeit gewesen ist, möge man etwa in K. Laßwitz' „Geschichte der Atomistik" nachlesen; seine Lösung ist geradezu der entscheidende Schritt, welcher die aristotelisch-scholastische, am Substanzbegriff orientierte Physik trennt von der modernen Galileischen. Von jeher stehen sich einander gegenüber eine atomistische Auffassung, die sich das Kontinuum aus einzelnen Punkten bestehend denkt, und eine andere, welche es für unmöglich hält, den stetigen Fluß auf diese Weise zu begreifen. Die erste hat ein begrifflich faßbares System seiender Elemente, aber sie vermag Bewegung und Wirkung nicht verständlich zu machen; alle Veränderung muß sie zu Schein herabsinken lassen. Der zweiten will es in der Antike und bis zu Galilei nicht gelingen, sich aus der Sphäre vager Anschauung in die abstrakter Begriffe zu erheben, welche zur vernunftmäßigen Analyse der Wirklichkeit geeignet wären. Die schließlich errungene Lösung ist diejenige, deren mathematisch-systematische Gestalt die Differential- und Integralrechnung ist. Die moderne Kritik der Analysis zerstört diese Lösung wieder von innen heraus, ohne daß freilich noch das Bewußtsein der alten philosophischen Probleme sonderlich lebendig geblieben ist, und mündet in Chaos und Leersinn. Die beiden hier geschilderten Rettungsversuche lassen in verschärfter und geklärter Form die alte Antithese wieder aufleben: die vorhin geschilderte Theorie ist (im klaren Bewußtsein davon, daß sie so das anschauliche Kontinuum nicht trifft, aber aus der Meinung heraus, daß die Begriffe nur ein starres Sein zu erfassen vermögen) radikal atomistisch; die Brouwersche macht sich anheischig, auf eine gültige und haltbare Weise dem Werden Gerechtigkeit widerfahren zu lassen.

Wir wollen jetzt die zweite durchzuführen suchen. Da sie zwischen dem Kontinuum und einer Menge diskreter Elemente eine absolute Kluft befestigt, die jeden Vergleich ausschließt, kann in ihr die Frage, ob das Kontinuum abzählbar ist, ernstlich überhaupt nicht auftauchen. Ein Gesetz, das aus einer werdenden Zahlfolge eine von dem Ausfall der Wahlen abhängige Zahl n erzeugt, ist notwendig solcher Art, daß die Zahl n festgelegt ist, sobald ein gewisser endlicher Abschnitt der Wahlfolge fertig vorliegt, und sie bleibt dieselbe, wie sich nun auch die Wahlfolge weiter entwickeln möge; so daß von eineindeutiger Beziehung nicht die Rede sein kann. — Es sei $\mathfrak{E}$ eine im Gebiet der Zahlfolgen sinnvolle Eigenschaft, $\bar{\mathfrak{E}}$ ihre Negation. Die Frage: Gibt es eine Zahlfolge von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ oder nicht? entbehrt des klaren Sinns, weil der Begriff des eine Folge ins Unendliche hinaus bestimmenden Gesetzes (in der Ausdrucksweise des I. Teils) nicht umfangs-definit ist. Damals halfen wir uns, indem wir den

Begriff des Gesetzes zu einem umfangs-definiten einschränkten, indem wir forderten, daß es mittels gewisser logischer Konstruktionsprinzipien zirkelfrei aufgebaut wird („$\varkappa$-Gesetz“). Die Antwort ja oder nein auf unsere Frage war dann an sich bestimmt, und beide Möglichkeiten bildeten eine vollständige Disjunktion. Jetzt aber wenden wir die Sache anders. Da freilich eine einzelne bestimmte Folge nur durch ein Gesetz φ definiert werden kann, so lautet die positive Frage auch jetzt: Gibt es ein *Gesetz* von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$. Aber wir spannen diesen Begriff des Gesetzes nicht mehr auf das Prokrustesbett der Konstruktionsprinzipien, sondern: ist in zirkelfreier Weise, wie auch immer, die Konstruktion eines Gesetzes der gewünschten Art gelungen, so sind wir berechtigt zu der Behauptung, daß es ein solches Gesetz *gibt*. Hier ist also von der *Möglichkeit* der Konstruktion gar nicht die Rede, sondern nur im Hinblick auf die *gelungene Konstruktion*, den *geführten Beweis* stellen wir eine derartige Existential-Behauptung auf. Die negative Aussage, daß es ein solches Gesetz nicht gibt, bleibt so natürlich jeden Sinnes bar. Wir können sie jedoch positiv wenden: jede Folge hat die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$, und nun gewinnt sie einen Inhalt, sofern wir hier unter Folge nicht das Gesetz verstehen, sondern im Sinne des Kontinuums, des Mediums aller reellen Zahlen, die durch freie Wahlakte werdende Folge. Es ist also vorauszusetzen, daß es eine Bedeutung habe, die Eigenschaften $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ von einer *werdenden Folge* auszusagen; dann kann es sich ereignen, daß es *im Wesen einer werdenden Folge* liegt, einer Folge, in welcher jeder einzelne Wahlschritt völlig frei ist, daß sie die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$ besitzt. Wie derartige Wesenseinsichten zu gewinnen sind, das auseinanderzusetzen ist hier nicht der Ort. Nur sie liefert uns einen Rechtsgrund dafür, daß wir, so uns jemand ein Gesetz φ vorlegt, ihm ohne Prüfung auf den Kopf zu sagen können: Die durch dieses Gesetz ins Unendliche hinaus bestimmte Folge hat nicht die Eigenschaft $\mathfrak{E}$. Das „es gibt“ verhaftet uns dem Sein und dem Gesetz, das „jeder“ stellt uns ins Werden und die Freiheit. Da der Umfang der Fälle, in denen die eine oder die andere Behauptung gilt (es gibt eine Folge von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, bzw. jede Folge hat die Eigenschaft $\overline{\mathfrak{E}}$), nicht in sich bestimmt ist, überhaupt im einen Fall der Begriff der Folge ganz anders interpretiert werden muß wie im andern, wäre es absurd, hier an eine vollständige Disjunktion zu denken. Man wird es so verstehen, daß Brouwer erklärt, es liege kein Grund vor, an den *logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten* zu glauben. Ich würde freilich lieber sagen, daß von den beiden in Rede stehenden Aussagen unmöglich noch die eine als die Negation der andern angesprochen werden kann. Das Verhältnis der im I. Teil vertretenen Auffassung I und der Brouwerschen II mag durch beistehende schematische Figur gekennzeichnet werden (der im Bilde enthaltene Vergleich hinkt allerdings ziemlich). Da das „Nein nach I" ins Gebiet des völlig legitimen „Ja nach II" weit hineinragt, erscheint das Nein der I. Auffassung im Lichte der II. als völlig wertlos. Einen Wert erhält es auch nur, sofern wir unter I überhaupt nicht das Brouwersche Kontinuum zum Gegenstand der Untersuchung machen, sondern das in sich bestimmte System der durch $\varkappa$-Gesetze definierten Folgen.

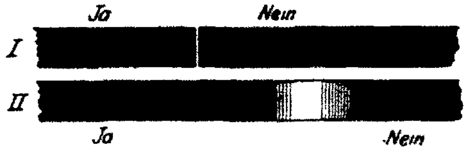

Fig. 1.

Brouwer geht in der Leugnung des logischen Axioms vom ausgeschlossenen Dritten noch wesentlich weiter, als wir bisher auseinandergesetzt haben. Nicht bloß für Existentialsätze über *Zahlfolgen*, sondern auch für Existentialsätze über natürliche *Zahlen* selbst bestreitet er seine Gültigkeit. Ist also $\mathfrak{E}$ eine im Gebiet der natürlichen Zahlen sinnvolle Eigenschaft, so daß es an sich feststeht, ob, wenn n irgendeine solche Zahl ist, $\mathfrak{E}$ der Zahl n zukommt oder nicht, so soll es nach Brouwer mit der Frage: Gibt es eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ oder nicht? ähnlich bestellt sein wie im Falle der Zahlfolgen; und das, obschon der Begriff der natürlichen Zahl ja im Gegensatz zu dem der Folge (wenn wir uns darin nicht täuschten) umfangs-definit ist und darum bei seiner Verwendung im Existentialurteil einerseits, dem generellen anderseits auch nicht eine derartige Spaltung erfährt wie der Begriff der Folge (Gesetz — freie Wahl). Brouwer begründet seine Ansicht damit, daß man keinen Grund hat zu dem Glauben, jede derartige Existentialfrage lasse sich *entscheiden*; der Beweis der Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten müßte nach ihm in der Angabe einer Methode bestehen, die nachweislich für beliebige Eigenschaften $\mathfrak{E}$ die Entscheidung der Existenzfrage im einen oder andern Sinne herbeiführt. Wie bekannt, ist dieser Standpunkt zuerst von Kronecker vertreten worden. In bewußtem Gegensatz dazu habe ich bei meinem Versuch der Grundlegung der Analysis die Meinung vertreten: es komme nicht darauf an, ob wir mit gewissen Hilfsmitteln, z. B. den Schlußweisen der formalen Logik, imstande sind, eine Frage zur Entscheidung zu bringen, sondern *wie sich die Sache an sich verhält*; es sei die natürliche Zahlenreihe und der auf sie bezügliche Existenzbegriff in *der* Weise Fundament der Mathematik, daß es für eine im Gebiet der Zahlen sinnvolle Eigenschaft $\mathfrak{E}$ immer an sich feststehe, ob Zahlen von der Art $\mathfrak{E}$ existieren oder nicht. Wir müssen jetzt dieser Kernfrage tiefer auf den Grund gehen.

Von jeder Zahl n lasse sich entscheiden, ob ihr die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ zukommt oder nicht. n besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{E}$, bedeute z. B., daß $2^{2^{n+4}}+1$

