Zur Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen und der Abel'schen Integrale.

Von

K. Hensel in Berlin.

In dieser Abhandlung stelle ich die Theorie der algebraischen Functionen und der Abel'schen Integrale in der Form dar, welche mir nach mehrjähriger anhaltender Beschäftigung mit diesem Gegenstande als die einfachste erscheint, um diese Theorie in voller Strenge und in voller Allgemeinheit zu entwickeln.

Diese Arbeit setzt zwar die Entwickelbarkeit der algebraischen Functionen in Potenzreihen voraus, ich habe jedoch für diese Thatsache einen Beweis gefunden, welcher ausser dem einfachsten Convergenzcriterium für eine Reihe kein einziges Resultat der Analysis benutzt, und für den daher alle sonst sich darbietenden Schwierigkeiten bei dem Auftreten höherer Singularitäten überhaupt gar nicht erst in Frage kommen. Diesen Beweis, der in einem demnächst erscheinenden Lehrbuche über diesen Gegenstand ausführlich dargestellt werden wird, habe ich in der vorliegenden Abhandlung nicht auseinandergesetzt, um ihren Umfang nicht unnöthig zu vergrössern. Dies konnte um so leichter geschehen, als ich jene Methode in einer soeben in den Acta mathematica veröffentlichten Abhandlung*) auf die Theorie der algebraischen Flächen ausgedehnt habe; aus ihr kann die Lösung der hier vorliegenden einfacheren Aufgabe unschwer abstrahirt werden.

Ich nehme an, dass y mit x durch eine irreductible Gleichung verbunden ist, und betrachte dann die Gesammtheit aller rationalen Functionen von x und y, d. h. alle Individuen des Körpers $K(x, y)$, die dann sämmtlich auf der der Gleichung gehörigen Riemann'schen Fläche $\mathfrak{K}$ eindeutig ausgebreitet sind. Im Mittelpunkte dieser ganzen Theorie steht nun bei dem hier befolgten Wege die Lösung der folgenden Fundamentalaufgabe:

*) K. Hensel, Ueber eine neue Theorie der algebraischen Functionen zweier Variablen. Acta mathematica Bd. 23, S. 339—416.

Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger rationaler Functionen von x und y gefunden werden, welche in h beliebig gegebenen Punkten

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$$

der Riemann'schen Fläche mindestens die Ordnungszahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$$

besitzen und sich in allen anderen Punkten jener Fläche regulär verhalten.

Wir lösen diese Aufgabe für jeden Körper, der einer ganz beliebig gegebenen Grundcurve zugehört, vollständig in der Weise, dass wir ein stets anwendbares *endliches* Verfahren zur Aufsuchung eines solchen „Fundamentalsystemes" angeben. Dass diese Aufgabe hier ganz im Anfange der Theorie gelöst wird, während ihre Lösung sonst schon die Theorie der Abel'schen Integrale, die Zerschneidung der Riemann'schen Fläche, den Riemann-Roch'schen Satz, und, im Falle höherer Singularitäten, ihre Auflösung durch birationale Transformation erfordert, erscheint mir als ein wesentlicher Vorzug des hier eingeschlagenen Weges.

Nachdem dann gezeigt ist, dass die Punkte $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Fläche und die Ordnungszahlen der Functionen von x und y in ihnen von der Wahl der unabhängigen Variablen x ganz unabhängig, dass sie vielmehr Invarianten des Körpers $K(x, y)$ sind, ordne ich nun jedem Punkte $\mathfrak{P}$ einen gleichbezeichneten Divisor zu, und sage, eine Function ξ des Körpers $K(x, y)$ enthält den Divisor $\mathfrak{P}^{\varrho}$, wenn sie in dem Punkte $\mathfrak{P}$ die (positive, negative oder verschwindende) Ordnungszahl ϱ besitzt. Entsprechend fasse ich die Producte der Potenzen verschiedener Primfactoren zu einem ganzen oder gebrochenen Divisor

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

zusammen. Dann kann die soeben erwähnte Fundamentalaufgabe einfacher folgendermassen ausgesprochen werden:

Es soll ein Fundamentalsystem für alle linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb eines Körpers $K(x, y)$ gefunden werden.

