Über die Partitionen der ganzen Zahlen.

Von

Georg Csorba in Miskolcz (Ungarn).

Die additive Darstellung der ganzen Zahlen, d. h. die Zerlegung derselben in Summanden, ist ein nicht weniger wichtiges Kapitel der Zahlentheorie, als die multiplikative Darstellung, d. h. die Zerlegung in Faktoren. Die Frage der additiven Darstellung ist aber nur in sehr geringem Maße entwickelt, obgleich sie vermöge der analytischen Methode, welche man in der Behandlung derselben seit Euler anwendet, einen interessanten Teil der analytischen Zahlentheorie bildet. Euler hat diese Fragen mit dem Namen „Partitio numerorum" bezeichnet.*) Die Partitio numerorum hat eine wichtige Anwendung in der Invariantentheorie gefunden, wo die Cayley-Sylvestersche Arbeitsrichtung die Beschäftigung mit der Frage direkt erforderte**). Später hat man auch die Theorie der symmetrischen Funktionen mit der Anwendung der Partitionen entwickelt.***) Eine gewisse Rolle spielt endlich die Theorie der Partitionen und der damit zusammenhängenden diophantischen Gleichungen in invariantentheoretischen Arbeiten von Gordan und von Hilbert.

Sämtliche unter dem Namen „Partitio numerorum" behandelte Fragen kann man auf einen einzigen gemeinsamen Typus reduzieren, so daß es genügt, sich mit diesem einzigen zu beschäftigen. Dieser Typus ist der folgende:

Auf wie vielerlei Art kann man die Zahl A aus den Zahlen

$$a_1, a_2, \cdots, a_n$$

durch Additionen mit Wiederholungen darstellen? Diese Frage stimmt mit der überein, wieviele *Auflösungen die unbestimmte Gleichung*

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = A$$

*) Euler: „Introductio in analysin infinitorum", Caput 16.

**) Cayley: „Researches on the Partition of Numbers", Phil. Trans. 145, 1855. Sylvester: „On the Partition of Numbers", Quarterly J. M. I, 1855.

***) Mac Mahon: „Memoir on a New Theorie of Symmetric Functions", Americ. Journal of Mathem. 11, 1889.

in nicht negativen ganzen Zahlen hat? Die fragliche Zahl ist außerdem nichts anderes als der Koeffizient der Potzenz von z^A in der *Entwicklung der gebrochenen Funktion:*

$$\frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\cdots(1-z^{a_n})}$$

nach zunehmenden Potenzen von z. Diese Aufgabe ist, obgleich sich mit derselben viele beschäftigten, im allgemeinen noch nicht gelöst. In der Untersuchung derselben ist am weitesten Cayley gekommen. Seine Resultate enthalten schon die Bestimmung, daß die obige Zahl der Partitionen in folgender Form darzustellen ist:

$$\varphi(A) = c_0(A) + c_1(A)A^1 + c_2(A)A^2 + \cdots + c_{n-1}(A)A^{n-1},$$

wo die Koeffizienten

$$c_i(A) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

die periodischen zahlentheoretischen Funktionen des A sind. Aber die Resultate Cayleys enthalten im wesentlichen nicht mehr als den Nachweis der *Möglichkeit* einer solchen Darstellung. Einen weiteren, erfolgreichen Schritt in der Behandlung dieser Frage finden wir nirgends in der wissenschaftlichen Fachliteratur. Einzig und allein die Untersuchungen Weihrauchs*) könnten hier erwähnt werden, die aber nur die partiellen Auflösungen einiger einfachen und speziellen Fälle enthalten.

Das Ziel der gegenwärtigen Abhandlung ist: Die Darstellung der independenten Formel im allgemeinsten Falle für die periodischen Funktionen $c(A)$ und damit die Frage der „Partitio numerorum" bedeutend zu befördern.

I.

Es sei die entwickelte Form der erzeugenden Funktion:

$$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{a_i})} = \varphi(0) + \varphi(1)z^1 + \varphi(2)z^2 + \cdots + \varphi(A)z^A + \cdots,$$

so ist die Zahl der Partitionen von A:

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \frac{1}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{a_i})}. \tag{1}$$

Bedeute λ irgendwelches gemeinsame Vielfache der Zahlen

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

*) „Die Anzahl der Lösungen diophantischer Gleichungen bei teilerfremden Koeffizienten", Zeitschrift f. Math. u. Phys. 20. „Anzahl der Lösungen für die allgemeine Gleichung ersten Grades mit vier Unbekannten", ebenda 22.

so wird

$$\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}} = 1 + z^{a_i} + z^{2a_i} + \cdots + z^{\left(\frac{\lambda}{a_i}-1\right)a_i},$$

und das Produkt:

$$U(z) \equiv \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}\right) \tag{2}$$

ein ganzer Ausdruck, welchen man bezeichnen kann:

$$U(z) = \sum_{M=0}^{n\lambda-1} F(M)\, z^M,$$

oder (wenn man statt M das Binom $(\nu + k\lambda)$ einführt, wo $\nu < \lambda$)

$$U(z) = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda)\, z^{\nu+k\lambda}. \tag{3}$$

Multiplizieren wir den Zähler des rationalen Bruches (1) mit der entwickelten Form (3) von $U(z)$, den Nenner mit der unentwickelten Form (2) desselben, so wird

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \frac{\sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda) z^{\nu+k\lambda}}{\prod_{i=1}^{n}(1-z^{\lambda})}. \tag{4}$$

Damit haben wir die Aufgabe auf die Entwicklung einer solchen rationalen gebrochenen Funktion reduziert, wo die Faktoren des Nenners untereinander gleich sind, und deren Auflösung schon bekannt ist.

Nämlich

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{1-z^{\lambda}}\right) = \frac{1}{(1-z^{\lambda})^n} = \sum_{R=0}^{\infty} \binom{R+n-1}{n-1} z^{\lambda R}.$$

Infolgedessen

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda)\, z^{\nu+k\lambda} \sum_{R=0}^{\infty} \binom{R+n-1}{n-1} z^{\lambda R},$$

oder bei Ausführung der Multiplikation:

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{R=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda) \binom{R+n-1}{n-1} z^{\nu+\lambda(k+R)}.$$

Es sei $k + R = S$, so wird

$$\varphi(A) = \text{coeff } z^A \text{ in } \sum_{S=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda) \binom{S-k+n-1}{n-1}\right] z^{\nu+\lambda S},$$

wo immer

$$S - k \geqq 0$$

ist; wenn also $S < n$ ist, so werden die Werte von k:

$$0, 1, 2, \cdots, S.$$

Es sei

$$A = \nu + \lambda S \qquad (\nu < \lambda).$$

Im Falle $A > n\lambda$ wird

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda) \binom{\frac{A-(\nu+k\lambda)}{\lambda} + n - 1}{n-1}, \tag{5}$$

und im Falle $A < n\lambda$ wird:

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{\frac{A-\nu}{\lambda}} F(\nu + k\lambda) \binom{\frac{A-(\nu+k\lambda)}{\lambda} + n - 1}{n-1}, \tag{6}$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda).$$

Das hier vorkommende Zeichen

$$\binom{T+n-1}{n-1}$$

bedeutet nach der Entwicklung einen solchen Ausdruck in T:

$$\binom{T+n-1}{n-1} = \frac{1}{(n-1)!} \{\alpha_0 T^{n-1} + \alpha_1 T^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-2} T^1 + \alpha_{n-1}\},$$

wo α_i im allgemeinen die symmetrische Funktion i^{ten} Grades bedeutet, welche man aus den Elementen

$$1, 2, 3, \cdots, n-1$$

komponieren kann.