eine Primzahl ist, $\bar{\mathfrak{E}}$ das Gegenteil ($2^{2^{n+4}}+1$ ist eine zusammengesetzte Zahl). Nun bedenke man dies. Die Meinung, es stünde an sich fest, ob es eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ gibt oder nicht, stützt sich doch wohl allein auf folgende Vorstellung: Die Zahlen 1, 2, 3, ... mögen der Reihe nach auf die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hin geprüft werden; findet sich eine solche von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, so kann man abbrechen, die Antwort lautet *ja*; tritt dieses Abbrechen aber nicht ein, hat sich also *nach beendigter Durchlaufung* der unendlichen Zahlenreihe keine Zahl von der Art $\mathfrak{E}$ gefunden, so lautet die Antwort *nein*. Dieser Standpunkt der fertigen Durchlaufung einer unendlichen Reihe ist jedoch unsinnig. Nicht das Hinblicken auf die einzelnen Zahlen, sondern nur das Hinblicken auf das *Wesen Zahl* kann mir allgemeine Urteile über Zahlen liefern. Nur die *geschehene* Auffindung einer bestimmten Zahl mit der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ kann einen Rechtsgrund abgeben für die Antwort ja, und — da ich nicht alle Zahlen durchprüfen kann — nur die Einsicht, daß es im *Wesen* der Zahl liegt, die Eigenschaft $\bar{\mathfrak{E}}$ zu haben, einen Rechtsgrund für die Antwort nein; selbst Gott steht kein anderer Entscheidungsgrund offen. *Aber diese beiden Möglichkeiten stehen sich nicht mehr wie Behauptung und Negation gegenüber*; weder die Negation der einen noch der andern gibt einen in sich faßbaren Sinn. — Spricht dies für Brouwer, so wurde ich doch immer wieder auf meinen alten Standpunkt zurückgeworfen durch den Gedanken: Durchlaufe ich die Reihe der Zahlen und breche ab, falls ich eine Zahl von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ finde, so tritt dieser Abbruch entweder einmal ein oder nicht; *es ist so, oder es ist nicht so*, ohne Wandel und Wank und ohne eine dritte Möglichkeit. Man muß solche Dinge nicht von außen erwägen, sondern sich innerlich ganz zusammenraffen und ringen um das „Gesicht", die Evidenz. Endlich fand ich für mich das erlösende Wort. *Ein Existentialsatz* — etwa „es gibt eine gerade Zahl" — *ist überhaupt kein Urteil im eigentlichen Sinne, das einen Sachverhalt behauptet*; Existential-Sachverhalte sind eine leere Erfindung der Logiker. „2 ist eine gerade Zahl": das ist ein wirkliches, einem Sachverhalt Ausdruck gebendes Urteil; „es gibt eine gerade Zahl" ist nur ein aus diesem Urteil gewonnenes *Urteilsabstrakt*. Bezeichne ich Erkenntnis als einen wertvollen Schatz, so ist das Urteilsabstrakt ein Papier, welches das Vorhandensein eines Schatzes anzeigt, ohne jedoch zu verraten, an welchem Ort. Sein einziger Wert kann darin liegen, daß es mich antreibt, nach dem Schatze zu suchen. Das Papier ist wertlos, solange es nicht durch ein solches dahinter stehendes wirkliches Urteil wie „2 ist eine gerade Zahl" realisiert wird. In der Tat, wir sagten oben, als es sich um Zahlfolgen handelte und die Gesetze, welche sie ins Unendliche hinaus bestimmen: Ist es uns gelungen, ein Gesetz zu konstruieren von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$, so sind wir zu der Behauptung berechtigt, daß es Gesetze von der Art $\mathfrak{E}$ gibt; nur die *gelungene* Konstruktion kann uns die Berechtigung dazu geben; von *Möglichkeit* ist nicht die Rede. Aber was ist denn das für ein Urteil, das für sich genommen eines Sinnes entbehrt, das vielmehr erst auf Grund des gelungenen Beweises, der die Wahrheit des Urteils verbürgt, seinen *Sinn* gewinnt? Es ist eben kein Urteil, sondern ein Urteilsabstrakt. Damit scheint mir sein Charakter klar bezeichnet und die eigentliche Bedeutung des Existenzbegriffes aufgeklärt. Jetzt können wir der Brouwerschen Leugnung nicht mehr den Gedanken entgegenhalten, an den ich mich vorhin geklammert hatte: aber es *verhält* sich doch so oder es verhält sich nicht so (mag ich auch vielleicht außerstande sein es zu entscheiden)! Ebensowenig ist das generelle „jede Zahl hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}$" — z. B. „für jede Zahl m ist $m+1=1+m$" — ein wirkliches Urteil, sondern eine generelle *Anweisung auf Urteile*. Kommt mir nun eine einzelne Zahl, z. B. 17, in den Weg, so kann ich bei ihr auf diese Anweisung hin ein wirkliches Urteil einlösen, nämlich: $17+1=1+17$. Oder um ein anderes Bild zu gebrauchen: vergleiche ich die Erkenntnis einer Frucht und den einsichtigen Vollzug der Erkenntnis dem Genusse der Frucht, so ist ein allgemeiner Satz einer harten Schale voller Früchte zu vergleichen. Gewiß hat sie Wert, nicht aber die Schale an sich, sondern nur um ihres Inhalts an Früchten willen; sie ist mir so lange nichts nutze, als ich sie nicht aufbreche, eine Frucht wirklich herausnehme und genieße. Die geschilderte Auffassung gibt nur der Bedeutung Ausdruck, welche die allgemeinen und die Existentialsätze tatsächlich für uns besitzen. In ihrem Lichte erscheint die Mathematik als eine ungeheure „Papierwirtschaft". Realen Wert, den Lebensmitteln in der Volkswirtschaft vergleichbar, hat nur das Unmittelbare, das schlechthin Singuläre; alles Generelle und alle Existenzaussagen nehmen nur mittelbar daran teil. Und doch denken wir als Mathematiker gar selten an die Einlösung dieses „Papiergeldes"! Nicht das Existenztheorem ist das Wertvolle, sondern die im Beweise geführte *Konstruktion*. Die Mathematik ist, wie Brouwer gelegentlich sagt, mehr ein Tun denn eine Lehre.

Solange man sich zu dem im letzten Absatz geschehenen Schritt nicht verstehen kann, stehen die beiden hier geschilderten Versuche der Grundlegung der Analysis einander gleichmöglich gegenüber, mag auch der Brouwersche von vornherein den Vorzug besitzen, daß die Begriffsbildung nicht gefesselt und dem anschaulichen Wesen des Kontinuums besser gerecht wird. Sobald man aber den neuen Schritt tut — durch welchen, wie ich glaube, der Sinn des „es gibt" und „jeder" erst völlig klar wird — ist die erste Grundlegung radikal unmöglich; denn die Verengerung des Gesetzesbegriffs auf den des $\varkappa$-Gesetzes hilft uns dann nichts; die

Frage nach der „Möglichkeit" stellt uns ebensowenig einem mit Ja oder Nein antwortenden Sachverhalt gegenüber, wenn sie gestellt wird mit Bezug auf die beliebig oft zu wiederholende Anwendung der Konstruktionsprinzipien wie mit Bezug auf die unendliche Zahlenreihe, d. i. den beliebig oft zu wiederholenden Prozeß des Übergangs von einer Zahl zur nächstfolgenden. So gebe ich also jetzt meinen eigenen Versuch preis und schließe mich Brouwer an. In der drohenden Auflösung des Staatswesens der Analysis, die sich vorbereitet, wenn sie auch erst von wenigen erkannt wird, suchte ich festen Boden zu gewinnen, ohne die Ordnung, auf welcher es beruht, zu verlassen, indem ich ihr Grundprinzip rein und ehrlich durchführte; und ich glaube, das gelang — soweit es gelingen konnte. Denn *diese Ordnung ist nicht haltbar in sich*, wie ich mich jetzt überzeugt habe, und Brouwer — das ist die Revolution! Immerhin habe ich hier noch einmal die Grundgedanken meiner Theorie dargestellt, weil sie und die Brouwersche in schärfster Weise den alten Kontrast zwischen der atomistischen und der kontinuierlichen Auffassung vor Augen stellen und weil an dem Gegensatz sich besonders eindringlich klar machen läßt, wo es hapert und was geschehen muß. Es wäre wunderbar gewesen, wenn der alte Streit darauf hinausgelaufen wäre, daß sowohl die atomistische wie die Kontinuumsauffassung sich durchführen lasse; statt dessen triumphiert jetzt endgültig die letztere. Brouwer ist es, dem wir die neue Lösung des Kontinuumproblems verdanken, dessen provisorische Lösung durch Galilei und die Begründer der Differential- und Integralrechnung der geschichtliche Prozeß von innen heraus wieder zerstört hatte. Ob ich ein Recht habe, die hier an zweiter Stelle entwickelte als Brouwersche Theorie zu bezeichnen, ist mir allerdings zweifelhaft; darüber später Genaueres. Aber die entscheidenden Anstöße: die werdende Wahlfolge und der Unglaube an das Axiom vom ausgeschlossenen Dritten, rühren jedenfalls von ihm her.

Unsere Lehre von den allgemeinen und den Existentialsätzen ist keine bildhaft-vage, wie sich u. a. darin zeigt, daß sie sofort zu wichtigen, streng einsichtigen Konsequenzen führt. Vor allem zu der, daß es gänzlich sinnlos ist, derartige Sätze zu negieren; womit überhaupt die Möglichkeit wegfällt, in bezug auf sie ein „Axiom vom ausgeschlossenen Dritten" zu formulieren. Die allgemeinen Sätze, welche ich oben als Urteilsanweisungen bezeichnete, teilen dies mit den eigentlichen Urteilen, daß sie sich in sich selbst genug sind; ja sie bergen sogar eine unendliche Fülle wirklicher Urteile in ihrem Innern. In dieser Hinsicht dürfen wir sie den Urteilen gleichstellen. Wir werden von ihnen freilich nicht gut sagen können wie von den Urteilen, daß sie wahr sind, sondern eher: sie bestehen zu Recht; sie formulieren den Rechtsgrund für alle aus ihnen „einzulösenden" singulären Urteile. Im Gegensatz dazu ist ein Existentialsatz, für sich genommen, *nichts*; ist das Urteil, aus welchem ein solches Urteilsabstrakt gewonnen wurde, verlorengegangen oder vergessen, so bleibt wirklich *nichts* (es sei denn, wie wir oben sagten, ein Ansporn, es wieder zu suchen). Nicht nur aus einem Urteil, sondern auch aus einer Urteilsanweisung kann man ein Abstrakt ziehen. Z. B. sei $R(m, n)$ eine Relation zwischen natürlichen Zahlen, eine Relation, die zwischen irgend zwei Zahlen besteht oder nicht besteht. Für irgend zwei bestimmte Zahlen m, n sei also die Behauptung oder die Leugnung, daß sie in der Relation R zueinander stehen, ein wirkliches Urteil. Die Urteilsanweisung $R(m, 5)$ [„jede Zahl m steht zu 5 in der Beziehung R" oder „die Eigenschaft $R(\bullet, 5)$ zu besitzen, liegt im Wesen der Zahl"] bestehe zu Recht. Dann können wir daraus das Abstrakt ziehen: es gibt eine Zahl n (beiseite gesagt: nämlich 5), so daß jede Zahl m zu ihr die Beziehung $R(m, n)$ erfüllt. Dagegen ist eine Anweisung auf Urteilsabstrakte das reine Nichts, sofern nicht eine Anweisung auf wirkliche Urteile dahinter steht, aus welcher sie als Abstrakt gewonnen ist. Beispiel: Zu jeder Zahl m gibt es eine Zahl n derart, daß zwischen ihnen die Beziehung $R(m, n)$ besteht. Es muß sich da in Wahrheit um das Abstrakt aus einer Urteilsanweisung handeln. Welcher Urteilsanweisung? Offenbar der folgenden. Es sei φ ein bestimmtes Gesetz, das aus jeder Zahl m eine Zahl $\varphi(m)$ erzeugt; die generelle Urteilsanweisung $R(m, \varphi(m))$ bestehe zu Recht. Dann können wir aus ihr das Abstrakt ziehen: es gibt ein *Gesetz* φ, so daß für jede Zahl m zwischen m und $\varphi(m)$ die Beziehung R statthat. So also muß unser obiger Satz sinnvollerweise interpretiert werden. Kommt uns jetzt irgendeine Zahl, z. B. 7, in den Weg, so erzeugt uns das Gesetz φ aus 7 eine bestimmte Zahl, sagen wir $\varphi(7) = 19$; dann können wir sagen: zwischen 7 und 19 besteht die Beziehung R, und in Hinblick darauf haben wir auch ein Recht zu dem Urteilsabstrakt: es gibt eine Zahl n, welche zu 7 in der Beziehung $R(7, n)$ steht. Das „es gibt" muß also das „jeder" einschließen und nicht umgekehrt, wenn wir die Sätze so formulieren, wie sie als Abstrakte aus sich selbst genugsamen Sätzen herausgezogen werden.

Ausgangspunkt der Mathematik ist die Reihe der natürlichen Zahlen, d. h. das Gesetz $\aleph$, das aus dem Nichts die erste Zahl 1 erzeugt und aus jeder schon entstandenen Zahl die nächstfolgende erzeugt; ein Prozeß, der niemals zu einer schon dagewesenen Zahl zurückführt. Wollen wir die Zahlen irgendwie für die Anschauung festhalten, so müssen wir sie symbolisch, durch qualitative Merkmale voneinander unterscheiden. Sofern wir aber Arithmetik treiben, sehen wir von derartigen qualitativen Merkmalen ganz ab; für die Arithmetik ist 1 lediglich „die aus dem Nichts Erzeugte", 2 „die aus der 1 Erzeugte" usf. Es wird, darf man sagen, durch die mathematische Betrachtung der Wirklichkeit der Versuch gemacht, die Welt, welche dem Bewußtsein in dessen allgemeiner Form, einer Durchdringung von *Sein* und *Wesen* (des „dies" und „so") gegeben ist, in der Absolutheit reinen Seins darzustellen. Daher liegt eine tiefe Wahrheit in der Pythagoreischen Lehre, daß jegliches Sein als solches auf der Zahl ruht.