Die hier in die Theorie eingeführten Divisoren $\mathfrak{Q}$ bilden einen grossen Bereich, von dem die Grössen des Körpers K ein Theilbereich sind, denn jeder solchen Grösse ξ entspricht eindeutig ein Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$, welcher durch ihre Nullstellen und Pole bestimmt ist, aber es giebt unendlich viele Divisoren $\mathfrak{Q}$, denen keine Function des Körpers zugeordnet ist. Auf dieser Thatsache beruht nun die Eintheilung der Divisoren in *Classen*.

Zunächst rechnen wir alle und nur die Divisoren $\mathfrak{Q}_\xi$, welche den Functionen ξ des Körpers K entsprechen, in eine Classe, die s. g. *Haupt-*

oder *Einheitsclasse* E; dann aber werfen wir alle diejenigen Divisoren $\mathfrak{Q}$ in eine und dieselbe Classe Q, welche sich nur um einen Factor der Einheitsklasse E, d. h. um eine Grösse ξ des Körpers $K(x, y)$ von einander unterscheiden. Dann kann als die allgemeinste Aufgabe der Theorie der algebraischen Functionen das folgende Problem bezeichnet werden.

> Es soll ein vollständiges System aller unabhängigen Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse R gefunden werden.

Ist R speciell die Hauptclasse E, so ist diese Aufgabe mit der vorher gelösten identisch und sie kann sonst leicht auf diesen Fall zurückgeführt werden. Ist Q die zu $\mathfrak{Q}$ gehörige Divisorenclasse, so hängt die Anzahl $\left\{\frac{R}{Q}\right\}$ jener unabhängigen Multipla von Q nicht von diesem speciellen Divisor, sondern nur von den beiden Classen Q und R ab, sie ist die wichtigste und allgemeinste Invariante der algebraischen Körper.

Im zweiten Theile dieser Arbeit wende ich nun die bis jetzt gefundenen rein algebraischen Resultate auf die Untersuchung der Abel'schen Integrale an.

Es seien ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers K; beachtet man dann, dass der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ selbst eine rationale Function von x und y, also eine Grösse des Körpers ist, mithin als Divisor betrachtet der Hauptclasse angehört, so folgt leicht, dass jedes Abel'sche Differential $d\omega = \xi\, dx$ einem Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ äquivalent gesetzt werden kann, dessen einzelne Primfactoren genau ebenso, wie bei den Grössen des Körpers alle diejenigen Punkte der Riemann'schen Fläche bestimmen, in denen sich das zugehörige Integral nicht normal verhält. Ist nämlich ω jenes Integral, ω_0 die einem Punkte $\mathfrak{P}$ entsprechende Integrationsconstante, so bestimmen die Primfactoren des Nenners von $\mathfrak{W}_\omega$ alle diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$, in denen $\omega - \omega_0$ in bestimmter Ordnung unendlich wird, während die Factoren des Zählers alle und nur die Punkte ergeben, in denen $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

Allen und nur den zu $K(x, y)$ gehörigen Differentialen $d\omega$ entsprechen nun alle Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ einer bestimmten Divisorenclasse W, welche ich die *Differentialclasse* nenne, und die genau ebenso wie die Hauptclasse E der Functionen von $K(x, y)$ untersucht werden kann; und man erkennt jetzt, dass von diesem Standpunkte aus die Betrachtung der rationalen Functionen von x und y einerseits und die Theorie der Abel'schen Integrale andererseits nur zwei specielle Fälle eines und desselben Problemes sind, nämlich die Untersuchung aller Divisoren einer und derselben Classe.

Die allgemeinste Aufgabe in der Theorie der Abel'schen Integrale ist dann die Beantwortung der folgenden Frage: Es sollen alle linear unabhängigen Integrale gefunden werden, welche in beliebig vielen gegebenen Stellen $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_h$ in bestimmter Weise nicht normal sind, während sie sich in allen anderen Punkten normal verhalten. Diese Aufgabe fordert aber nichts Anderes als die folgende:

Es sollen alle unabhängigen Divisoren der Differentialclasse W gefunden werden, welche Multipla eines gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ sind.