Demzufolge ist:

$$\binom{\frac{A+(\nu+k\lambda)}{\lambda} + n - 1}{n-1} = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \frac{(A-(\nu+k\lambda))^m}{\lambda^m}$$

$$= \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}(\nu+k\lambda)^s}{\lambda^m}.$$

Wenn man das in den Ausdruck (5) substituiert, so wird

$$\varphi(A) = \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda) \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}(\nu+k\lambda)^s}{\lambda^m}.$$

Mit einer anderen Anordnung der Glieder:

$$\varphi(A) = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!} \binom{m}{s} \frac{A^{m-s}}{\lambda^m} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu+k\lambda)(\nu+k\lambda)^s \right\}.$$

Es sei hier

(7) $$\sum_{k=0}^{n-1}(\nu+k\lambda)^s F(\nu+k\lambda)=G_s(\lambda,\nu),$$

so wird

$$\varphi(A)=\sum_{m=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!}\binom{m}{s}G_s(\lambda;\nu)\frac{A^{m-s}}{\lambda^m},$$

oder mit einer anderen Anordnung:

$$\varphi(A)=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{m=s}^{n-1}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-m}}{(n-1)!}\binom{m}{s}G_s(\lambda,\nu)\frac{A^{m-s}}{\lambda^m}\cdot$$

Führen wir nun die Substitution

$$m-s=t$$

ein, so wird:

$$\varphi(A)=\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{t=0}^{n-1-s}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!}\binom{t+s}{s}\frac{G_s(\lambda;\nu)}{\lambda^{t+s}}A^t.$$

Wenn wir aber die Reihenfolge der zwei Summationen vertauschen, so ist:

$$\varphi(A)=\sum_{t=0}^{n-1}\left[\sum_{s=0}^{n-1-t}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\,\lambda^{t+s}}\binom{t+s}{s}G_s(\lambda,\nu)\right]A^t.$$

Bezeichnen wir den Klammerausdruck mit $c_t(\lambda,\nu)$, so daß

(8) $$c_t(\lambda,\nu)=\sum_{s=0}^{n-1-t}(-1)^s\frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\,\lambda^{t+s}}\binom{t+s}{s}G_s(\lambda,\nu),$$

so ist

(9) $$\varphi(A)=\sum_{t=0}^{n-1}c_t(\lambda,\nu)A^t.$$

Diese Formel zeigt, daß die Zahl der Partitionen, d. h. der Lösungen, ein ganzer Ausdruck $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades ist, wo die Koeffizienten von dem Reste des A in bezug auf λ abhängig sind; λ ist aber noch in hohem Maße willkürlich.

Wenn wir insbesondere für λ das kleinste gemeinsame Vielfache λ_0 der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

eingesetzt denken, so kommt ν_0 an die Stelle des ν, wo

$$A\equiv\nu_0 \pmod{\lambda_0} \qquad (\nu_0<\lambda_0)$$

ist. In diesem Falle kann man

$$c_t(\lambda_0,\nu_0)$$

auch als Funktion des A betrachten; weil sie aber nur von dem auf den Teiler λ_0, also auf eine bestimmte Zahl bezüglichen Reste (ν_0) des A abhängt, so ist sie eine periodische Funktion des A, welche als Periode λ_0 oder einen Teiler davon hat.

Führen wir dementsprechend die Bezeichnung $c_t(A)$ für $c_t(\lambda_0, \nu_0)$ ein, so wird

$$\varphi(A) = \sum_{t=0}^{n-1} c_t(A)\, A^t, \tag{10}$$

wo $c_t(A)$ eine periodische Funktion ist.

Das ist die Darstellung, deren Möglichkeit auch die Forschungen Cayleys nachweisen. —

Aus der Vergleichung von (8) und (10) folgt:

$$c_t(A) = \sum_{s=0}^{n-1-t} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!\, \lambda^{t+s}} \binom{t+s}{s} G_s(\lambda; \nu),$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda)$$

ist.

$c_t(A)$ muß von dem willkürlichen Vielfachen λ der Zahlen

$$\alpha_i \qquad (i = 1, 2, 3, \cdots, n)$$

unabhängig sein. Da also $G_s(\lambda, \nu)$ ein ganzer Ausdruck von λ ist, so müssen in dem Ausdrucke für $c(A)$ die Koeffizienten der Potenzen

$$\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3, \cdots \text{ usw.}$$

identisch verschwinden und kann auch im Koeffizient des λ^0 das von λ abhängige ν in expliziter Form nicht vorkommen.

Im Laufe der weiteren Untersuchung werden wir zeigen, daß $G_s(\lambda, \nu)$ in λ ein ganzer Ausdruck $(n-1+s)^{\text{ten}}$ Grades ist, wo die vorkommende niedrigste Potenz λ^{n-1} ist; also die Form hat:

$$G_s(\lambda; \nu) = \sum_{r=0}^{s} H_{s, n-1+r}\, \lambda^{n-1+r}.$$

Folglich ist

$$c_t(A) = \sum_{s=0}^{n-1-t} (-1)^s \frac{\alpha_{n-1-(t+s)}}{(n-1)!} \binom{t+s}{s} \sum_{r=0}^{s} H_{s, n-1+r}\, \lambda^{n-1+r-(t+s)}.$$

Da nach dem Vorhergehenden

$$n - 1 + r - (t+s)$$

nur den Wert Null haben kann und der größte Wert von $(t+s)$ gleich $(n-1)$ ist, kann nur die Möglichkeit

$$r = 0 \quad \text{und} \quad t + s = n - 1$$

bleiben, und

$$c_t(A) = (-1)^{n-1-t} \frac{\alpha_0}{(n-1)!} \binom{n-1}{n-1-t} H_{n-1-t, n-1},$$

oder, — da $\alpha_0 = 1$ und

$$H_{n-1-t, n-1} = \text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_{n-1-t}(\lambda, \nu)$$

ist, —

$$(11) \qquad c_t(A) = \frac{(-1)^{n-1-t}}{t!\,(n-1-t)!} \text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_{n-1-t}(\lambda; \nu).$$

In anderer Form:

$$(12) \qquad c_{n-1-s}(A) = \frac{(-1)^s}{s!(n-1-s)!} \text{coeff } \lambda^{n-1} \text{ in } G_s(\lambda, \nu).$$

Die Berechnung der periodischen Koeffizienten der Funktion (10) $\varphi(A)$, welche die Zahl der Partitionen darstellt, ist also damit nach (7) auf die Entwicklung (3) des endlichen ganzen Funktionsproduktes (2):

$$U(z) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1-z^\lambda}{1-z^{a_i}}\right)$$

reduziert.