Die allgemeinen, in sich selbst genugsamen Sätze der Mathematik handeln teils von der Allheit der natürlichen Zahlen, teils von der Allheit der durch freie Wahlakte werdenden Folgen natürlicher Zahlen. Sie beziehen sich also teils auf die ins Unendliche hinaus sich erstreckende *Möglichkeit*, welche durch den grenzenlosen Fortgang des vom Gesetze $\aleph$ gelenkten Entwicklungsprozesses der natürlichen Zahlen gegeben ist, teils auf die in der werdenden Zahlfolge liegende unendliche Freiheit immer neuer ungebundener Wahlakte, die bei jedem Schritt den von neuem anhebenden Entwicklungsprozeß der natürlichen Zahlenreihe an einer willkürlichen Stelle zum Stillstand bringen. Es liegt in der Natur der Sache, daß die Wesenseinsicht, welcher die allgemeinen Sätze entspringen, stets auf der sog. vollständigen Induktion fundiert ist. Sie ist weiterer Begründung weder bedürftig noch fähig, weil sie nichts anderes ist als die mathematische Urintuition des „immer noch eins". Die aus diesen allgemeinen Sätzen zu gewinnenden eigentlichen Urteile entstehen dadurch, daß für die *willkürliche* Zahl, von der sie handeln, eine *bestimmte* eingesetzt wird, für die in freier Entwicklung begriffene *Wahlfolge* aber ein *Gesetz* φ, das eine einzelne Zahlfolge ins Unendliche hinaus bestimmt. Aus den sich selbst genügenden Urteilen und Urteilsanweisungen werden Abstrakta gezogen, bei denen das „es gibt" sich entweder beziehen kann auf eine natürliche Zahl oder auf ein Gesetz, und zwar auf ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine Zahl erzeugt (*functio discreta*) oder das aus jeder durch freie Wahlakte werdenden Folge eine Zahl erzeugt (*functio mixta*) oder das aus jeder durch freie Wahlakte werdenden Folge wiederum eine werdende Folge erzeugt (*functio continua*). Wir machen aber diese Gesetze selber nicht zum Gegenstand allgemeiner Aussagen. Wo es heißt „jede Folge", wandelt sich der Begriff des Gesetzes (functio discreta) in den der werdenden Wahlfolge; hingegen steht uns für die functiones mixtae und continuae kein derartiges Kontinuum zur Verfügung, in das sie sich einbetten wie die einzelnen functiones discretae in das Kontinuum der frei werdenden Wahlfolgen. Das alles ist a priori durch das Wesen des Erzeugungsprozesses $\aleph$, der mathematischen Urintuition vorgezeichnet. — Jede Anwendung der Mathematik muß ausgehen von gewissen, der mathematischen Behandlung zu unterwerfenden Objekten, welche durch eine Anzahl Charaktere sich voneinander unterscheiden lassen; die Charaktere sind natürliche Zahlen.

Durch das symbolische Verfahren, das jene Objekte durch ihre Charaktere ersetzt, ist der Anschluß an die reine Mathematik und ihre Konstruktionen erreicht. So liegt der Punktgeometrie auf der geraden Linie das System der oben erwähnten Dualintervalle zugrunde, die wir durch zwei ganzzahlige Charaktere kennzeichnen konnten.

2. Begriff der Funktion.

a) *Functio discreta.*

Folge (functio discreta, f. d.), hatten wir gesagt, ist ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine Zahl erzeugt. Die Freiheit der Gesetzeskonstruktion ist in keiner Weise beschränkt; immerhin muß das Gesetz so beschaffen sein, daß es wirklich zu jeder Zahl die erzeugte oder zugeordnete eindeutig bestimmt. Die folgende Festsetzung z. B.: n erzeuge die Zahl 1, wenn es drei natürliche Zahlen x, y, z gibt von der Beschaffenheit, daß $x^n + y^n = z^n$ ist, hingegen die Zahl 2, wenn $x^n + y^n \neq z^n$ ist, wie auch die drei Zahlen x, y, z gewählt werden mögen: diese Vorschrift ist kein Gesetz. Denn nach den logischen Einsichten, zu denen wir uns durchgekämpft, liegt hier keine Regel vor, welche die zugeordnete Zahl wirklich bestimmt. Ebensowenig ist die Regel „n erzeuge die Zahl 2, falls es eine Zahl m gibt von der Art, daß $n = 2m$ ist; falls aber $n \neq 2m$ ist für jede natürliche Zahl m, erzeuge n die 1“ ihrem Wortlaut nach ein Gesetz; wohl aber die folgende, welche ohne ein auf die unendliche Reihe der natürlichen Zahlen sich beziehendes „es gibt“ oder „jede“ den Unterschied zwischen *gerade* und *ungerade* durch vollständige Induktion zu entscheiden gestattet: „1 erzeuge die Zahl 1; erzeugt n die Zahl 1, so die auf n folgende Zahl n' die 2; erzeugt hingegen n die Zahl 2, so n' die 1“. Praktisch ausgedrückt, soll also eine Regel vorliegen, welche gestattet, bei vorgegebener Zahl die aus ihr erzeugte zu bestimmen, wenn wir nur imstande sind, dem Entwicklungsprozeß der Zahlenreihe bis zu einer beliebigen Stelle zu folgen, mit anderen Worten: sofern wir aus jeder Zahl die nächstfolgende erzeugen und, wenn n irgendeine Zahl ist, die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufen können. Bei dem symbolischen Verfahren, das die Zahlen durch qualitativ unterschiedene Zeichen repräsentiert, müssen wir außerdem natürlich voraussetzen, daß wir in der Lage sind, von zwei gegebenen Zahlen zu entscheiden, ob sie gleich oder verschieden sind.

Eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von der Art, daß der Satz „die beliebige Zahl n besitzt die Eigenschaft $\mathfrak{E}$“ ein Urteil im eigentlichen Sinne ist, eine Eigenschaft $\mathfrak{E}$ also, welche einer Zahl zukommt oder nicht, können wir, wie das obige Beispiel von gerade und ungerade erkennen läßt, als besondere Folge erklären, nämlich als ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine der Zahlen

1 oder 2 erzeugt; wobei etwa die 1 als Symbol für *ja*, die 2 als Symbol für *nein* dient. Da wir später das Wort Eigenschaft in einem weiteren Sinne verwenden wollen, werde ein derartiges Gesetz C als *Charakter* bezeichnet. Sein *Negat* $\overline{C}$ entsteht durch Vertauschung von 1 und 2 (ja und nein). Der Begriff des Charakters läßt sich zu dem des *k-teiligen Charakters* erweitern; das ist ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine der Zahlen von 1 bis k erzeugt. Das einfachste Beispiel ist der Kongruenzcharakter mod k. Er beruht auf der zyklischen Anordnung der Zahlen von 1 bis k, in welcher die Zahlen so aufeinander folgen, wie sie der Entwicklungsprozeß der Zahlenreihe liefert; der Prozeß wird aber bei k abgebrochen und auf k folgt wieder 1. Das Gesetz, welches jeder Zahl n seinen Kongruenzrest $\equiv_k(n)$ zugeordnet, ist dann so zu formulieren: $\equiv_k(1) = 1$; $\equiv_k(n')$ ist für jedes n die in der zyklischen Anordnung der Zahlen von 1 bis k auf $\equiv_k(n)$ folgende Zahl. Dies Gesetz beschreibt in der Tat das Verfahren, das wir einschlagen, wenn wir in praxi z. B. zu entscheiden haben, ob eine gewisse Zahl n durch 5 teilbar ist: die Reihe der Zahlen von 1 bis n durchlaufend, zählen wir immer von 1 bis 5 durch und fangen dann wieder mit 1 an. — Wo wir das Wort Charakter ohne einen Zusatz gebrauchen, ist stets an einen zweiteiligen Charakter zu denken.

Das ursprünglichste Gesetz ist dasjenige, welches aus jeder Zahl n die nächstfolgende n' (oder $n + 1$) erzeugt. Ist k irgendeine Zahl, so bezeichnet bekanntlich $n + k$ die nach dem folgenden Gesetz aus n erzeugte Zahl: 1 erzeugt $k + 1$; bei Übergang von n zur nächstfolgenden Zahl verwandelt sich auch die von n erzeugte in die auf sie folgende. Damit haben wir nun ein Gesetz, das aus je *zwei* Zahlen n und k eine Zahl $n + k$ erzeugt. Auch hier sprechen wir natürlich noch von einer functio discreta; sie enthält zwei Argumente, ist nicht eine einfache, sondern eine Doppelfolge. — Man weiß, wie aus der *Addition* die Doppelfolge der *Multiplikation* konstruiert wird, die je zwei Zahlen m und n ihr Produkt $m \cdot n$ zuordnet. Eine Doppelfolge, die aus jedem Zahlenpaar m, n stets eine der Zahlen 1 oder 2 erzeugt, werden wir eine *Relation* nennen; allgemeiner eine Doppelfolge, in welcher nur die Zahlen von 1 bis k als Funktionswerte zur Verfügung stehen, eine k-teilige Relation. $m \leq n$ ist in diesem Sinne z. B. eine (zweiteilige) Relation: das Zahlenpaar m, n erzeugt die 1, falls m mit einer der Zahlen von 1 bis n übereinstimmt; wenn das aber nicht der Fall ist, die Zahl 2. Endlich wollen wir auch solche Fälle zulassen, in denen die Funktion nicht für alle möglichen Argumentwerte erklärt ist; wir sprechen dann von einer *zerstreuten Folge*. Das ist also ein Gesetz, das aus jeder Zahl eine Zahl oder nichts erzeugt. So entsteht z. B. $n - 5$ aus n nach dem Gesetz, daß die Zahlen von 1 bis 5 nichts erzeugen, alle weiteren aber eine bestimmte Zahl gemäß der Regel: $6 - 5 = 1$; $n' - 5 = (n - 5)'$.

Der Begriff der zerstreuten Folge ist nicht wesentlich von dem der Folge verschieden, da wir in diesem Zusammenhang das Nichts als eine allen übrigen vorangehende Zahl 0 deuten können.

Wir führen noch einige weitere Beispiele von functiones discretae an und beweisen ein paar primitive Tatsachen der Arithmetik. Zunächst den Satz: Ist n irgendeine Zahl vom Kongruenzrest 0 mod k [${}_k(n) = k$ in der obigen Bezeichnung], so gibt es eine Zahl m von der Art, daß $n = k \cdot m$; d. h. es gibt ein Gesetz, das aus jeder Zahl n vom Kongruenzcharakter 0 eine Zahl m erzeugt von der Art, daß $n = k \cdot m$ ist. Wir haben dieses Gesetz Q („Quotient") anzugeben: $Q(1) = 1$; ist $Q(n) = m$, so auch $Q(n') = m$, wenn ${}_k(n) \neq k$ ist; wenn aber ${}_k(n) = k$ ist, $Q(n') = m'$. Man beweist dann leicht, daß, wenn ${}_k(n) = i$, $Q(n) = m$ gesetzt wird, allgemein $n + k = km + i$ gilt. Das Gesetz gibt die Regel an, nach der wir in praxi die Division wirklich ausführen. — Eine Zahl n ist eine Primzahl, wenn sie > 1 ist und keines der endlich-vielen Zahlenprodukte $a \cdot b$ der folgenden Tabelle

$$
(\mathrm{T}) \begin{cases}
1 \cdot 1,\ 1 \cdot 2, \ldots, 1 \cdot (n-1), \\
2 \cdot 1,\ 2 \cdot 2, \ldots, 2 \cdot (n-1), \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n-1) \cdot 1,\ (n-1) \cdot 2, \ldots, (n-1) \cdot (n-1)
\end{cases}
$$

(die wir so durchlaufen können, wie wir die Zeilen eines Buches lesen) mit n übereinstimmt. Dieses Gesetz erklärt die Primzahleigenschaft als einen Charakter. Es besteht die Urteilsanweisung zu Recht: Das Produkt zweier Zahlen > 1 ist niemals eine Primzahl. Wir erklären ein Gesetz, das aus 1 nichts erzeugt, aus jeder Zahl $n > 1$ aber zwei Zahlen $\pi(n)$, $\varkappa(n)$ derart, daß allgemein $\pi(n) \cdot \varkappa(n) = n$ ist und $\pi(n)$ stets eine Primzahl; nämlich folgendermaßen. Ist n eine Primzahl, so sei $\pi(n) = n$, $\varkappa(n) = 1$; ist n aber keine Primzahl, so sei $\pi(n)$, $\varkappa(n)$ das erste Zahlenpaar in der nach gegebener Anweisung zu durchlaufenden Tabelle T, dessen Produkt $= n$ ist. Im Hinblick auf dies Gesetz können wir folgenden Satz (Abstrakt einer Urteilsanweisung) formulieren: In jeder Zahl > 1 geht eine Primzahl auf. Die Folge der Primzahlen selbst p_n wird nach Euklid durch folgendes Gesetz definiert, welches das Zeichen π in der eben eingeführten Bedeutung benutzt: 1 erzeugt die Primzahl $p_1 = 2$; p_{n+1} ist die erste Primzahl in der Reihe der Zahlen von 1 bis $\pi(p_1 p_2 \cdots p_n + 1)$, welche sowohl $\neq p_1$ wie $\neq p_2 \ldots$ wie $\neq p_n$ ist. — Endlich noch dieses Beispiel. Lassen wir die Gültigkeit des „großen" Fermatschen Satzes ganz dahingestellt, so war es doch nach der vor-Brouwerschen Logik selbstverständlich, daß es, wenn n irgendeine Zahl ist, entweder drei Zahlen xyz gibt von der Beschaffenheit, daß $x^n + y^n = z^n$ ist, oder aber