Diese Aufgabe ist bereits im ersten Theile dieser Arbeit vollständig und zwar so gelöst, dass jene Divisoren, und damit auch jene Integrale in jedem Falle rein algebraisch berechnet werden können. Aus der Betrachtung der Anzahl $\left\{\frac{W}{Q}\right\}$ jener Divisoren kann man unmittelbar den Riemann-Roch'schen Satz in seiner allgemeinsten Form ablesen. Wählt man den Divisor $\mathfrak{Q}$ speciell gleich 1 oder gleich $\frac{1}{\mathfrak{P}^m}$ oder gleich $\frac{1}{\mathfrak{P}\mathfrak{P}'}$, so erhält man die Elementarintegrale erster, zweiter und dritter Gattung, und hieraus folgt ohne Weiteres die Darstellung jedes beliebigen Integrals durch jene einfachsten Integrale.

§ 1.

In der Theorie der algebraischen Functionen und der Abel'schen Integrale betrachtet man die Gesammtheit, den s. g. *Körper* $K(x, y)$, aller rationalen Functionen von x und y unter der Voraussetzung, dass y mit x durch eine beliebige irreductible Gleichung

$$a_n(x)\, y^n + a_{n-1}(x)\, y^{n-1} + \cdots + a_1(x)\, y + a_0(x) = 0$$

verbunden ist, deren Coefficienten $a_n(x), \cdots, a_0(x)$ beliebige rationale Functionen der unabhängigen Variabeln x sind.

In den Elementen der Functionentheorie wird gezeigt, dass jede Function

$$\eta = \varphi(x, y)$$

jenes Körpers auf einer gewissen n-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{R}$ eindeutig ist, deren Blätter in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten mit einander zusammenhängen, und zwar heisst ein Punkt $\mathfrak{P}$ jener Fläche ein α-blättriger Verzweigungspunkt oder ein Verzweigungspunkt der $(\alpha - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, wenn in ihm α von den n Blättern von $\mathfrak{R}$ zusammenhängen. In der Umgebung eines solchen Punktes ist dann jede Function η des Körpers in eine Potenzreihe entwickelbar, welche nach steigenden Potenzen von $(x - a)^{\frac{1}{\alpha}}$ bzw. von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ fortschreitet, je nachdem die unabhängige Variable x in $\mathfrak{P}$ den endlichen Werth a annimmt oder dort unendlich gross wird.

In der Umgebung eines beliebigen Punktes $\mathfrak{P}$ der Fläche $\mathfrak{K}$ ist jede Function η des Körpers $K(x, y)$ in der folgenden Form dargestellt:

$$(1)\qquad \eta = (x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}\left(a_0 + a_1(x-a)^{\frac{1}{\alpha}} + \cdots\right) = (x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}\, E(x|a),$$

wo ϱ eine ganze Zahl und $E(x|a)$ eine in der Umgebung der Stelle $(x = a)$ gleichmässig convergirende Potenzreihe mit nichtverschwindendem Anfangsgliede, oder kürzer gesprochen *eine Einheitsfunction für die Stelle* a bedeutet; hier wie stets im Folgenden kann auch $a = \infty$ angenommen werden, alsdann ist nur der Linearfactor $x - a$ durch $\frac{1}{x}$ zu ersetzen. Ist η in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ in der Form (1) dargestellt, so sagt man, diese Function besitzt an jener Stelle die *Ordnung* ϱ. Ist $\varrho \geqq 0$, so heisst η *regulär* in $\mathfrak{P}$, ist dagegen $\varrho = -\bar{\varrho}$ eine negative ganze Zahl, so besitzt η dort einen *Pol der Ordnung* $\bar{\varrho}$.