II.

Wenn wir die Ausrechnung von $G_s(\lambda, \nu)$ auf Grund der Definition (7):

$$G_s(\lambda, \nu) = \sum_{k=0}^{n-1} (\nu + k\lambda)^s F(\nu + k\lambda)$$

aus dem Ausdrucke (3):

$$U(z) = \sum_{\nu=1}^{\lambda-1} \sum_{k=0}^{n-1} F(\nu + k\lambda) z^{\nu + k\lambda}$$

vollenden wollen, ist offenbar nichts anderes zu tun, als auf das $U(z)$ s-mal untereinander die Polaroperation

$$z \frac{\partial U}{\partial z}$$

anzuwenden und darauf $z = \omega_r$ zu setzen, wo $\omega_r^\lambda = 1$ ist.

Dann wird nämlich

$$[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r} = \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} (\nu + k\lambda)^s F(\nu + k\lambda)\right] \omega_r^\nu.$$

Hieraus ist ersichtlich, daß

$$(13) \qquad G_s(\lambda, \nu) = \text{coeff } \omega_r^\nu \text{ in } [\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}$$

ist.

Da aber die binomische Gleichung $\omega_r^\lambda = 1$ λ Wurzeln hat, können wir λ solche Werte ω_r einführen, und gewinnen zur Bestimmung der Zahlen

$$G_s(\lambda, \nu) \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots, \lambda - 1)$$

ein lineares Gleichungssystem.

Dies ist das folgende:

$$(14)\quad G_s(\lambda, 0) + G_s(\lambda, 1)\,\omega_r^1 + \cdots + G_s(\lambda, \nu)\,\omega_r^\nu + \cdots + G_s(\lambda, \lambda - 1)\,\omega_r^{\lambda-1} = [\Delta^s(U)]_{z=\omega_r} \qquad (r = 0, 1, 2, \cdots, \lambda).$$

Seine Lösung ist nach der Interpolationsformel von Lagrange:

$$\text{(a)}\qquad G_s(\lambda, \nu) = (-1)^{\lambda-1-\nu} \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{f'(\omega_r)}\, g_{\lambda-1-\nu}^{(r)},$$

wo $g_{\lambda-1-\nu}^{(r)}$ die elementare symmetrische Funktion $(\lambda - 1 - \nu)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, welche man aus den Elementen

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{r-1}, \omega_{r+1}, \cdots, \omega_\lambda$$

erzeugen kann, und

$$f(\omega) = (\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2) \cdots (\omega - \omega_\lambda)$$

ist.

Weil aber $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\lambda$ die Wurzeln der Gleichung

$$z^\lambda - 1 = 0$$

sind, so ist

$$f(\omega) = \omega^\lambda - 1,$$
$$f'(\omega) = \lambda\,\omega^{\lambda-1},$$
$$\text{(b)}\qquad f'(\omega_r) = \frac{\lambda}{\omega_r}.$$

Wenn aber g_m die aus den Elementen

$$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_\lambda$$

erzeugbare symmetrische Funktion m^{ten} Grades bedeutet, dann ist

$$g_m = g_m^{(r)} + \omega_r\, g_{m-1}^{(r)} \qquad (0 < m < \lambda).$$

Aber

$$g_m = 0,$$

folglich

$$g_m^{(r)} = -\,\omega_r\, g_{m-1}^{(r)}.$$

Mehrfache Anwendung derselben Überlegung ergibt:

$$g_m^{(r)} = (-1)^m\,\omega_r^m\, g_0^{(r)} = (-1)^m\,\omega_r^m.$$

Die nämliche Formel ist auch im Falle $m = 0$ gültig.

So wird

$$g^{(r)}_{\lambda-1-\nu} = (-1)^{\lambda-1-\nu}\,\omega_r^{\lambda-1-\nu} = \frac{(-1)^{\lambda-1-\nu}}{\omega_r^{\nu+1}}. \tag{c}$$

Wenn wir die Ausdrücke (b) und (c) in (a) substituieren, entsteht:

$$G_s(\lambda,\nu) = \frac{1}{\lambda}\sum_{r=1}^{\lambda}\left\{\frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\}, \tag{15}$$

bei welcher Formel wir schon die unentwickelte Produktform (2) von $U(z)$ gebrauchen.

Substituiert man dies in den Ausdruck (12), so bekommen wir:

$$c_{n-1-s}(A) = \frac{(-1)^s}{s!\,(n-1-s)!}\text{ coeff }\lambda^n \text{ in }\left\{\sum_{r=1}^{\lambda}\frac{[\Delta^s(U)]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\}, \tag{16}$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda},\quad \omega_r{}^{\lambda} = 1,\quad U(z) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}\right) \qquad (\nu < \lambda)$$

ist.

Führen wir die vollständige Ausrechnung mit Hilfe dieser Formel erst im Falle $s = 0$ aus, so wird

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!}\text{ coeff }\lambda^n \text{ in }\left\{\sum_{r=1}^{\lambda}\frac{[U]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}}\right\}.$$

Bei der Substitution

$$[U]_{z=\omega_r}$$

hat ein Faktor des Produkts U:

$$u_i = \frac{1-z^{\lambda}}{1-z^{a_i}}$$

den Wert Null für sämtliche λ^{ten} Einheitswurzeln ω_r, welche nicht zugleich auch a_i^{te} Einheitswurzeln sind. Nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln kann der Wert des u_i von Null verschieden sein, welche zugleich a_i^{te} Einheitswurzeln sind $\left(\omega_r^{a_i} = 1\right)$, und dann hat er den Wert

$$[u_i] = \frac{\lambda}{a_i},$$

wie auch aus dem Ausdrucke

$$u_i = 1 + z^{a_i} + z^{2a_i} + \cdots + z^{\left(\frac{\lambda}{a_i}-1\right)a_i}$$

folgt.

Das ganze Produkt

$$U = u_1 u_2 \cdots u_n$$

kann also nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein, welche jeder der binomischen Gleichungen

$$\begin{aligned} z^{a_1}-1&=0, \\ z^{a_2}-1&=0, \\ \cdots & \cdots \\ z^{a_n}-1&=0 \end{aligned}$$

entsprechen.