$x^n + y^n \neq z^n$ ausfällt für beliebige natürliche Zahlen $x y z$. Diese Selbstverständlichkeit der alten Logik wollen wir nach unserer neuen Auffassung genauer formulieren. Die Behauptung ist dann die: Es gibt ein Gesetz (in dem strengen, hier zugrunde gelegten Sinne), das aus jeder Zahl n entweder nichts oder drei Zahlen x_n, y_n, z_n erzeugt derart, daß im ersten Fall für irgend drei Zahlen $x y z$ stets $x^n + y^n \neq z^n$ ist, im zweiten aber $x_n^n + y_n^n = z_n^n$ gilt. Geschweige, daß diese Behauptung jetzt selbstverständlich ist, hat es nicht einmal einen Sinn, zu fragen, ob es sich so verhält oder nicht, in der Hoffnung, einem Sachverhalt gegenüberzustehen, der darauf eine bestimmte Antwort erteilt. Sondern es handelt sich um ein Urteilsabstrakt, das gültig ist, sofern das Gesetz konstruiert ist und die geforderten Eigenschaften desselben, welche generelle Aussagen sind, zu Recht bestehen. Liegt dieses Gesetz μ vor, so können wir aus ihm ein anderes konstruieren, welches der Zahl n die 1 zuordnet, falls μ aus n nichts erzeugt, hingegen die 2, falls μ dem n drei Zahlen $x_n y_n z_n$ zuordnet. Dieses Gesetz ist dann der „Charakter", welcher die Fermatschen Zahlen n (für welche der Fermatsche Satz gültig ist) unterscheidet von den nicht-Fermatschen.

Wenn die Werte zweier functiones discretae für jedes Argument übereinstimmen, sagen wir, die Funktionen selber *stimmten überein*; wenn es aber eine Zahl n gibt, aus welcher das erste Gesetz eine andere Zahl erzeugt als das zweite, so sagen wir, die beiden Folgen seien voneinander verschieden. Die eine Aussage ist eine generelle, die andere eine Existentialaussage; keine ein Urteil im eigentlichen Sinne. Wir dürfen also auch nicht mit Bezug auf zwei gegebene Folgen fragen, ob sie übereinstimmen oder verschieden sind, in der Meinung, daß es sich so oder so verhalte.

Solange wir nur generelle Sätze über die Zahlen aufstellen und nicht über die durch freie Wahl werdenden Folgen von Zahlen, somit auch nur Gesetze in Betracht ziehen, welche Zahlen einander zuordnen, nicht aber Gesetze, welche aus einer werdenden Wahlfolge eine vom Ausfall der Wahlen abhängige Zahl erzeugen oder wiederum eine werdende Zahlfolge, bewegen wir uns in dem Felde der reinen *Arithmetik und Algebra.* Jene höheren Stufen sind charakteristisch für die *Analysis.* Das Vorstehende dürfte genügend verdeutlichen, in welchem Geiste nach der neuen Auffassung Arithmetik und Algebra betrieben werden müssen; ihre radikalen Konsequenzen, welche der Mathematik ein wesentlich anderes Gesicht geben als sie uns heute zeigt, entfaltet die neue Theorie aber erst im Felde der Analysis.

b) *Functio mixta.*

Eine Funktion, welche jeder Zahl m eine Folge, d. i. ein durch m bestimmtes, aus jeder Zahl n eine Zahl $\varphi(m, n)$ erzeugendes Gesetz zuordnet, ist nichts anderes als eine Doppelfolge, fällt also unter den Begriff der functio discreta. Wie aber kann umgekehrt eine Folge, d. i. diesmal eine durch freie Wahlen werdende Folge von Zahlen $\nu = \{n_1, n_2, \ldots\}$, eine einzelne Zahl erzeugen? Der einfachste Fall ist offenbar der, wo die erzeugte Zahl lediglich von einer beschränkten Anzahl k von Stellen der werdenden Folge abhängt; dann ist man sicher, daß die Zahl bestimmt ist, sobald die Entwicklung der Folge bis zum k-ten Gliede gediehen ist. Die Stellenzahl k ist dabei unabhängig von dem Ausfall der einzelnen Wahlakte. Beispiel:

$$f(\nu) = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 \qquad (k = 4).$$

Ein komplizierterer Fall ist der folgende:

$$f(\nu) = n_1 + n_2 + \ldots + n_{n_1+n_2+n_3}.$$

Hier ist es so: Nachdem drei Stellen der Folge da sind, ist es bekannt, bis zu welcher Stelle (nämlich $n_1 + n_2 + n_3$) die Folge fortgesetzt werden muß, ehe sie die erzeugte Zahl festlegt; diese Stelle hängt von dem Ausfall der ersten drei Wahlen ab. Diese Komplikation kann sich iterieren; z. B.: die ersten 10 Stellen bestimmen die Anzahl s derjenigen Stellen, die bekannt sein müssen, um ihrerseits die Stelle zu bestimmen, bis zu welcher die Entwicklung fortgeschritten sein muß, ehe sie die zugeordnete Zahl erzeugt; usf. Es ist aber auch nicht gesagt, daß die erwähnte Komplikation sich gerade zweimal oder dreimal oder viermal iteriere, sondern es kann wiederum von dem Ausfall der ersten Wahlen abhängen, wie oft sie sich iteriert. Setzt man z. B.

$$f(k; \nu) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$$

und bildet durch Iteration

$$\begin{aligned} f_1(k; \nu) &= f(k; \nu), \\ f_2(k; \nu) &= f_1(f(k; \nu); \nu), \\ f_3(k; \nu) &= f_2(f(k; \nu); \nu), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}$$

so leitet man daraus etwa die folgende functio mixta (abgekürzt f. m.) her:

$$f_{n_1 \cdot n_2 \cdot n_3}(7; \nu).$$

Ich spreche das allgemeine Prinzip aus, das diesen Konstruktionsmöglichkeiten zugrunde liegt.

1. Ist k eine natürliche Zahl und $\varphi(n_1\, n_2 \ldots n_k)$ irgendeine Funktion von k Argumenten, so wird, wenn $n_1\, n_2 \ldots n_k$ die ersten k Stellen einer durch freie Wahlen werdenden Folge ν sind, durch $f(\nu) = \varphi(n_1\, n_2 \ldots n_k)$ eine „primitive" f. m. definiert.

2. Primitive f. m. sind der Ausgangspunkt für die Bildung höherer f. m., welche nach dem folgenden Prinzip vor sich geht: Ist $f(k; \nu)$ eine schon konstruierte f. m., die noch von einer willkürlichen natürlichen Zahl k abhängt und ebenso $g(\nu)$ eine schon konstruierte f. m., so erhält man eine neue f' nach der Substitutionsformel

$$f'(\nu) = f(g(\nu); \nu).$$

Diese Regel ist, wie wohl zu beachten, nicht ein Konstruktionsprinzip, welches den im I. Teil besprochenen zu vergleichen ist, weil hier nichts darüber vorausgesetzt ist, wie die Abhängigkeit der f. m. von dem Parameter k zustande kommt. Die Iteration ist eine, aber nicht die einzige Möglichkeit; in dieser Hinsicht bleibt die Konstruktion völlig frei. Im übrigen wollen wir hier die Frage gar nicht erwägen, ob nur auf diesem Wege f. m. gebildet werden können oder ob nicht auch mit gewissen anders gebauten Erzeugungsgesetzen sich die Wesenseinsicht verbindet: nach diesem Gesetz tritt bei einer werdenden Folge, sie mag sich entwickeln wie sie will, stets einmal der Augenblick ein, wo sie eine Zahl aus sich gebiert. Das ist das Merkmal, welches allein wesentlich ist für den Begriff der f. m.

Der besondere Fall des *Charakters* liegt vor, wenn für die erzeugte Zahl dem Wortlaut des Gesetzes nach nur die Werte von 1 bis k zur Verfügung stehen. — Wollen wir andrerseits auch die Möglichkeit mitumfassen, daß die Funktion nicht für alle Folgen definiert ist („zerstreute" f. m.), so müssen wir zulassen, daß es „taube" Folgen geben kann, die keine Zahl erzeugen; es muß dann aber aus dem Gesetz für jede Folge ν, wie sie sich auch entwickeln möge, hervorgehen: Bis zu einer gewissen (von ν abhängigen) Stelle ist entweder die erzeugte Zahl da oder die Gewißheit, daß es sich um eine taube Folge handelt, die in alle Ewigkeit unfruchtbar bleibt.

Mehrere Argumente, d. i. mehrere nebeneinander in Entstehung begriffene Wahlfolgen können wir immer als eine einzige betrachten; die Übertragung der Begriffe ist damit gegeben. Statt von „Charakter" sprechen wir dann von „Relation".

c) *Functio continua.*

Wir gehen zu den functiones continuae (f. c.) über. Einen besonderen Fall haben wir schon betrachtet, als der Gedanke der werdenden Folge zum erstenmal in unsern Gesichtskreis trat. Da hielt das Wachstum der Folge, die als Funktionswert auftrat, gleichen Schritt mit dem Wachstum des Arguments. Beseitigen wir diese besondere Annahme, so kommen wir zu folgender Erklärung:

Eine f. c. ist ein Gesetz, gemäß welchem in einer durch freie Wahlakte werdenden Folge von natürlichen Zahlen jeder Schritt, welcher ihr ein weiteres Glied hinzufügt, eine bestimmte Zahl oder nichts erzeugt. Was beim k-ten Schritt geschieht, hängt dabei nicht bloß von dem Ausfall der Wahl beim k-ten Schritt, sondern im allgemeinen von der ganzen Vergangenheit der Argumentfolge in diesem Augenblicke der Entwicklung ab.

Bei solcher Formulierung sind wir aber noch nicht sicher, daß die Folge, welche den Funktionswert ergibt, wirklich ins Unendliche wächst, wenn die Entwicklung der Argumentfolge ins Unendliche fortschreitet. Es muß also noch die folgende Forderung **V** hinzutreten: Ist k eine beliebige natürliche Zahl, ν eine werdende Folge, und verfolgen wir deren Entwicklung von der k-ten Stelle ab, so tritt gewiß einmal der Augenblick ein, wo sie eine neue Zahl (und nicht nichts) erzeugt.

Ferner haben wir den Begriff der f. c. noch so zu verallgemeinern, daß er auch diejenigen Fälle mitumfaßt, wo die Funktion nicht für alle möglichen Folgen definiert ist. Dies geschieht, indem wir zulassen, daß die werdende Wahlfolge bei jedem Schritt eine Zahl oder nichts erzeugt *oder aber den Abbruch des Prozesses, ihren eigenen Tod, herbeiführt* (und die Vernichtung seines bisherigen Erzeugnisses). Die Forderung **V** ist leicht zu übertragen: Eine Wahlfolge ν, die bis zum k-ten Gliede ohne Abbruch des Prozesses gediehen ist, muß von k ab, wie sie auch fortgesetzt werde, spätestens bis zu einer gewissen, von k und ν abhängigen Stelle wiederum eine Zahl hervorgebracht haben oder durch das Gesetz der f. c. getötet sein. Es ist hier aber noch eine weitere Forderung hinzuzufügen. Sei z. B. $g(\nu)$ eine f. m. und $\Phi(\nu)$ eine „zerstreute" f. c., wie wir sie hier im Auge haben. Eine werdende Folge ν sei, ohne daß durch Φ ein Abbruch des Prozesses eingetreten ist, so weit gediehen, daß der von der zugehörigen Folge $\nu' = \Phi(\nu)$ bereits entstandene Abschnitt die Zahl $g(\nu')\{= g(\Phi(\nu))\}$ bestimmt; sie sei etwa $= 2$. Tritt für eine Folge ν nach dem Gesetz Φ irgendwann einmal der Abbruch des Prozesses ein, so wird für ein solches ν die Funktion $g(\Phi) = g'$ nicht erklärt sein, also nichts bedeuten. Können wir nun unter den eben geschilderten Umständen behaupten: Es gibt eine Folge ν, für welche $g(\Phi(\nu)) = 2$ ist? Doch nur dann, wenn wir sicher sind, daß eine Folge ν, die bis zu einem gewissen Punkte gediehen ist, ohne durch das Gesetz Φ abgebrochen zu sein, auch ins Unbegrenzte hinaus so fortgesetzt werden kann, daß ihr dieses Schicksal niemals zu teil wird. Es muß also mit Φ ein zweites Gesetz X gegeben sein, zufolge dessen ν bei jedem weiteren Schritt seiner

Entwickelung, solange diese noch nicht durch Φ abgeschnitten ist, eine Zahl erzeugt von folgender Art: Wählt man die beim k-ten Wahlschritt von ν durch X erzeugte Zahl als die $(k+1)$-te Zahl von ν, so führt Φ, wenn es bis dahin nicht geschehen war, auch beim $(k+1)$-ten nicht die Hemmung des Entwicklungsprozesses von ν herbei.