Wir betrachten zuerst die algebraischen Functionen η in der Umgebung einer beliebig gegebenen endlichen oder unendlichen Stelle $(x = a)$ des Bereiches der unabhängigen Variabeln x. An dieser Stelle liegen im Allgemeinen n Punkte der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{K}$ über einander, jedoch ist diese Anzahl kleiner, wenn einer oder mehrere jener Punkte Verzweigungspunkte sind. Um die Untersuchung nicht unnöthig zu compliciren, werde ein für alle Mal angenommen, dass für $(x = a)$ drei Verzweigungspunkte V_α, V_β, V_γ übereinander liegen, in denen bzw. α, β, γ Blätter von $\mathfrak{K}$ zusammenhängen, so dass $\alpha + \beta + \gamma = n$ ist; und es sei ferner die Bezeichnung so gewählt, dass die α ersten Blätter in V_α, die β folgenden in V_β, die γ letzten in V_γ zusammenhängen. Alsdann schreiten die Entwicklungen der n conjugirten Zweige $\eta^{(1)}, \cdots, \eta^{(n)}$ einer beliebigen algebraischen Function in der Umgebung der Stelle $(x = a)$ nach ganzen Potenzen bzw. von $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\beta}}$, $(x-a)^{\frac{1}{\gamma}}$ fort, und zwar ergeben sich die Entwicklungen von $\eta^{(1)}, \cdots \eta^{(\alpha)}$ aus der von $\eta^{(1)}$ dadurch, dass man die Potenz $(x-a)^{\frac{1}{\alpha}}$ durch ihre α conjugirten ersetzt, welche sich ja nur durch Einheitswurzeln von einander unterscheiden. Ist μ das kleinste gemeinsame Multiplum von α, β, γ, so kann man einfacher sagen, dass jene n Entwicklungen $\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots, \eta^{(n)}$ nach ganzen Potenzen von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ fortschreiten.

Es seien nun:

$$\begin{aligned}\eta^{(1)} &= a_1(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_1(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,\\ \eta^{(2)} &= a_2(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_2(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \eta^{(n)} &= a_n(x-a)^{\frac{r}{\mu}} + b_n(x-a)^{\frac{r+1}{\mu}} + \cdots\end{aligned}$$

jene n Entwicklungen in der Umgebung der Stelle a, wo eben $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ die niedrigste Potenz von $(x-a)^{\frac{1}{\mu}}$ ist, welche in mindestens einer dieser Entwicklungen vorkommt, so ist diese auch die höchste Potenz von $(x-a)$, für welche der Bruch $\frac{\eta}{(x-a)^{\frac{r}{\mu}}}$ an jener Stelle noch regulär ist; daher soll jene Potenz $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ *der Theiler von* η für jene Stelle a genannt werden. Ist $A(x)$ speciell eine rationale Function von x allein, so besitzt sie stets eine ganzzahlige Potenz von $x-a$ bzw. von $\frac{1}{x}$ als Theiler, und zwar ist jener Theiler im ersten Falle die in $A(x)$ enthaltene Potenz von $x-a$, im zweiten der negativ genommene Grad jener Function. Ist ferner $(x-a)^s$ der Theiler von $A(x)$, und $(x-a)^\varrho$ der Theiler der algebraischen Function η, so ist offenbar $(x-a)^{s+\varrho}$ der Theiler des Productes $A\eta$.

§ 2.

Alle algebraischen Functionen η des Körpers $K(x, y)$ können durch n rational unabhängige unter ihnen $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ eindeutig in der Form

(1) $$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

mit rationalen Functionen von x als Coefficienten dargestellt werden, und zwar bestimmen sich jene Coefficienten aus den n linearen Gleichungen:

$$\eta^{(\varkappa)} = u_1\eta_1^{(\varkappa)} + u_2\eta_2^{(\varkappa)} + \cdots + u_n\eta_n^{(\varkappa)}, \qquad (\varkappa = 1, 2, \cdots, n)$$

welche aus (1) dadurch entstehen, dass man in den $(n+1)$ Functionen $\eta, \eta_1, \cdots, \eta_n$ von y und x y der Reihe nach durch seine n conjugirten Werthe $y^{(1)}, y^{(2)}, \cdots, y^{(n)}$ ersetzt. Die n linearen Functionen $\eta_1, \cdots, \eta_n$ sind demnach dann und nur dann rational unabhängig, wenn die Determinante

$$\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right| = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

einen von Null verschiedenen Werth besitzt.