Die gemeinsamen Wurzeln dieses Gleichungssystems liefert — wenn d der größte gemeinsame Teiler der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\cdots,a_n$$

ist —, die Gleichung:

$$z^d-1=0.$$

Wir können aber immer voraussetzen, daß $d=1$ ist. Wäre es nicht der Fall, kann man die Aufgabe leicht auf eine solche transformieren.

Das Produkt $U=u_1u_2\cdots u_n$ kann also nur im Falle $\omega_r=1$ von Null verschieden sein und hat dann den Wert:

$$[U]_{z=1}=\frac{\lambda^n}{a_1a_2\cdots a_n}.$$

Infolge dessen ist

$$c_{n-1}(A)=\frac{1}{(n-1)!\,a_1a_2\cdots a_n}. \tag{17}$$

Es ist nun daraus ersichtlich, daß der Koeffizient der höchsten Potenz A^{n-1} im Ausdrucke von $\varphi(A)$ eine von A unabhängige Größe sei, man könnte sagen: eine periodische Funktion mit der Periode eins.

Zur exakten Berechnung anderer Koeffizienten ist die ausführlichere Untersuchung der höheren Polaren des Produkts

$$U=u_1u_2\cdots u_n$$

und seiner Werte für die λ^{ten} Einheitswurzeln nötig.

III.

Aus der allgemeinen, auf die Polaren des Produkts bezüglichen Regel, deren Beweis mit dem des polynomischen Lehrsatzes analog ist, folgt:

$$\Delta^k(u_1u_2\cdots u_n)=$$
$$=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k}\left\{\frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!}\Delta^{k_1}(u_1)\,\Delta^{k_2}(u_2)\cdots\Delta^{k_n}(u_n)\right\}.$$

Unter den Lösungen der unbestimmten Gleichung

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=k$$

sind solche zu finden, in welchen nur m Glieder von Null verschieden, z. B.:

$$k_{i_1},\ k_{i_2},\cdots,k_{i_m}, \qquad (m=1,2,\cdots,k)$$

die übrigen aber gleich Null sind, z. B.:

$$k_{r_1} = k_{r_2} = \cdots = k_{r_{n-m}} = 0.$$

Hier bedeutet

$$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m$$

irgendwelche Kombination ohne Wiederholungen der Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\cdots,\ n,$$

und

$$i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_m,\quad r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_{n-m}$$

eine Permutation derselben Elemente.

Demnach kann man den Ausdruck $\Delta^k(u_1 u_2 \cdots u_n)$ folgenderweise ordnen:

$$\Delta^k(u_1 u_2 \cdots u_n) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \tag{18}$$
$$\left\{ \frac{k!}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} \Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m}) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}} \right\}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Umformung wird nach (15):

$$\lambda G_k(\lambda, \nu) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} \tag{19}$$
$$\left\{ \sum_{r=1}^{\lambda} \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}(u_{i_1}) \Delta^{k_{i_2}}(u_{i_2}) \cdots \Delta^{k_{i_m}}(u_{i_m}) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}} \right]_{z=\omega_r}^{A}}{\omega_r^{\nu}} \right\},$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda),$$
$$\omega_r^{\lambda} = 1$$

ist.

Da im allgemeinen u_s nur für a_s^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein kann, verschwindet das Produkt:

$$u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}$$

nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln nicht, welche jeder der binomischen Gleichungen:

$$z^{r_1} - 1 = 0,$$
$$z^{r_2} - 1 = 0,$$
$$\cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot$$
$$z^{r_{n-m}} - 1 = 0$$

genügen.

Die gemeinsamen Wurzeln dieser Gleichungen enthält die Gleichung:

$$z^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} - 1 = 0,$$

wenn

$$d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

den größten gemeinsamen Teiler der Zahlen

$$a_{r_1},\ a_{r_2},\ \cdots,\ a_{r_{n-m}},$$

d. h. der Zahlen

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,$$

mit Ausnahme von

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_m}$$

bedeutet.

Das Produkt

$$u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}$$

kann also nur für solche λ^{te} Einheitswurzeln von Null verschieden sein, welche zugleich $d_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}^{\text{te}}$ Einheitswurzeln sind. Da aber $d_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ ein Teiler von λ ist, d. h. unter den λ^{ten} Einheitswurzeln sämtliche $d_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln enthalten sind, muß man das Produkt

$$u_1 u_2 \cdots u_{r_{n-m}},$$

und so in dem Ausdrucke von $\lambda G_k(\lambda, \nu)$ das ganze Glied

$$\left\{ \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}\left(u_{i_1}\right) \Delta^{k_{i_2}}\left(u_{i_2}\right) \cdots \Delta^{k_{i_m}}\left(u_{i_m}\right) u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}\right]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}} \right\}$$

nur für die sämtlichen $d_{i_1 i_2 \ldots i_m}{}^{\text{ten}}$ Einheitswurzeln summieren.

Für solche ist:

$$\left[u_{r_1} u_{r_2} \cdots u_{r_{n-m}}\right]_{z=\omega_r} = \frac{\lambda^{n-m}}{a_{r_1} a_{r_2} \cdots a_{r_{n-m}}} = \frac{\lambda^{n-m} a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m}}{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

folglich:

$$\lambda G_k(\lambda, \nu) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1} a_{i_2} \cdots a_{i_m} \lambda^{n-m}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\left\{ \sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \frac{\left[\Delta^{k_{i_1}}\left(u_{i_1}\right) \Delta^{k_{i_2}}\left(u_{i_2}\right) \cdots \Delta^{k_{i_m}}\left(u_{i_m}\right)\right]_{z=\omega_r}}{\omega_r^{\nu}} \right\}, \tag{20}$$

wo

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda} \qquad (\nu < \lambda),$$

$$\omega_r^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} = 1.$$

Die nächste Aufgabe ist jetzt die Berechnung der Faktoren

$$\left[\Delta^{k_{i_s}}\left(u_{i_s}\right)\right]_{z=\omega_r}.$$

Da

$$u_{i_\varepsilon} = \sum_{\varrho=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon}}-1} z^{\varrho a_{i_\varepsilon}}$$

ist, kommt

$$\Delta^{k_{i_\varepsilon}}(u_{i_\varepsilon}) = \sum_{\varrho=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon}}-1} a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} \varrho^{k_{i_\varepsilon}} z^{\varrho a_{i_\varepsilon}}.$$

Setzen wir $z = \omega_r$, so ist

$$\omega_r^{\varrho a_{i_\varepsilon}} = \omega_r^{\varrho' a_{i_\varepsilon}},$$

im Falle, daß

$$\varrho a_{i_\varepsilon} \equiv \varrho' a_{i_\varepsilon} (\mathrm{mod}\ d_{i_1 i_2 \cdots i_m});$$

oder — weil der größte gemeinsame Teiler von a_{i_ε} und von $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ nach der eingeführten Bezeichnung

$$d_{i_1 i_2 \cdots i_{\varepsilon-1} i_{\varepsilon+1} \cdots i_m}$$

ist — im Falle, daß

$$\varrho - \varrho' = \frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_{\varepsilon-1} i_{\varepsilon+1} \cdots i_m}}.$$