Damit sind die Funktionsbegriffe hinreichend fixiert. Es sei aber noch einmal betont, daß in den Theoremen der Mathematik von Fall zu Fall einzelne bestimmte derartige Funktionen auftreten, niemals aber allgemeine Sätze über sie aufgestellt werden. Die allgemeine Formulierung dieser Begriffe ist deshalb auch nur erforderlich, wenn man sich über Sinn und Verfahren der Mathematik Rechenschaft gibt; für die Mathematik selber, den Inhalt ihrer Lehrsätze, kommt sie gar nicht in Betracht.

3. Mathematische Sätze, Eigenschaften und Mengen.

Denn diese Sätze sind, sofern sie sich selbst genügen und nicht rein individuelle Urteile sind, allgemeine Aussagen über Zahlen oder Wahlfolgen von Zahlen, nicht aber über „Funktionen". Wir unterscheiden demnach folgende Arten von Aussagen:

I. *Urteile im eigentlichen Sinne.*

II. *Generelle Aussagen.* Ihr Typus: Für jede natürliche Zahl n und jede frei werdende Wahlfolge ν besteht die Relation $C(n;\nu)$; Relation in dem scharfen Sinne eines von n abhängigen Charakters der Wahlfolge ν genommen.

III. *Abstrakta aus Urteilen oder generellen Aussagen.* Dabei kann das „es gibt" auftreten in Verbindung mit Zahl, Folge, functio mixta und functio continua. Auf eine Folge kann es sogar in doppelter Weise bezogen sein, indem diese entweder als Folge im eigentlichen Sinne oder als Zuordnungsgesetz auftritt. Der erste Fall liegt z. B. vor, wenn $C(\nu)$ ein Charakter der frei werdenden Folge ν ist und nun der Satz formuliert wird: Es gibt eine Folge ν (d. i. selbstverständlich eine gesetzmäßig bestimmte), welcher der Charakter $C(\nu)$ zukommt. Der zweite liegt vor, wenn auf Grund einer Relation $R(mn)$ zwischen willkürlichen Zahlen m, n der Satz aufgestellt wird: Es gibt eine Folge φ, die aus jeder Zahl m eine Zahl $\varphi(m)$ erzeugt, derart, daß jede Zahl m die Eigenschaft $R(m, \varphi(m))$ besitzt. Da aber die Bedingung, daß die m-te Zahl einer Wahlfolge ν in der Beziehung R zur Zahl m steht, ein von m abhängiger Charakter von ν ist (es handelt sich dabei sogar um eine primitive f. m.), so ist der zweite als ein Sonderfall in dem ersten enthalten. Demnach können wir den Typus der Aussagen III. Art hinreichend allgemein durch folgendes Schema kennzeichnen: Es gibt eine Zahl n_0, eine Folge ν_0; außerdem ein

Gesetz f, das aus jeder Folge ν eine Zahl $f(\nu)$ erzeugt, und ein Gesetz Φ, das aus einer frei werdenden Folge ν eine werdende Folge $\nu' = \Phi(\nu)$ erzeugt, derart, daß für jede Zahl n und jede durch freie Wahlakte werdende Folge ν die Beziehung $C(n_0 \nu_0; n, f(\nu); \nu, \Phi(\nu))$ besteht; dabei ist $C(n_0 \nu_0; n n'; \nu \nu')$ eine gegebene Relation zwischen den willkürlichen Zahlen n_0, n, n' und den Wahlfolgen ν_0, ν, ν'.

Gehen in die Aussagen dieser drei Arten noch unbestimmte Zahlen oder Wahlfolgen ein, so entstehen Aussageschemata von *Eigenschaften* und *Beziehungen* zwischen Zahlen oder Folgen. Im Gebiete der Eigenschaften haben wir demnach die gleichen drei Arten zu unterscheiden. Die unter I fallenden Eigenschaften sind nichts anderes als die „Charaktere" in dem von uns festgelegten Sinne; diejenigen Eigenschaften also, die einer Zahl oder Folge an sich zukommen oder nicht zukommen. Wir könnten sie als „umfangs-definite" Eigenschaften den unter II. und III. fallenden „umfangs-vagen" gegenüberstellen. Eine umfangs-definite Eigenschaft, einen Charakter, wollen wir auch als *definite Menge* (Menge vom Typus I) bezeichnen. Von einer derartigen Menge darf man sagen, daß es an sich feststeht, ob ein Element ihr angehört oder nicht. Sind M, N zwei Zahlcharaktere (definite Zahlmengen), so ist M eine Teilmenge von N, wenn jede Zahl vom Charakter M auch den Charakter N besitzt; oder genauer: Wir erklären ein Gesetz $(M; N)$, das aus einer willkürlichen Zahl n dann die Zahl 2 (das „nein") erzeugt, wenn M ihr die 1, N die 2 zuordnet, — in jedem andern Falle aber die 1; der Sinn der „Teilmengen"-Aussage ist der, daß jede Zahl den Charakter $(M; N)$ besitzt. Sie ist also eine Aussage von der Form II. Ist M Teilmenge von N und N Teilmenge von M, so nennen wir M und N *identisch*. Entsprechendes ist über definite Mengen von Folgen oder die den Relationen korrespondierenden „mehrdimensionalen" Mengen von Zahlen und Folgen zu bemerken. — Man kann von der *Kardinalzahl* einer definiten Menge sprechen, muß sich dann aber darüber klar sein, daß für diese Kardinalzahlen nicht einmal der Satz gilt: Eine Kardinalzahl ist entweder $= 0$ oder $\geqq 1$; d. h. ein Zahlcharakter M erzeugt entweder aus jeder Zahl die 2 (die Menge M ist leer, jede Zahl hat die Eigenschaft $\overline{M}$), oder aber es gibt eine Zahl, aus welcher das Gesetz M die 1 erzeugt (es gibt ein Element von M; es gibt eine Zahl, welche die Eigenschaft M besitzt). Der Zweifel an der Lückenlosigkeit der Cantorschen $\aleph$ greift nach unserer jetzigen Auffassung also nicht erst bei $\aleph_1$, auch nicht erst bei $\aleph_0$ Platz, sondern schon am ersten Beginn der Zahlenreihe: Die Behauptung, daß 1 die kleinste auf 0 folgende Kardinalzahl ist, muß als grundlos zurückgewiesen werden. Mir scheint daraus die mathematische Wertlosigkeit dieses Mächtigkeitsbegriffs hervorzugehen. Natürlich behalten die endlichen Kardinalzahlen ihr altes gutes Recht, wo sie nicht auf eine „definite Menge" bezogen werden, sondern auf den Inbegriff einzelner gegebener Elemente (Zahlbegriff des täglichen Lebens).

Wir gehen zu den „umfangs-vagen" Eigenschaften der Art II über. Dabei ist folgendes zu beachten. Es sei $C(n;\nu)$ eine Relation zwischen Zahl n und Wahlfolge ν (z. B. diese: die n-te Zahl von ν ist ungerade). Die eine umfangs-vage Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von ν formulierende Aussage: Es besteht $C(n;\nu)$ für jedes n (alle Zahlen von ν sind ungerade), hat dann offenbar keinen Sinn mehr für eine *Wahlfolge* ν, sondern nur noch für eine ins Unendliche hinaus durch ein *Gesetz* bestimmte Folge. Ist nun $C'(\nu)$ ein Charakter, wie soll dann die Aussage interpretiert werden: „jeder Folge, welche die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ besitzt, kommt auch der Charakter C' zu"? „Jede Folge", das kann, wie wir wissen, nur heißen: jede durch freie Wahl werdende Folge; andrerseits kann die Eigenschaft $\mathfrak{E}$ sinnvollerweise nicht von einer Wahlfolge, sondern nur von einer ins Unendliche hinaus bestimmten, fertigen Folge ausgesagt werden. Es ist nur diese Interpretation möglich: Ist $C(n;\nu)$ erfüllt für alle Zahlen n *bis zu einer gewissen von* ν *abhängigen Grenze*, so gilt auch $C'(\nu)$. Oder genau: Es bedeute $C^*(n;\nu)$ die Relation, welche zwischen n und ν besteht, wenn $C(m;\nu)$ für alle Zahlen m von 1 bis n erfüllt ist; dann gibt es eine functio mixta $f(\nu)$ von der Art, daß einer jeden Wahlfolge vom Charakter $C^*(f(\nu);\nu)$ auch der Charakter $C'(\nu)$ zukommt. Es handelt sich also um eine Aussage des Typus III. Wenn aber in der Erklärung einer Eigenschaft $\mathfrak{E}$ von der Art II das „jeder" nicht wie hier bezogen ist auf „natürliche Zahl", sondern auf „Folge", ist eine analoge Interpretation der Natur der Sache nach nicht möglich. Nun hat der Eigenschafts- und Mengenbegriff nur soweit mathematische Bedeutung, als das *Identitätsprinzip* reicht, d. h. soweit mit der Aussage „jedes Element von der Eigenschaft $\mathfrak{E}$ hat die Eigenschaft $\mathfrak{E}'$ ($\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$ irgend zwei Eigenschaften)" ein Sinn verknüpft werden kann. Infolgedessen entspringen aus Aussagen der Form II, in welche Unbestimmte eingehen, nur dann Mengen, wenn „jeder" lediglich in Verbindung mit „natürliche Zahl" auftritt. Wir werden also erklären: Bezeichnet e, sei es eine willkürliche Zahl, sei es eine willkürliche Folge, und $C(e;n)$ einen außer von e noch von der Zahl n abhängigen Charakter, so entspringt aus C eine „vage Menge" $[C]$; daß ein Element e ihr angehört, besagt, daß *jede* Zahl n zu e in der Relation $C(e;n)$ steht [Menge vom Typus II]. Für Mengen vom Typus I und II können wir nach der obigen Anweisung den Sinn des Terminus „Teilmenge" festlegen. Für den kompliziertesten Fall zweier unter den Typus II fallender Mengen von Folgen würde er diese Bedeutung haben:

ν gehört zu $\{C\}$ besage: jede Zahl n steht zu ν in der Relation $C(\nu; n)$;
ν „ „ $\{C'\}$ „ „ „ n „ „ ν „ „ „ $C'(\nu; n)$.

$\{C'\}$ ist eine Teilmenge von $\{C\}$ besagt: Es gibt eine functio mixta $f(n; \nu)$ derart, daß die Urteilsanweisung zu Recht besteht: eine jede Zahl n und eine jede durch freie Wahlakte werdende Folge ν, welche zu allen Zahlen m von 1 bis $f(n, \nu)$ in der Relation $C(\nu, m)$ steht, erfüllen miteinander die Relation $C'(\nu; n)$. Die Aussage ist demnach eine solche von der Form III. Für den Begriff der Teilmenge gilt der *Syllogismus*, das transitive Gesetz: Ist M eine Teilmenge von M' und M' eine Teilmenge von M'', so ist M eine Teilmenge von M''.