Es sei $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ein beliebiges rational unabhängiges System von Functionen des Körpers $K(x, y)$. Betrachtet man dann die Gesammtheit aller derjenigen Functionen:

$$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n,$$

deren Coefficienten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ beliebige, aber *ganze* rationale Functionen von x sind, so bilden diese einen Theilbereich $(\mathfrak{A})$ des Körpers $K(x, y)$, einen „Modul“ in der Dedekind'schen Terminologie, und das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ soll eine *Basis* für den Bereich oder Modul $(\mathfrak{A})$ genannt werden.

Sind $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ und $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ zwei Basen für denselben Bereich $(\mathfrak{A})$, so bestehen zwischen ihren Elementen zwei Systeme von je n Gleichungen

$$\zeta_i = \sum_{\varkappa=1}^{n} a_{i\varkappa}\eta_\varkappa; \qquad \eta_\varkappa = \sum_{l=1}^{n} b_{\varkappa l}\zeta_l,$$

in denen die Substitutionscoefficienten $a_{i\varkappa}$ und $b_{\varkappa l}$ ganze Functionen von x sind, deren Determinanten $|a_{i\varkappa}|$ und $|b_{\varkappa l}|$, wie sich leicht ergiebt, von Null verschiedene constante Werthe haben. Zwei Systeme, welche in dieser Beziehung zu einander stehen, gehören auch umgekehrt zu demselben Bereiche $(\mathfrak{A})$ und sollen im Folgenden *äquivalente* Systeme genannt werden. Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich, wenn man zu den Determinanten übergeht, die Beziehung:

$$\left|\zeta_i^{(\varkappa)}\right| = \left|a_{i\varkappa}\right| \left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|,$$

d. h. die Determinanten äquivalenter Systeme unterscheiden sich nur durch eine multiplicative Constante.

Es sei jetzt $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend eine Basis, $(\mathfrak{A})$ der zugehörige Bereich oder Modul, und es sollen nun alle Functionen η von $(\mathfrak{A})$ in der Umgebung der beliebigen Stelle $(x = a)$ untersucht werden, der wieder die drei über einander liegenden Verzweigungspunkte $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ entsprechen. Es seien:

$$(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}}, \quad (x-a)^{\frac{r_2}{\mu}}, \cdots, (x-a)^{\frac{r_n}{\mu}}$$

die Theiler der n Elemente η_i für die Stelle a. Denkt man sich nun die n^2 Elemente der Determinante $\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ sämmtlich nach Potenzen von $(x-a)$ entwickelt, so ergiebt sich eine Gleichung:

$$\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right| = \begin{vmatrix} a_{11}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{1n}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \\ a_{21}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{2n}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1}(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}} + \cdots, \cdots, a_{nn}(x-a)^{\frac{r_n}{\mu}} + \cdots \end{vmatrix} = |a_{i\varkappa}|(x-a)^{\frac{r_1+\cdots+r_n}{\mu}} + \cdots.$$

Ist aber andererseits $(x-a)^{\frac{d}{\mu}}$ der Theiler der Determinante $|\eta_i^{(\varkappa)}|$, ist also die Entwicklung derselben von der Form:

$$|\eta_i^{(\varkappa)}| = \delta(x-a)^{\frac{d}{\mu}} + \varepsilon(x-a)^{\frac{d+1}{\mu}} + \cdots,$$

so ergiebt sich aus der Vergleichung jener beiden Darstellungen unmittelbar die Beziehung

$$\frac{r_1}{\mu} + \frac{r_2}{\mu} + \cdots + \frac{r_n}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu},$$

und zwar ist die Summe der Exponenten links dann und nur dann gleich dem Exponenten $\frac{d}{\mu}$ des Theilers von $|\eta_i^{(\varkappa)}|$, wenn die aus den Coefficienten der Anfangsglieder gebildete Determinante $|a_{i\varkappa}|$ einen von Null verschiedenen Werth hat.

In diesem Falle soll das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ *regulär* für die Stelle $(x = a)$ heissen, und auf solche Systeme beziehen sich die nachfolgenden Betrachtungen.