Führen wir durchgängig die Bezeichnung

$$\frac{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{d_{i_1 i_2 \cdots i_{\varepsilon-1} i_{\varepsilon+1} \cdots i_m}} = t_\varepsilon$$

ein, so wird für

$$\xi_\varepsilon < t_\varepsilon,$$

$$\omega_r^{\xi_\varepsilon a_{i_\varepsilon}} = \omega_r^{(\xi_\varepsilon + t_\varepsilon) a_{i_\varepsilon}} = \cdots = \omega_r^{\left(\xi_\varepsilon + \frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon}} - t_\varepsilon\right) a_{i_\varepsilon}},$$

und mit der Substitution

$$\varrho = \xi_\varepsilon + u t_\varepsilon:$$

$$\begin{aligned}
\left[\Delta^{k_{i_\varepsilon}}\left(u_{i_\varepsilon}\right)\right]_{z=\omega_r} &= a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} \sum_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1} \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon}-1} (\xi_\varepsilon + u t_\varepsilon)^{k_{i_\varepsilon}} \omega_r^{a_{i_\varepsilon} \xi_\varepsilon} \\
&= a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} \sum_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1} \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon}-1} \sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}} \binom{k_{i_\varepsilon}}{v} \xi^{k_{i_\varepsilon}-v} u^v t_\varepsilon^v \omega_r^{a_{i_\varepsilon} \xi_\varepsilon} \\
&= a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} \sum_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1} \sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}} \left\{ \sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon}-1} u^v \right\} \binom{k_{i_\varepsilon}}{v} t_\varepsilon^v \xi_\varepsilon^{k_{i_\varepsilon}-v} \omega_r^{a_{i_\varepsilon} \xi_\varepsilon},
\end{aligned}$$

wo

$$\omega_r^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} = 1$$

ist.

Hier kann man die Summe

$$\left\{\sum_{u=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon}-1} u^v\right\}$$

mit Anwendung der Bernoullischen Reihenentwicklungen in dieser Form darstellen:

$$\left\{\sum_{v=0}^{\frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon}-1} u^v\right\} = \frac{\lambda}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon} \sum_{h=0}^{v} A_{v,h} \frac{\lambda^h}{a_{i_\varepsilon}^h t_\varepsilon^h},$$

wo, im Falle $v = 0$,

$$A_{00} = 1$$

ist, und im Falle $v > 0$,

$$A_{v,v} = \frac{1}{v+1},$$

$$A_{v,v-1} = -\frac{1}{2},$$

$$A_{v,v-2} = \frac{1}{2}\binom{v}{1} B_1,$$

$$A_{v,v-3} = 0,$$

$$A_{v,v-4} = -\frac{1}{4}\binom{v}{3} B_3,$$

$$A_{v,v-5} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_{v,v-2k} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2k} \binom{v}{2k-1} B_{2k-1} \qquad (k>0),$$

$$A_{v,v-(2k+1)} = 0 \qquad (k>0,$$

und $B_1, B_3, B_5, \cdots$ die Bernoullischen Zahlen sind; z. B. wenn $v = 2s$, $(s > 0)$, wird $A_{2s,0} = (-1)^{s-1} B_{2s-1}$, wenn $v = 2s+1$, $(s>0)$, wird $A_{2s+1,0} = 0$.

Mit Substituierung des obigen Ausdruckes sind

$$\left[\Delta^{k_{i_\varepsilon}}(u_{i_\varepsilon})\right]_{z=\omega_r} = \frac{\lambda a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}}}{a_{i_\varepsilon} t_\varepsilon} \sum_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1} \sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}} \sum_{h=0}^{v} A_{v,h} \lambda^h \frac{t_\varepsilon^{v-h}}{a_{i_\varepsilon}^h} \binom{k_{i_\varepsilon}}{v} \xi_\varepsilon^{k_{i_\varepsilon}-v} \omega_r^{a_{i_\varepsilon}\xi_\varepsilon},$$

und infolgedessen:

$$(21)\quad \lambda G_k(\lambda, \nu) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}} \lambda^n}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$

$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{ \frac{\prod_{\varepsilon=1}^{m} \left[\frac{1}{t_\varepsilon} \sum_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1} \sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}} \sum_{h=0}^{v} A_{vh} \frac{\lambda^h t_\varepsilon^{v-h}}{a_{i_\varepsilon}^h} \binom{k_{i_\varepsilon}}{v} \xi_\varepsilon^{k_{i_\varepsilon}-v} \omega_r^{a_{i_\varepsilon}\xi_\varepsilon}\right]}{\omega_r^{\nu}} \right\}.$$

Da hier in dem Produkte:

$$\prod_{\varepsilon=1}^{m}[\cdots]$$

die niedrigste Potenz von λ λ^0, die höchste Potenz aber $\lambda^{k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}}=\lambda^k$ ist, und die nachstehenden Summationen einen das λ enthaltenden Faktor nicht liefern, folgt, daß

$$\lambda\, G_k(\lambda, \nu)$$

in λ ein Ausdruck $(n+k)^{\text{ten}}$ Grades sein wird, wo die niedrigste vorkommende Potenz λ^n ist.

$$G_k(\lambda, \nu)$$

selbst wird hiernach in λ ein Ausdruck $(n-1+k)^{\text{ten}}$ Grades, wo die niedrigste vorkommende Potenz λ^{n-1} ist. Das ist die Eigenschaft, auf welche wir uns im vorhergehenden berufen haben.

In Anbetracht dessen, daß nach (12)

$$c_{n-1-k}(A)=\frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!}\ \text{coeff}\ \lambda^n\ \text{in}\ \lambda\, G_k(\lambda, \nu),$$

bekommen wir:

$$(22)\qquad c_{n-1-k}(A)$$

$$=\frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!}\sum_{m=1}^{k}\ \sum_{\substack{i_1 i_2\cdots i_m=1\\ i_1<i_2<\cdots<i_m}}^{n}\ \sum_{\substack{k_{i_1}k_{i_2}\cdots k_{i_m}=1\\ k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}=k}}^{k}\cdot\frac{k!\,a_{i_1}^{k_{i_1}}a_{i_2}^{k_{i_2}}\cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\,k_{i_2}!\cdots k_{i_m}!\,a_1 a_2\cdots a_n}$$