Wir kommen zu den Eigenschaften der III. Art, deren Erklärung ein „es gibt" enthält. Nehmen wir da als Beispiel eine Eigenschaft von folgendem Bau. $C(ee')$ sei eine Relation, in welcher entweder e Zahl und e' Zahl oder e Folge und e' Zahl oder e Folge und e' Folge ist; e besitzt die Eigenschaft (C), besage: es gibt eine Funktion $f(e)$, so daß $C(e, f(e))$ besteht. Je nach den drei in Betracht kommenden Fällen wird diese Funktion natürlich eine functio discreta, mixta oder continua sein. Was bedeutet, wenn (C') eine Eigenschaft vom gleichen Bau ist, die Aussage: jedes Element e von der Eigenschaft (C) besitzt die Eigenschaft (C') oder: (C) ist Teilmenge von (C')? Offenbar dies: Es gibt ein Gesetz, das aus jeder Funktion f eine Funktion f' erzeugt, derart, daß, wenn $C(e, f(e))$ besteht, auch $C'(e, f'(e))$ stattfindet; das Erzeugungsgesetz selbst kann dabei noch von e abhängen. Nun kann von einem derartigen Gesetz aber nur die Rede sein, wenn f eine functio discreta ist; an Stelle der willkürlichen Funktion f tritt dabei die durch freie Wahlen werdende Folge. Nur solche Eigenschaften von der Art III also werden wir als Mengen ansprechen, in denen das „es gibt" in Verbindung mit „Folge", nicht aber mit functio mixta oder continua auftritt. Dieses ist somit die typische Form der Erklärungen von Mengen der III. Art: Es sei $E(e, n\nu)$ eine Beziehung von der Art I (Relation) oder eine solche Beziehung von der Art II, der eine Menge korrespondiert, d. h. bei deren Erklärung das „jeder" nur in Verbindung mit „Zahl", nicht mit „Folge" auftritt; e kann Zahl oder Folge bedeuten, n eine willkürliche Zahl, ν eine Folge. e besitzt die Eigenschaft (E) oder gehört der Menge (E) an, soll besagen: ***Es gibt*** eine Zahl n und eine Folge ν von der Art, daß die Beziehung $E(e; n\nu)$ stattfindet. Die allgemeine Formulierung des Teilmengenbegriffs für Mengen vom Typus I, II oder III bleibe dem Leser überlassen. Der Syllogismus erweist sich in allen Fällen als zu Recht bestehend.

Das sind die vom Identitätsprinzip gesteckten Grenzen, innerhalb deren auch umfangs-vage Eigenschaften von Zahlen oder Folgen als Mengen anzusprechen sind. Mengen aber von Funktionen und Mengen von Mengen wollen wir uns ganz aus dem Sinne schlagen. Kein Platz ist da in unserer Analysis für eine allgemeine Mengenlehre, so wenig wie für generelle Aussagen über Funktionen[3]).

Die neue Auffassung, sieht man, bringt sehr weitgehende Einschränkungen mit sich gegenüber der ins Vage hinausschwärmenden Allgemeinheit, an welche uns die bisherige Analysis in den letzten Jahrzehnten gewöhnt hat. Wir müssen von neuem Bescheidenheit lernen. Den Himmel wollten wir stürmen und haben nur Nebel auf Nebel getürmt, die niemanden tragen, der ernsthaft auf ihnen zu stehen versucht. Was haltbar bleibt, könnte auf den ersten Blick so geringfügig erscheinen, daß die Möglichkeit der Analysis überhaupt in Frage gestellt ist; dieser Pessimismus ist jedoch unbegründet, wie der nächste Abschnitt zeigen soll. Aber daran muß man mit aller Energie festhalten: *die Mathematik ist ganz und gar, sogar den logischen Formen nach, in denen sie sich bewegt, abhängig vom Wesen der natürlichen Zahl.*

In den hier gezogenen radikalen Konsequenzen stimme ich, soviel ich verstehe, nicht mehr ganz mit Brouwer überein. Beginnt er doch[4]) sogleich mit einer allgemeinen Funktionenlehre (unter dem Namen „Menge" tritt bei ihm auf, was ich hier als functio continua bezeichne), betrachtet Eigenschaften von Funktionen, Eigenschaften von Eigenschaften usf. und wendet auf sie das Identitätsprinzip an. (Mit vielen seiner Aussagen gelingt es mir nicht, einen Sinn zu verbinden.) Ich entlehne Brouwer 1. die

[3]) Ich will damit nicht sagen, daß allgemeine Aussagen über Mengen und Funktionen (mixtae et continuae) überhaupt unmöglich seien. So gilt gewiß für jede Folge ν und *jede f. m.* der Satz $f(\nu)+1=1+f(\nu)$. Aber ihre Allgemeinheit ist eine abgeleitete, durch formale Spezialisierung gewonnen aus der Allgemeinheit der Arithmetik und Analysis (im obigen Beispiel liegt die Gültigkeit der Gleichung $n+1=1+n$ für alle Zahlen n zugrunde); die Allgemeinheit der Arithmetik und Analysis ist hingegen eine wahrhaft originäre, sich stützend je auf ein eigenes anschauliches Fundament (vgl. S. 58) und darum auch von selbständigem anschaulichen Gehalt erfüllt. Man mag derartige Sätze über Funktionen und Mengen (vereinzelte Haltepunkte in einem völlig uferlosen Meer) zu einer besondern Disziplin unter dem Namen „Mengenlehre" vereinigen, aber sie ist keinesfalls das Fundament der Mathematik. — Analog kann man natürlich auch vereinzelte *besondere* Klassen von Zuordnungen zwischen functiones mixtae (oder continuae) stiften. Ist etwa φ eine gegebene f. d., so entsteht aus jeder $f(\nu)$ eine andere $f'(\nu)$ nach der Regel:

$$f'(\nu) \text{ für } \nu=\{n_1, n_2, n_3, \dots\} \text{ ist gleich } f(\nu') \text{ für } \nu'=\{\varphi(n_1), \varphi(n_2), \varphi(n_3), \dots\}.$$

Aber diese Zuordnung ist nur eine „Verkleidung" der Folge φ; wo gesagt wird: *es gibt* eine Zuordnung dieser Art, heißt das immer: es gibt eine Folge φ. Wir werden dafür sogleich Beispiele kennen lernen.

[4]) In der ersten der unter [1]) zitierten Abhandlungen über die „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom Satz vom ausgeschlossenen Dritten"

Grundlage, die in jeder Hinsicht das Wesentliche ist, nämlich die Idee der werdenden Folge und den Zweifel am principium tertii exclusi, 2. den Begriff der functio continua. Auf meine Rechnung kommen der Begriff der functio mixta und die Auffassung, welche ich in den folgenden drei Thesen zusammenfasse: 1. Der Begriff der Folge schwankt, je nach der logischen Verbindung, in welcher er auftritt, zwischen „Gesetz" und „Wahl", „Sein" und „Werden". 2. Die allgemeinen und Existentialsätze sind keine Urteile im eigentlichen Sinne, behaupten keinen Sachverhalt, sondern sind Urteilsanweisungen, bzw. Urteilsabstrakte. 3. Arithmetik und Analysis enthalten lediglich allgemeine Aussagen über Zahlen und frei werdende Folgen; keine allgemeine Funktionen- und Mengenlehre von selbständigem Inhalt!

Nachdem wir diese Rechenschafts-Ablegung über die logische Gestaltung der Wissenschaft vom Unendlichen beendet haben, ziehen wir im nächsten Abschnitt die Konsequenzen für das Kontinuumproblem.

4. Das Kontinuum.

Für den Begriff der reellen Zahl waren bisher in der Mathematik mehrere Erklärungen in Gebrauch, deren Äquivalenz man glaubte beweisen zu können. Von dem Standpunkt aus, den wir jetzt einnehmen, erscheinen diese Definitionen aber nicht mehr als äquivalent, und man überzeugt sich leicht, daß nicht der Dedekindsche Schnitt, sondern die in diesem II. Teil am Beginn zugrunde gelegte Definition jetzt die einzig mögliche bleibt (von der man wohl sagen darf, daß sie auch an sich das Wesen der reellen Zahl am reinsten ausspricht).

Die Dualintervalle unterschieden wir oben voneinander durch Angabe zweier ganzzahliger Charaktere $[m; h]$. Man kann sie leicht durch einen einzigen Charakter, der eine natürliche Zahl ist, ersetzen, wenn man nach irgendeinem bestimmten einfachen Gesetz die Paare ganzer Zahlen in eine abgezählte Reihe ordnet. Ferner können wir, wenn i irgendein Dualintervall ist, die in seinem Innern gelegenen Dualintervalle in natürlicher Weise in eine abgezählte Reihe ordnen. Ist i von h-ter Stufe, so setzen wir an erste Stelle das einzige, ganz im Innern von i gelegene Dualintervall der $(h+1)$-ten Stufe, darauf die 5 Intervalle der $(h+2)$-ten Stufe dieser Art, wie sie sich von links nach rechts auf der Zahlgeraden folgen, darauf die 13 Intervalle der $(h+3)$-ten Stufe usf. Man weiß sonach, was es heißt, wenn von „dem n-ten" der innerhalb i gelegenen Dualintervalle die Rede ist. Eine reelle Zahl ist bestimmt durch ein Gesetz, das aus jeder natürlichen Zahl n ein Dualintervall $i^{(n)}$ erzeugt, so zwar, daß immer $i^{(n+1)}$ innerhalb $i^{(n)}$ gelegen ist. Wollen wir uns hier von der Einschachtelungs-Bedingung unabhängig machen, so ersetzen wir die Angabe des $(n+1)$-ten Intervalls $i^{(n+1)}$ durch Angabe seiner Ordnungsnummer unter den innerhalb $i^{(n)}$ gelegenen Dualintervallen; die reelle Zahl ist dann bestimmt durch Angabe des ersten Intervalls i und durch diese Folge der Ordnungsnummern, d. i. ein Gesetz, das aus jeder natürlichen Zahl n eine natürliche Zahl n_* erzeugt. Die Intervallfolge hebt an mit $i' = i$, darauf folgt das (1_*)-te der innerhalb i' gelegene Dualintervalle, i'', darauf das (2_*)-te innerhalb i'' gelegene, i''', usf. Die „beliebige reelle Zahl", die „reelle Variable" ist repräsentiert durch eine werdende Folge von Dualintervallen, wobei die Intervalle sukzessive frei gewählt werden unter der einen Einschränkung, daß bei jedem folgenden Schritt ein innerhalb des zuletzt gewählten gelegenes Intervall ausgesucht werden muß. Will man diese an eine Vorschrift gebundene Wahl durch eine völlig freie ersetzen, so muß man nicht die Intervalle, sondern statt ihrer wie oben die Ordnungsnummern wählen. — Unter *Intervallfolge* ist von jetzt ab immer eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle zu verstehen.