Es sei also $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend ein reguläres System und allgemein $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ der Theiler von η_i für die Stelle a. Ist dann

$$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

irgend eine Function des Körpers, so ist der Theiler von η für $(x = a)$ mindestens gleich dem niedrigsten unter den Theilern der n Producte $u_1\eta_1, u_2\eta_2, \cdots, u_n\eta_n$; dieser kann aber auch grösser sein, denn es können sich ja in der Entwicklung der n conjugirten Zweige von η die Anfangsglieder sämmtlich fortheben. Es gilt nun aber der Satz, dass dieser zweite Fall dann und nur dann eintritt, wenn jenes System nicht regulär ist.

In der That sei $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ der niedrigste unter den Theilern der n Producte $u_i\eta_i$; dann kann die Entwicklung aller Coefficienten $u_1, \cdots, u_n$ nach Potenzen von $(x-a)$ folgendermassen geschrieben werden:

$$u_i(x) = c_i(x-a)^{\frac{r-r_i}{\mu}} + d_i(x-a)^{\frac{r-r_i+1}{\mu}} + \cdots,$$

wo einige, aber nicht alle Anfangscoefficienten $c_1, c_2, \cdots, c_n$ gleich Null sein können, denn nur dann besitzen *alle* jene Producte $u_i\eta_i$ mindestens den Theiler $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ und keinen höheren. Bildet man aber jetzt die n Anfangscoefficienten $C_1, C_2, \cdots, C_n'$ von $(x-a)^{\frac{r}{\mu}}$ in den n conjugirten Entwicklungen von η in der Umgebung von a, so hängen diese mit den Anfangscoefficienten $c_1, \cdots, c_n$ durch die n Gleichungen zusammen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} C_1 &= c_1 a_{11} + \cdots + c_n a_{1n}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_n &= c_1 a_{n1} + \cdots + c_n a_{nn}, \end{aligned}$$

wo die Coefficienten $a_{i\varkappa}$ die Anfangscoefficienten der Elemente $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ sind. Da aber $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ regulär, also $|a_{i\varkappa}| \gtrless 0$ ist, so können jene n Anfangsglieder nicht alle verschwinden, wenn auch nur eines der Anfangsglieder c_i der Coefficienten von Null verschieden ist.

§ 3.

Den im vorigen Abschnitte bewiesene Satz kann man in der folgenden Form aussprechen:

> Ist $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ein beliebiges rational unabhängiges System, welches für eine Stelle a regulär ist, so ist der Theiler einer beliebigen Function
>
> $$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_n \eta_n$$
>
> für jene Stelle gleich dem grössten gemeinsamen Divisor der n Theiler von $u_1\eta_1, u_2\eta_2, \cdots, u_n\eta_n$, aus denen η besteht.

Ist das System aber kein reguläres, so gilt jener Satz nicht, denn, wie aus den obigen Gleichungen (2) sofort hervorgeht, kann man die Anfangsglieder $c_1, c_2, \cdots, c_n$ der Coefficienten $u_i(x)$ alsdann stets so bestimmen, dass die n Anfangscoefficienten $C_1, \cdots, C_n$ sämmtlich verschwinden. Aus diesem Grunde ist daher der folgende Satz von fundamentaler Bedeutung:

> Jedes algebraische System ist einem regulären Systeme äquivalent.

Zum Beweise dieses Satzes nehme ich zunächst an, dass die Stelle a im Endlichen liege; eine leichte Modification des Beweisganges zeigt, dass jener Satz auch für die Stelle $x = \infty$ richtig ist. Es mögen nun wie vorher die Theiler der Elemente des Systemes $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ der Reihe nach gleich $(x-a)^{\frac{r_1}{\mu}}, (x-a)^{\frac{r_2}{\mu}}, \cdots, (x-a)^{\frac{r_n}{\mu}}$, und $(x-a)^{\frac{d}{\mu}}$ jener Theiler für die Determinante $\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ sein, so dass stets $\sum \frac{r_i}{\mu} \leqq \frac{d}{\mu}$ ist. Die Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ sind dann sämmtlich Brüche, deren Nenner bzw. α, β oder γ sind, je nachdem das Anfangsglied des betreffenden Elementes η zu der Entwicklung um einen der drei bei $x = a$ übereinander liegenden Verzweigungspunkte V_α, V_β oder V_γ gehört. Die Elemente $\eta_1, \cdots, \eta_n$ sollen so angeordnet sein, dass die Exponenten $\frac{r_1}{\mu} \leqq \frac{r_2}{\mu} \leqq \cdots \leqq \frac{r_n}{\mu}$ sind.