$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2\cdots i_m}}\left\{\frac{\prod\limits_{\varepsilon=1}^{m}\left[\dfrac{1}{t_\varepsilon}\sum\limits_{\xi_\varepsilon=0}^{t_\varepsilon-1}\sum\limits_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}}A_{v0}\binom{k_{i_\varepsilon}}{v}t_\varepsilon^{v}\,\xi_\varepsilon^{k_{i_\varepsilon}-v}\,\omega_r^{a_{i_\varepsilon}\xi_\varepsilon}\right]}{\omega_r^{\nu}}\right\}.$$

Führen wir nun statt der durchgängig benutzten

$$t_\varepsilon \quad\text{und}\quad \xi_\varepsilon$$

die endgültigen Bezeichnungen

$$t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m} \quad\text{und}\quad \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots, i_m}$$

ein und bezeichnen den hier vorkommenden ganzen Ausdruck von $\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}$ folgendermaßen:

$$f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}\right)=\sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}}A_{v0}\binom{k_{i_\varepsilon}}{v}\left(t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}\right)^{v}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}\right)^{k_{i_\varepsilon}-v},$$

so entsteht:

(23)
$$c_{n-1-k}(A)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!(n-1-k)!} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!\, a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!\, a_1 a_2 \cdots a_n \prod_{\varepsilon=1}^{m} t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$
$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{ \frac{\prod_{\varepsilon=1}^{n} \left\{ \sum_{\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0}^{t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - 1} f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \right\}}{\omega_r^{\nu}} \right\}.$$

Es bleibt noch die Summation nach r auszuführen.

Die Glieder des im Ausdrucke vorkommenden Produkts

$$P \equiv \prod_{\varepsilon=1}^{m} \left\{ \sum_{\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0}^{t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - 1} f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \right\}$$

kann man nach der Entwicklung so anordnen:

$$P \equiv \sum_{\cdots \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{\varepsilon=1}^{m} f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}},$$

wo

$$0 \leqq \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} < t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}$$

ist.

Damit wird:

(24)
$$c_{n-1-k}(A)$$
$$= \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \prod_{\varepsilon=1}^{m} \frac{a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}}}{k_{i_\varepsilon}!\, t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$
$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \left\{ \sum_{\cdots \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{\varepsilon=1}^{m} f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) \omega_r^{\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - \nu} \right\}.$$

Hier kann die Summe

$$\sum_{r=1}^{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}} \omega_r^{\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - \nu}$$

nur für solche Werte von $\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ von Null verschieden sein (und den Wert $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ haben), welche auch der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{\varepsilon=0}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} - \nu \equiv 0 \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

entsprechen.

Demzufolge ist

(25)
$$c_{n-1-k}(A)$$

$$= \frac{(-1)^k}{k!\,(n-1-k)!} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k} \frac{k!}{a_1 a_2 \cdots a_n} \prod_{\varepsilon=1}^{m} \frac{a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}} d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}{k_{i_\varepsilon}!\, t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

$$\sum_{\cdots \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \cdots} \prod_{\varepsilon=1}^{m} f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right),$$

wo die auf die Werte

$$\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \cdots, m)$$

bezügliche Summation auf sämtliche Auflösungen der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{\varepsilon=1}^{m} a_{i_\varepsilon} \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \equiv \nu \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}}$$

sich erstreckt, welche den Bedingungen

$$0 \leqq \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} < t^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} \qquad (\varepsilon = 1, 2, \cdots, m)$$

entsprechen.

Da

$$A \equiv \nu \pmod{\lambda}$$

und

$$\lambda \equiv 0 \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}},$$

wird

$$A \equiv \nu \pmod{d_{i_1 i_2 \cdots i_m}},$$

und demzufolge kann man in der obigen Kongruenz statt ν das A schreiben und

$$c_{n-1-k}(A)$$

als eine periodische Funktion von A betrachten.

Die Endresultate unserer Betrachtungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

Wenn $d_{i_1 i_2 \cdots i_m}$ *den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen* a *mit Ausnahme von*

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_m},$$

und $d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m} = d_{i_1 i_2 \cdots i_{\varepsilon-1} i_{\varepsilon+1} \cdots i_m}$ *den größten gemeinsamen Teiler aller Zahlen* a *mit Ausnahme von*

$$a_{i_1},\ a_{i_2},\ \cdots,\ a_{i_{\varepsilon-1}},\ a_{i_{\varepsilon+1}},\ \cdots,\ a_{i_m}.$$

bedeutet, ist in der Funktion

$$\varphi(A)=\sum_{k=0}^{n-1} c_{n-1-k}(A)\, A^{n-1-k},$$

die die Zahl der auf die Elemente

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$$

bezüglichen Partitionen von A ausdrückt, die allgemeine Formel für die periodischen Koeffizienten:

$$\begin{aligned}(26)\quad \underset{k>0}{c_{n-1-k}(A)} &= \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2\cdots a_n} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2\cdots i_m=1\\ i_1<i_2<\cdots<i_m}}^{n} \frac{\prod_{\varepsilon=1}^{m} d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}}{d^{m-1}_{i_1 i_2\cdots i_m}} \\ &\quad \sum_{\cdot\cdot\,\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}\cdots} \ \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2}\cdots k_{i_m}=1\\ k_{i_1}+k_{i_2}+\cdots+k_{i_m}=k}}^{k} \prod_{\varepsilon=1}^{m} \frac{a_{i_\varepsilon}^{k_{i_\varepsilon}}}{k_{i_\varepsilon}!}\, f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}\right).\end{aligned}$$

Darin umfaßt die über die Werte

$$\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m} \qquad (\varepsilon=1,2,\cdots,m)$$

erstreckte Summation sämtliche Lösungen der unbestimmten Kongruenz

$$\sum_{\varepsilon=1}^{n} a_{i_\varepsilon}\, \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m} \equiv A \pmod{d_{i_1 i_2\cdots i_m}}$$

$$\left(0\leqq \xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m} < \frac{d_{i_1 i_2\cdots i_m}}{d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}}\right),$$

$$\left(\text{deren Zahl } \frac{d^{m-1}_{i_1 i_2\cdots i_m}}{\sum_{\varepsilon=1}^{m} d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}} \text{ ist}\right).$$

Ferner ist

$$f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots m}\right)=\sum_{v=0}^{k_{i_\varepsilon}} A_{v0}\binom{k_{i_\varepsilon}}{v}\left(\frac{d_{i_1 i_2\cdots i_m}}{d^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2\cdots i_m}}\right)^{v}\left(\xi_{i_1 i_2\cdots i_m}\right)^{k_{i_\varepsilon}-v},$$

endlich

$$\begin{aligned} A_{00} &= 1, \\ A_{10} &= -\frac{1}{2}, \\ A_{2k,0} &= (-1)^{k-1} B_{2k-1}, && (k>0), \\ A_{2k+1,0} &= 0, && (k>0), \end{aligned}$$

wo B_{2k-1} eine Bernoullische Zahl bedeutet.

IV.