Zwei reelle Zahlen α, β *fallen zusammen*, wenn allgemein $i_\alpha^{(n)}$, das n-te Intervall der Folge α, und das n-te Intervall der Folge β sich ganz oder teilweise überdecken; sie *liegen getrennt*, wenn eine natürliche Zahl n existiert, so daß $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\beta^{(n)}$ völlig getrennt liegen. Diese beiden Möglichkeiten bilden keine vollständige Alternative; ist doch keine von beiden eine definite Beziehung zwischen den willkürlichen reellen Zahlen α und β. Das ist dem Charakter des anschaulichen Kontinuums völlig angemessen; denn in ihm geht das Getrenntsein zweier Stellen beim Zusammenrücken sozusagen graduell, in vagen Abstufungen, über in die Ununterscheidbarkeit. Wohl aber gilt der Satz: Fällt α mit β zusammen und β mit γ, so fällt auch α mit γ zusammen. Zwar brauchen ja von drei Intervallen $i_\alpha^{(n)}$, $i_\beta^{(n)}$, $i_\gamma^{(n)}$, deren beide erste und deren beide letzte übereinandergreifen, das erste und dritte nicht sich zu überdecken. Tritt das hier aber an einer bestimmten Stelle n unserer Intervallfolgen ein, so müßten im weiteren Fortgang ihrer Entwicklung entweder die Intervallfolgen α und β oder die Folgen β und γ sich voneinander trennen. Unser Satz behauptet, explizite ausgesprochen: Es gibt eine von der natürlichen Zahl n abhängige Funktion $f(n; \alpha\beta\gamma)$ von drei werdenden Wahlfolgen $\alpha\beta\gamma$, welche aus den Argumenten allemal dann eine bestimmte natürliche Zahl m erzeugt, wenn $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\beta^{(n)}$ einerseits, $i_\beta^{(n)}$ und $i_\gamma^{(n)}$ anderseits sich überdecken, $i_\alpha^{(n)}$ und $i_\gamma^{(n)}$ aber getrennt liegen, und zwar so, daß folgendes gilt: Wie auch die Intervallfolgen α, β, γ über die n-te Stelle hinaus sich entwickeln mögen, an m-ter Stelle sind entweder $i_\alpha^{(m)}$ und $i_\beta^{(m)}$ getrennt oder $i_\beta^{(m)}$ und $i_\gamma^{(m)}$. Die Konstruktion dieser Funktion f ist natürlich sehr einfach. Der in Frage stehende Satz beruht, wie man zugleich erkennt, nicht darauf, daß α, β, γ „Näherungszahlen" sind, sondern daß die Annäherung *über jede Grenze* getrieben werden kann. Insofern dies für ein anschaulich gegebenes Kontinuum nicht der Fall ist (man denke etwa an das bekannte Beispiel der Lokalisation von Druckempfindungen, welche durch Berührung der Handfläche mit den beiden Spitzen eines Zirkels hervorgerufen werden), kommt in der „Transitivität" des Zusammenfallens die an der Wirklichkeit vorgenommene ***mathematische Idealisierung*** zum Ausdruck. Das Kontinuum erscheint hier als ein nach innen hinein ins Unendliche werdendes. In der anschaulich gegebenen Wirklichkeit ist der Werdeprozeß nur bis zu einem gewissen Punkte gediehen (denn das Gegebene *ist*, es *wird* nicht) und mündet darüber hinaus graduell in völlige Ungeschiedenheit; in der Mathematik hingegen betrachten wir ihn als einen ins Unendliche fortgehenden. ***Auf jeden Fall aber ist es unsinnig, das Kontinuum als ein Fertig-Seiendes zu betrachten.*** Man kann darum allen Ernstes behaupten (und muß es sogar), daß das Gegenwärtige nicht etwas in sich fertig Bestimmtes ist, sondern selbst noch nach innen hinein *wird*, indem es sich in der Zukunft entfaltet; erst „am Ende aller Zeiten" sozusagen ist jedes Stück der Weltwirklichkeit, auch das von mir jetzt durchlebte, in sich präzise bestimmt. Dieser Umstand erscheint mir sehr wichtig für die Abschätzung der metaphysischen Bedeutung der Naturkausalität; jedoch ist hier nicht der Ort, darauf einzugehen.

Greifen wir auf der Zahlgeraden C, dem Variabilitätsgebiet einer reellen Variablen x, einen bestimmten Punkt heraus, z. B. $x = 0$, so kann man, wie wir sahen, keinesfalls behaupten, daß jeder Punkt entweder mit ihm zusammenfällt oder von ihm getrennt liegt. Der Punkt $x = 0$ zerlegt also das Kontinuum C durchaus nicht in zwei Teile $C^- : x < 0$ und $C^+ : x > 0$, in dem Sinne, daß C aus der Vereinigung von C^-, C^+ und dem einen Punkte 0 bestünde (jeder Punkt entweder mit 0 zusammenfiele oder zu C^- oder zu C^+ gehörte). Erscheint dies dem heutigen Mathematiker mit seiner atomistischen Denkgewöhnung anstößig, so war es in früheren Zeiten eine allen selbstverständliche Ansicht: innerhalb eines Kontinuums lassen sich wohl durch Grenzsetzung Teilkontinuen erzeugen; es ist aber unvernünftig, zu behaupten, daß das totale Kontinuum aus der Grenze und jenen Teilkontinuen zusammengesetzt sei. *Ein wahrhaftes Kontinuum* ist eben ein in sich Zusammenhängendes und *kann nicht in getrennte Bruchstücke aufgeteilt werden*; das widerstreitet seinem Wesen. C^+ ist ein Kontinuum in dem gleichen Sinne wie C: Medium freien Werdens; auch bei seiner mathematischen Erfassung müssen wir daher nicht von den Punkten, sondern von den Intervallen ausgehen. Ihm liegt zugrunde das System Σ^+ derjenigen Dualintervalle, deren erste Charakteristik m positiv ist. Ein Gesetz, das aus jeder natürlichen Zahl ein Intervall dieses Systems erzeugt, und zwar so, daß die Intervalle der Folge ineinander eingeschachtelt sind, liefert eine bestimmte Zahl im Kontinuum C^+; Wahlakte, welche an das System Σ^+ und die Einschachtelungsbedingung gebunden, im übrigen aber frei sind, erzeugen eine werdende Folge, welche „die im Bereich C^+ sich bewegende Variable“ darstellt. Man wird hier gewahr, daß „Punktmengen“, welche als Variabilitätsgebiet für Funktionsargumente in Betracht kommen, immer nur Verkleidungen von „Intervallmengen“, genauer von definiten Intervallmengen sein können. Nur über derartige Punktmengen ist aber auch eine allgemeine Theorie innerhalb der Analysis möglich, da sie unter die Rubrik der functiones discretae fallen. Neben dem System Σ^+ trat oben das System Σ^- der Dualintervalle auf, deren erste Charakteristik $m < 0$ ist, und drittens das System Σ^0 der durch $m = 0$ charakterisierten Dualintervalle. Σ^+, Σ^-, Σ^0 bestimmen bzw. das Kontinuum der „rechts von 0 gelegenen“, der „links von 0 gelegenen“ und der „mit 0 zusammenfallenden“ Punkte.

Betrachten wir jetzt eine der gewöhnlichen, auf eine reelle Variable x anzuwendenden Operationen, z. B. x^2. — Aus mehreren Dualbrüchen $a, a', \ldots$ in endlicher Anzahl kann man leicht das einzige Dualintervall höchster Stufe konstruieren, welches jene Dualbrüche alle enthält; dies Intervall bezeichnen wir mit $(a, a', \ldots)$. Sind

$$a = \frac{m-1}{2^h}, \quad a' = \frac{m+1}{2^h}$$

die Endpunkte eines Intervalls i, so liegen die Quadrate aller Dualbrüche, welche in das Intervall i hineinfallen, ihrerseits in dem Intervall

$$i^2 = (a^2, aa', a'^2).$$

Ist eine reelle Zahl α gegeben durch eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle, so erhält man die Zahl α^2, indem man von jedem Intervall i der Folge das „Quadratintervall“ i^2 bildet. Die Entstehung von α^2 aus α beruht also nicht auf der Zuordnung von *Intervallfolgen*, sondern einfach auf der Zuordnung von *Intervallen*: es handelt sich um das Gesetz, das aus jedem Intervall i das Intervall i^2 erzeugt; dies Gesetz nennen wir „die Funktion x^2“. Läßt man eine Folge ineinander eingeschachtelter Dualintervalle i durch freie Wahl Schritt für Schritt entstehen, so entspricht ihr nach diesem Gesetz eine werdende Folge von gleichfalls ineinander eingeschachtelten Intervallen i^2. In ähnlicher Weise erklären wir die Funktion $x \cdot y$ (die Operation der *Multiplikation*) im Gebiet von zwei Variablen x, y. Diesem Variabilitätsgebiet liegt zugrunde das System der durch drei ganzzahlige Charakteristiken $m, n; h$ voneinander zu unterscheidenden „Dualquadrate“ mit den Eckpunkten

$$x = \frac{m \pm 1}{2^h}, \quad y = \frac{n \pm 1}{2^h}.$$

Setzen wir

$$a = \frac{m-1}{2^h}, \quad a' = \frac{m+1}{2^h}; \qquad b = \frac{n-1}{2^h}, \quad b' = \frac{n+1}{2^h},$$

so erzeuge man aus diesem Quadrat J das Intervall

$$\pi(J) = (ab, a'b, ab', a'b').$$

Dieses Gesetz π ist die Funktion $x \cdot y$; durchläuft J eine werdende Folge ineinander eingeschachtelter Quadrate, so $\pi(J)$ eine werdende Folge ineinander eingeschachtelter Intervalle.

Interpretieren wir endlich noch die im Gebiete zweier Variablen x, y gültige Identität

$$(*) \qquad (x+y)(x-y) = x^2 - y^2.$$

Ein Paar Dualbrüche a, b nennen wir „den Schnittpunkt von a mit b". Sind $a, a', \ldots$ mehrere (z. B. drei) gegebene Dualbrüche und ist daneben noch eine zweite Reihe von endlichvielen (z. B. vier) Dualbrüchen $b, b', \ldots$ gegeben, so können wir das kleinste Dualquadrat bilden, das die sämtlichen $(3 \cdot 4)$ Schnittpunkte von $a, a', \ldots$ mit $b, b', \ldots$ enthält:

$$J = (aa' \ldots \; bb' \ldots).$$

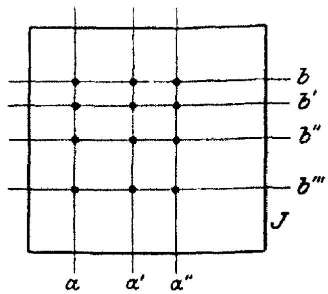

Fig. 2.

Die Funktion

$$x' = x + y, \quad y' = x - y$$

ist das Gesetz, welches aus jedem Dualquadrat J, dessen Ecken die Schnittpunkte von a, a' mit b, b' sind, das Quadrat

$$J' = (a+b, a'+b, a+b', a'+b' \mid a-b, a'-b, a-b', a'-b')$$

erzeugt; aus ihm werde das Intervall i gebildet nach dem Gesetz $x' \cdot y'$ (das eben mit π bezeichnet wurde). Damit ist die linke Seite von $(*)$ konstruiert. Analog rechts: Man bildet aus J zunächst das Quadrat

$$J^2 = (a^2, aa', a'^2 \mid b^2, bb', b'^2)$$

[das ist die Funktion $x'' = x^2$, $y'' = y^2$] und daraus das Intervall $\bar{i}$ nach dem Gesetze $x'' - y''$. Die Gleichung $(*)$ behauptet, daß, welches auch das Dualquadrat J sein mag, *i und $\bar{i}$ sich stets überdecken.*

Die angeführten Beispiele legen uns den allgemeinen Begriff der *stetigen Funktion* einer reellen Veränderlichen nahe. Eine solche Funktion wird bestimmt nicht durch ein beliebiges Gesetz, das einer werdenden Intervall*folge* eine werdende Intervallfolge zuordnet, sondern durch ein Gesetz, nach welchem einfach jedes Dual*intervall* (sobald es einmal hinreichend klein geworden ist) ein Intervall erzeugt. Das entspricht auch vollkommen dem Sinn, wie dieser Begriff in den Anwendungen der Mathematik gebraucht wird: sobald das Argument *mit einem gewissen Grad der Genauigkeit* gegeben ist — und anders ist es in den Anwendungen ja nie gegeben —, ist auch der Funktionswert mit einem zugehörigen Grad von Genauigkeit bekannt. Der letztere sinkt mit dem ersteren unter jede Grenze (wenn die Funktion in einem beschränkten Intervall betrachtet wird). Die stetigen Funktionen sind demnach nur verkleidete „functiones discretae"; und nur darum kann die Analysis eine allgemeine Theorie über sie aufstellen. Eine stetige Funktion, erklären wir, ist bestimmt durch ein Gesetz φ, das aus jedem Dualintervall i entweder nichts oder ein ebensolches Intervall, $\varphi(i)$, erzeugt. Es gehört ferner dazu ein Gesetz, aus jedem Intervall i eine natürliche Zahl n_i erzeugend, von folgender Art: Ist i irgendein Dualintervall, n eine natürliche Zahl $\geqq n_i$, so erzeugt das n-te derjenigen Dualintervalle, welche im Innern von i gelegen sind, nach dem Gesetz φ bestimmt ein Intervall (und nicht nichts), das überdies im Innern von $\varphi(i)$ liegt, falls $\varphi(i)$ existiert. — Die Einschachtelungsbedingung hat zur Folge, daß zwei übereinandergreifenden Intervallen i, i' stets zwei übereinandergreifende Intervalle $\varphi(i)$, $\varphi(i')$ entsprechen; denn nach dieser Bedingung kann man stets ein im Innern beider Intervalle i, i' enthaltenes Dualintervall $\bar{i}$ konstruieren, dessen Bild $\varphi(\bar{i})$ existiert und im Innern sowohl von $\varphi(i)$ wie $\varphi(i')$ liegt. Ist α eine einzelne reelle Zahl, d. i. eine durch ein Gesetz ins Unendliche hinaus bestimmte Schachtelfolge von Intervallen $i, i', i'', \ldots$, so bilden wir die Folge $\varphi(i), \varphi(i'), \varphi(i''), \ldots$; aus ihr fallen natürlich die nicht-existierenden Bildintervalle heraus, außerdem aber streichen wir in ihr auch ein Intervall, falls es nicht im Innern des nächstvorhergehenden enthalten ist; wegen der zu jedem Intervall i gehörigen Zahl n_i bleibt dabei doch eine unendliche Folge stehen. Die so präparierte Bildfolge ist also wiederum eine reelle Zahl $\beta = \varphi(\alpha)$: der *Wert* der stetigen Funktion für den Argumentwert α. Fallen die beiden reellen Zahlen α und α' zusammen, so fallen auch die zugehörigen Funktionswerte β und β' zusammen. — Zwei stetige Funktionen stimmen überein, wenn sie durch Gesetze bestimmt sind, die jedem Dualintervall zwei übereinandergreifende Intervalle zuordnen[5]).

Wie man sieht, kann man den Begriff der stetigen Funktion in einem beschränkten Intervall nicht erklären, ohne die *gleichmäßige Stetigkeit* und die *Beschränktheit* sogleich in die Definition mit aufzunehmen. Vor allem aber *kann es gar keine andern Funktionen in einem Kontinuum geben als stetige Funktionen*. Wenn die alte Analysis die Bildung unstetiger

[5]) Von der *einzelnen bestimmten* stetigen Funktion war hier die Rede. Die allgemeinen Sätze über sie handeln aber von dem Kontinuum, in das sie sich einbetten: der (als einer werdenden zu betrachtenden) *willkürlichen* stetigen Funktion. Das nähere Eingehen auf diesen Begriff würde uns hier zu weit führen.

Funktionen ermöglichte, so bekundet sie damit am deutlichsten, wie weit sie von der Erfassung des Wesens des Kontinuums entfernt ist. Was man heute eine unstetige Funktion nennt, besteht in Wahrheit (und auch das ist im Grunde nur eine Rückkehr zu älteren Anschauungen) aus *mehreren* Funktionen in getrennten Kontinua. Wir fassen z. B. die oben eingeführten Kontinua C, C^+ ($x > 0$) und C^- ($x < 0$) ins Auge. Die Funktion $f_1(x) = x$ in C^+ ist das Gesetz, das jedem Dualintervall, dessen beide Endpunkte positiv sind, dies Intervall selbst zuordnet. Die Funktion $f_2(x) = -x$ in C^- ist das Gesetz, das jedem Dualintervall i, dessen beide Endpunkte a, a' negativ sind, das Intervall $-i = (-a', -a)$ zuordnet. Zu diesen beiden Funktionen existiert eine einzige Funktion $|x|$ in ganz C, welche in C^+ mit f_1, in C^- mit f_2 übereinstimmt; sie ordnet einem Dualintervall i das Intervall i zu, falls beide Endpunkte von i positiv sind, $-i$, falls beide Endpunkte negativ sind, einem Intervall i mit den Endpunkten $a\,a'$ aber, das den Nullpunkt enthält, das Intervall $(-a', \; a, a, a')$. Betrachten wir hingegen die beiden Funktionen $+1$ in C^+, -1 in C^-, so existiert zu ihnen *keine* in ganz C definierte Funktion, welche in C^+ mit der einen, in C^- mit der andern übereinstimmte.

Der bisherigen Analysis erschien das Kontinuum als die Menge seiner Punkte; sie sah in ihm nur einen Spezialfall des logischen Grundverhältnisses von *Element und Menge*. Wem wäre es nicht schon aufgefallen, daß das ebenso fundamentale Verhältnis von *Ganzem und Teil* bislang in der Mathematik überhaupt keine Stelle hatte? *Daß es Teile hat*, ist aber die Grundeigenschaft des Kontinuums; und so macht die Brouwersche Theorie (im Einklang mit der Anschauung, gegen welche der heutige „Atomismus" so arg verstößt) dieses Verhältnis zur Grundlage für die mathematische Behandlung des Kontinuums. Darin liegt der eigentliche Grund für das im vorhergehenden (bei der Abgrenzung von Teilkontinuen sowohl wie bei der Bildung stetiger Funktionen) eingeschlagene Verfahren, das nicht von den *Punkten*, sondern den *Intervallen* als den primären Konstruktionselementen ausgeht. — Freilich: auch eine Menge besitzt Teile. Was sie aber im Reich des „Teilbaren" auszeichnet, ist die Existenz der „Elemente" im mengentheoretischen Sinne, d. h. von *Teilen, welche selbst keine Teile mehr enthalten*; und zwar ist in jedem Teil mindestens ein „Element" enthalten. Hingegen gehört es zum Wesen des Kontinuums, daß *jedes seiner Teile sich unbegrenzt weiter teilen läßt*; der Begriff des Punktes muß als Grenzidee betrachtet werden, „Punkt" ist die Vorstellung der *Grenze* einer ins Unendliche fortgesetzten Teilung. — Um den stetigen Zusammenhang der Punkte wiederzugeben, nahm die bisherige Analysis, da sie ja das Kontinuum in eine Menge isolierter Punkte zerschlagen hatte, ihre Zuflucht zu dem *Umgebungs*begriff. Aber da in der daraus hervorgehenden Allgemeinheit der Begriff der stetigen Mannigfaltigkeit mathematisch unfruchtbar blieb, mußte hernach als einschränkende Bedingung die Möglichkeit der „Triangulation" hinzugefügt werden[6]). Im Gegensatz zu diesem Aufbau erschienen in den kurzen Erklärungen, welche Brouwer seinen bekannten Beweisen der grundlegenden Sätze der Analysis situs vorausschickte[7]), schon deutlich die einfach zusammenhängenden Stücke, aus denen die Mannigfaltigkeit zusammengesetzt wird, als die ursprünglich gegebenen Bausteine. Die neue Analysis läßt nur diesen Weg offen.

Deuten wir kurz an, wie sich danach die mathematische Definition des Begriffes der *zweidimensionalen geschlossenen Mannigfaltigkeit* gestaltet. Zunächst ist das Schema ihres *topologischen Aufbaues* anzugeben, das ich als ein „zweidimensionales Gerüst" bezeichne. Es besteht aus endlichvielen „Ecken" e_0 (Elementen 0-ter Stufe), „Kanten" e_1 (Elementen 1. Stufe), „Flächenstücken" e_2 (Elementen 2. Stufe), die durch irgendwelche Symbole gekennzeichnet werden mögen. Jedes Flächenstück wird von gewissen Kanten, jede Kante von gewissen Ecken „begrenzt"; die Angaben darüber bilden den wesentlichen Inhalt des Schemas. Es muß gewissen leicht zu formulierenden Forderungen genügen. — Von den Flächenstücken des Gerüstes gelangt man zu den Punkten der Mannigfaltigkeit durch einen unendlich oft zu wiederholenden *Teilungsprozeß*. Diesen wollen wir so vornehmen, daß wir jede Kante durch einen ihrer Punkte in zwei Kanten zerlegen, darauf jedes Flächenstück von einem willkürlich in ihm gewählten Zentrum aus durch Linien nach den auf seiner Begrenzung gelegenen Ecken in Teildreiecke zerlegen. Diesen Vorgang kann man in abstracto so beschreiben: Jedem Element e_i des ursprünglichen Gerüstes G entspricht ein Element 0-ter Stufe $(e_i)'_0$ des durch Teilung entstehenden Gerüstes G'; zwei Elemente e_i, e_k $(i > k)$ des ursprünglichen Gerüstes, von denen das eine das andere begrenzt, erzeugen ein Element 1. Stufe $(e_i e_k)'_1$ des neuen Gerüstes G', das begrenzt wird von $(e_i)'_0$ und $(e_k)'_0$; drei Elemente $e_2\, e_1\, e_0$ von G, die einander begrenzen, ein von $(e_2\, e_1)'_1$, $(e_2\, e_0)'_1$, $(e_1\, e_0)'_1$ begrenztes Element 2. Stufe $(e_2\, e_1\, e_0)'_2$ von G'. — Die Flächenstücke von G und die durch sukzessive Teilungen entstehenden Flächenstücke von $G', G'', \ldots$ spielen hier die gleiche Rolle wie diejenigen Intervalle im Linearkontinuum, in welche dasselbe durch die Dualbrüche von der Form $\frac{m}{2}, \frac{m}{2^2}, \frac{m}{2^3}, \ldots$

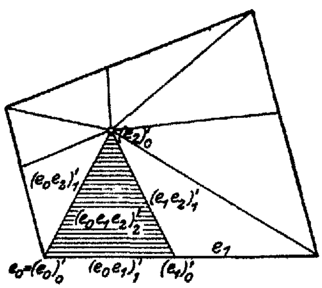

Fig. 3.

[6]) Siehe z. B. Weyl, Die Idee der Riemannschen Fläche (Leipzig 1913), § 4.

[7]) Siehe vor allem Math. Ann., 71 (1912), S. 97.

(m durchläuft alle ganzen Zahlen) zerlegt wird. Je zwei aneinanderstoßende von ihnen fügten wir zu einem „Dualintervall“ zusammen, um auf jeder Teilungsstufe eine Bedeckung des Linearkontinuums durch übereinandergreifende Stücke zu bekommen. Analog fassen wir hier diejenigen Flächenstücke eines der durch Teilung entstandenen Gerüste $G, G', G'', \ldots$, welche von einem gemeinsamen Eckpunkt begrenzt werden, zu einem „Stern“ zusammen. Unter einem *Punkt der Mannigfaltigkeit* ist eine unendliche Folge solcher Sterne zu verstehen, in welcher jeder Stern ganz im Innern des nächstvorhergehenden enthalten ist; der Sinn dieser Einschachtelungsbedingung zwischen zwei Sternen ist leicht zu formulieren.

Eine offene Mannigfaltigkeit unterscheidet sich von einer geschlossenen nur darin, daß das zugrunde liegende Gerüst nicht aus endlichvielen, sondern einer unendlichen Folge von Elementen besteht. Das früher ausführlich betrachtete Linearkontinuum fällt unter diesen Begriff, sofern wir als Dualintervalle allein die Intervalle $\left(\frac{m-1}{2^h}, \frac{m+1}{2^h}\right)$ mit einer *positiven* Charakteristik h gelten lassen. Diese Modifikation kann an allen unseren bisherigen Entwicklungen ohne weiteres angebracht werden. Der Begriff der stetigen Funktion ist gleich so gefaßt worden, daß er sich auf beliebige Mannigfaltigkeiten übertragen läßt: Eine stetige Abbildung einer Mannigfaltigkeit auf eine andere wird bestimmt durch ein Gesetz, das jedem Stern der ersten entweder nichts oder einen Stern der zweiten zuordnet, es kommt hinzu die gleiche Einschachtelungs-Bedingung wie früher. Hier ist es wirklich wesentlich, daß die Alternative des „nichts“ offen gelassen wird, da ja das Bildgebiet eines Sternes der ersten Mannigfaltigkeit nicht in einem einzigen Stern der zweiten Platz zu finden braucht.

Sobald man es mit einer in irgendeinem Kontinuum sich bewegenden Variablen zu tun hat, muß man sich, der neuen Theorie gemäß operierend, über dem Kontinuum sozusagen in der Schwebe halten und hat nicht wie bisher die Möglichkeit, sich auf einem einzelnen, wenn auch willkürlichen Punkte niederzulassen. Dem an das letzte Verfahren Gewöhnten mag solche Zumutung zunächst unbequem erscheinen; aber jeder wird spüren, wie treu auch hierin die neue Analysis dem anschaulichen Charakter des Kontinuums sich anpaßt. Die Brouwersche Auffassung verbindet höchste intuitive *Klarheit* mit *Freiheit*. Wer immer sich im abstrakten Formalismus der Mathematik noch einigen Sinn für anschauliche Gegebenheiten erhalten hat, auf den muß sie wirken wie eine Erlösung von bösem Albdruck. Endlich sei noch darauf hingewiesen, wie vollkommen beide Teile der neuen Lehre, die *anschauliche* Angepaßtheit ans Kontinuum und ihre *logische* Stellungnahme zu den generellen und den Existentialsätzen, sich gegenseitig fordernd, ineinandergreifen.

(Eingegangen am 9. Mai 1920.)