Wir haben für die periodischen Funktionen $c(A)$ die gesuchte independente Formel hergestellt. Aus dem gefundenen Ausdrucke kann man den allgemeinen Typus jener elementaren periodischen Funktionen klar festsetzen, auf welche die Frage der Bestimmung der Zahl der Partitionen reduzierbar ist. Dieser ist der folgende:

$$\sum_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m} f_1(\xi_1) f_2(\xi_2) \cdots f_m(\xi_m),$$

wo

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_m \xi_m \equiv A \pmod{d},$$

$$\left(0 \leqq \xi_i < \frac{d}{d_i}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

d_i der größte gemeinsame Teiler von a_i und d ist, weiterhin $f_1, f_2, \cdots, f_m$ ganze Ausdrücke sind.

Der letzte Typus aber, auf welchen wir im Laufe unserer Untersuchung kommen können, ist der folgende:

$$\sum_{\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_m} \xi_1^{r_1} \xi_2^{r_2} \cdots \xi_m^{r_m},$$

wo

$$a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \cdots + a_m \xi_m \equiv A \pmod{d},$$

und

$$\left(0 \leqq \xi_i < \frac{d}{d_i}\right), \qquad (i = 1, 2, \cdots, m).$$

Diese, in Bezug auf A periodische Summenfunktion ist im allgemeinen nicht in einfacher Form ausdrückbar. Eine ausführliche Analyse der Eigenschaften dieser Funktion hat die Aufgabe weiterer Untersuchungen zu sein.

Wir wollen hier die allgemeine Formel nur noch auf einige einfachere und spezielle Fälle anwenden.

Ist $k = 0$, so ist

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\, a_1 a_2 \cdots a_n}.$$

Ist $k = 1$, so bekommen wir mit der Substitution $i_1 = 1$ aus (26):

$$c_{n-2}(A) = \frac{-1}{(n-2)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\xi_i - \frac{1}{2} d_i\right) \right\},$$

wo

$$a_i \xi_i \equiv A \pmod{d_i} \qquad (0 \leqq \xi_i < d_i)$$

ist.

So geht es weiter in den Fällen $k = 2, 3, 4, \cdots$.

Wenn jetzt $n = 2$ ist, wird die vollständige Formel ($d_1 = a_2$, $d_2 = a_1$):

$$\varphi(A) = \frac{A^1}{a_1 a_2} - \frac{A^0}{a_1 a_2} \{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 - a_1 a_2\},$$

wo

$$a_1\xi_1 \equiv A \pmod{a_2}, \qquad (0 \leqq \xi_1 < a_2)$$
$$a_2\xi_2 \equiv A \pmod{a_1} \qquad (0 \leqq \xi_2 < a_1)$$

ist.

Die Funktionen $c(A)$ nehmen eine einfache und interessante Form in dem speziellen Falle an, wenn jedes Elementenpaar $a_i a_k$ relativ prim, z. B. wenn jedes Element a_i eine Primzahl ist.

Dann ist

$$d_i = d_{ik} = \cdots = d_{i_1 i_2 \cdots i_{n-2}} = 1,$$
$$d_{i_1 i_2 \cdots i_{n-1}} = a_{i_n}.$$

Wenn wir nun noch statt A_{k0} kurz A_k schreiben, und weil

$$\xi_{i_1 i_2 \cdots i_m} = 0 \qquad (m < n-1),$$
$$f_{k_{i_\varepsilon}}\left(\xi^{(\varepsilon)}_{i_1 i_2 \cdots i_m}\right) = A_{k_{i_\varepsilon}} \qquad (m < n-1),$$

so gestaltet sich die Formel:

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{m=1}^{k} \sum_{\substack{i_1 i_2 \cdots i_m = 1 \\ i_1 < i_2 < \cdots < i_m}}^{n} \sum_{\substack{k_{i_1} k_{i_2} \cdots k_{i_m} = 1 \\ k_{i_1} + k_{i_2} + \cdots + k_{i_m} = k}}^{k},$$
$$\cdot \frac{a_{i_1}^{k_{i_1}} a_{i_2}^{k_{i_2}} \cdots a_{i_m}^{k_{i_m}}}{k_{i_1}!\, k_{i_2}! \cdots k_{i_m}!} A_{k_{i_1}} A_{k_{i_2}} \cdots A_{k_{i_m}}.$$

Das können wir auch so schreiben:

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!\, a_1 a_2 \cdots a_n} \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k} \frac{A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \cdots a_n^{k_n}.$$

Diese außerordentlich einfache Formel ist auch in dem Falle $k = 0$ anwendbar, da sie dann den bekannten Wert:

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\, a_1 a_2 \cdots a_n}$$

liefert.

In diesem speziellen Falle sind also

$$c_1(A),\ c_2(A),\ \cdots,\ c_{n-1}(A)$$

nicht periodisch, sondern konstant. $c_0(A)$ ist aber auch hier periodisch.

Noch einfacher ist das Resultat in dem speziellen Falle, wenn

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_n = 1.$$

Dann ist

$$\underset{0 \leqq k < n}{c_{n-1-k}(A)} = \frac{(-1)^k}{(n-1-k)!} \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \cdots + k_n = k \\ 0 \leqq k_i \leqq k}} \frac{A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}}{k_1!\, k_2! \cdots k_n!}.$$

Andererseits ist in diesem Falle:

$$\varphi(A) = \binom{A+n-1}{n-1}$$

und

$$c_{n-1-k}(A) = \frac{1}{(n-1)!}\,\alpha_k,$$

wo α_k die aus den Elementen $1, 2, \cdots, n-1$ erzeugte symmetrische Funktion k^{ten} Grades bedeutet.

Aus dem Vergleiche der beiden Erzeugungen folgt:

$$\alpha_k = (-1)^k \binom{n-1}{k} \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_n=k} \frac{k!}{k_1!\,k_2!\cdots k_n!} A_{k_1} A_{k_2} \cdots A_{k_n}.$$

Weil

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_1 &= -\frac{1}{2}, \\ A_{2k} &= (-1)^{k-1} B_{2k-1} \qquad (k>0), \\ A_{2k+1} &= 0 \qquad (k>0), \end{aligned}$$

ist das Obige nichts anderes als der Ausdruck der elementar-symmetrischen Funktion α_k durch Bernoullische Zahlen.

Wegen Anwendungen in der Invariantentheorie und in der Theorie der symmetrischen Funktionen ist ein wichtiger spezieller Fall das folgende *Euler-Cayleysche Beispiel:*

Sei

$$a_1 = 1,\ a_2 = 2,\ \cdots,\ a_r = r,\ a_{r+1} = 1,\ a_{r+2} = 2,\ \cdots,\ a_n = n-r,$$

so wird

$$c_{n-1}(A) = \frac{1}{(n-1)!\,r!\,(n-r)!}\left(\frac{1}{n!}\right)^2 \binom{n}{1}\binom{n}{r}.$$

Da im Falle $n \geqq 3$ der größte gemeinsame Teiler aller Kombinationsgruppen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-r$$

gleich 1 ist, wird

$$d_i = 1, \quad \xi_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

und

$$\begin{aligned} c_{n-2}(A) &= \frac{1}{2!\,(n-2)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{(n!)^2}\binom{n}{2}\binom{n}{r}\left\{\frac{r(r+1)}{2} + \frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right\} \qquad (n \geqq 3). \end{aligned}$$

Da im Falle $n \geqq 5$ der größte gemeinsame Teiler aller Kombinationsgruppen $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades der Elemente

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-r$$

gleich 1 ist, wird

$$d_{ik}=1,\quad \xi_{ik}=0 \qquad (i,k=1,2,\cdots,n)$$

und

$$c_{n-3}(A)=$$

$$=\frac{1}{(n-3)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{12}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)+\frac{1}{4}\sum_{\substack{i<k\\ i,k=1,2,3,\cdots,r,1,2,\cdots,n-r}} ik\right\}$$

$$=\frac{1}{(n-3)!\,r!\,(n-r)!}\left\{\frac{1}{12}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)+\frac{1}{8}[(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r))^2-(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)]\right\}$$

$$=\frac{1}{(n!)^2}\binom{n}{3}\binom{n}{r}\left\{\frac{3}{4}(1+2+\cdots+r+1+2+\cdots+(n-r))^2-\frac{1}{4}(1^2+2^2+\cdots+r^2+1^2+2^2+\cdots+(n-r)^2)\right\}.$$

Wenn wir in Betracht ziehen, daß

$$1+2+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2},$$

$$1^2+2^2+\cdots+m^2=\frac{m(m+1)(2m+1)}{6},$$

wird

$$c_{n-3}(A)=\frac{1}{(n!)^2}\binom{n}{3}\binom{n}{r}\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{r(r+1)}{2}+\frac{(n-r)(n-r+1)}{2}\right]^2-\frac{1}{4}\left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}+\frac{(n-r)(n-r+1)(2n-2r+1)}{6}\right]\right\}$$

$$(n\geqq 5).$$

Gleichfalls in invariantentheoretischen Anwendungen pflegt der folgende Fall vorzukommen:

$$a_1=2,\ a_2=3,\ \cdots,\ a_{r-1}=r,\ a_r=1,\ a_{r+1}=2,\ \cdots,\ a_n=n-(r-1).$$

Wenden wir die Substitution

$$n=m-1$$

an, so wird

$$c_{m-2}(A)=\frac{1}{(m-2)!\,r!\,(m-r)!},$$

$$c_{m-3}(A)=\frac{1}{2!\,(m-3)!\,r!\,(m-r)!}\left\{\frac{r(r+1)}{2}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}\right\}$$

$$(m>4),$$

$$c_{m-4}(A)=\frac{1}{(m-4)!\,r!\,(m-r)!}\left\{\frac{1}{8}\left[\frac{r(r+1)}{2}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)}{2}\right]^2-\frac{1}{24}\left[\frac{r(r+1)(2r+1)}{6}-1+\frac{(m-r)(m-r+1)(2m-2r+1)}{6}\right]\right\}$$

$$(m>6),$$

usw., und die Zahl der Auflösungen der Gleichung:

$$2x_1 + 3x_2 + \cdots + r x_{r-1} + 1 x_r + 2 x_{r+1} + \cdots + (m-r) x_{m-1} = A$$

ist

$$\varphi(A) = c_{m-2}(A) A^{m-2} + c_{m-3}(A) A^{m-3} + c_{m-4}(A) A^{m-4} + \cdots + c_0(A).$$

Wenn wir ganz numerische Beispiele nehmen, bleibt in den Formeln in letzter Analyse der folgenderweise definierte Funktionstypus:

$$i\eta_{ik}(M) \equiv M \pmod{k} \qquad (0 \leqq \eta_{ik}(M) < k),$$

und falls i, k relativ prim sind:

$$\eta_{ik}(0) + \eta_{ik}(1) + \cdots + \eta_{ik}(k-1) = \frac{k(k-1)}{2}.$$

Bezeichnen wir die Zahl der Auflösungen der Gleichung

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = A$$

mit

$$\varphi(a_1, a_2, \cdots, a_n; A),$$

dann bekommen wir mit Gebrauch obiger Formeln:

$$\varphi(1,1;A) = A + 1,$$

$$\varphi(1,2;A) = \frac{A + (2 - \eta_{12}(A))}{2},$$

$$\varphi(1,3;A) = \frac{A + (3 - \eta_{13}(A))}{3},$$

$$\varphi(2,3;A) = \frac{A + [6 - 3\eta_{12}(A) - 2\eta_{23}(A)]}{6},$$

$$\varphi(1,1,1;A) = \frac{A^2 + 3A + 2}{2},$$

$$\varphi(1,1,2;A) = \frac{A^2 + 4A + [4 - \eta_{12}(A)]}{4},$$

$$\varphi(1,1,3;A) = \frac{3A^2 + 15A + 22 - 4\eta_{13}(A) - 2\eta_{13}(A-1)}{18},$$

$$\varphi(1,2,2;A) = \frac{A^2 + 2(3 - \eta_{12}(A))A^1 + (8 - 5\eta_{12}(A))}{8},$$

$$\varphi(1,2,3;A) = \frac{3A^2 + 18A + [28 - 9\eta_{12}(A) - 4\eta_{13}(A) + 4\eta_{13}(A-1)]}{36},$$

$$\varphi(2,2,3;A) = \frac{3A^2 + (30 - 18\eta_{12}(A))A + 64 - 63\eta_{12}(A) - 8\eta_{23}(A) + 8\eta_{23}(A-1)}{72},$$

$$\varphi(2,3,4;A) = \frac{1}{3!\,4!}\Big\{3A^2 + 18(2 - \eta_{12}(A))A^1$$
$$+ [112 - 63\eta_{12}(A) - 16\eta_{13}(A) + 16\eta_{13}(A-1) - 18\eta_{34}(A)]\Big\}.$$

Wie es scheint, machen praktische Anwendungen hauptsächlich die Entwicklung der Eigenschaften der periodischen Funktionen

$$\eta_{ik}(A)$$

notwendig.

Eine solche Eigenschaft ist:

$$\eta_{1n}(M) + \eta_{n-1,n}(M+1) = n - 1,$$

und sind i und k relativ prim:

$$\sum_{z=0}^{k-1} (\eta_{ik}(z))^r = \sum_{z=0}^{k-1} z^r.$$

Vollständigere Kenntnisse über die Eigenschaften der Fundamentalfunktion können die weitere Vereinfachung der die Zahl der Partitionen ausdrückenden, zusammengesetzten Funktionen möglich machen.

Miskolcz (Ungarn), den 31. August 1913.