Zwei solche Brüche sollen *congruent* heissen, wenn sie sich nur um eine ganze Zahl von einander unterscheiden, wenn also z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ ist, wo k eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Endlich seien die Blätter für den Augenblick so bezeichnet, dass das erste Blatt zu V_α, das zweite zu V_β, das dritte zu V_γ gehört, während die übrigen in irgend einer Reihenfolge auf diese folgen mögen.

Wir betrachten nun neben dem Systeme $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ das System $(a_{i\varkappa})$ seiner Anfangscoefficienten, und auch von diesem nur seine drei ersten Horizontalreihen:

$$(1) \qquad (a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix},$$

denn alle folgenden unterscheiden sich ja von einer von diesen nur um α^{te}, β^{te} oder γ^{te} Wurzeln der Einheit, je nachdem das zugehörige Blatt zu V_α, V_β oder V_γ gehört, sie sind also durch diese mit bestimmt. Alsdann kann man, ohne jenes System im Sinne der Aequivalenz irgendwie zu ändern, irgend eine Colonne von (a) von einer *späteren* abziehen, falls nur die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ congruent sind. Ist nämlich z. B. $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$, wo also $k \geqq 0$ ist, und ersetzt man in jener Basis η_2 durch

$$\eta_2' = \eta_2 - \lambda (x - a)^k \eta_1,$$

so erhält man ein äquivalentes System $(\eta_1, \eta_2', \cdots, \eta_n)$, für welches das System der Anfangsglieder offenbar ist:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} - \lambda a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} - \lambda a_{31} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}.$$

Ebenso kann man jede Colonne von (a) durch eine beliebige Constante λ dividiren, denn dann wird ja nur z. B. η_1 durch $\frac{1}{\lambda}\eta_1$ ersetzt.

Mit Hülfe dieser beiden Sätze kann nun die verlangte Ueberführung leicht bewerkstelligt werden: Von den drei Elementen der ersten Colonne von (a) in (1) muss mindestens eines von Null verschieden sein. Es sei a_{21} das *erste* von diesen; dann mache man es dadurch zu 1, dass man jene ganze Colonne durch a_{21} dividirt, und in dem so umgeformten Systeme

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots \\ 1 & a_{22} & \cdots \\ a_{31} & a_{32} & \cdots \end{pmatrix}$$

mache man nun alle diejenigen Elemente der zweiten Horizontalreihe, für welche die zugehörigen Exponenten $\frac{r_i}{\mu}$ zu $\frac{r_1}{\mu}$ congruent sind, dadurch zu Null, dass man von der betreffenden Colonne ein geeignetes Multiplum der ersten abzieht. In derselben Weise werde nun die zweite Colonne transformirt. Hier sei etwa $a_{12} \gtrless 0$; dann mache man dieses Element zu Eins und alsdann alle folgenden Elemente der *ersten* Zeile zu Null, für welche der zugehörige Exponent zu $\frac{r_2}{\mu}$ congruent ist.

In derselben Weise kann man bis zur letzten Colonne fortfahren, es sei denn, dass einmal, etwa für die i^{te} Colonne, alle Elemente a_{1i}, a_{2i}, a_{3i} zu Null geworden sind. Alsdann sind aber in dem zugehörigen transformirten Elemente $\overline{\eta}_i$ *alle* n Coefficienten von $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ in den n conjugirten Entwicklungen gleich Null, d. h. $\overline{\eta}_i$ besitzt dann nicht den Theiler $(x-a)^{\frac{r_i}{\mu}}$ sondern einen höheren, also mindestens $(x-a)^{\frac{r_i+1}{\mu}}$. Ist dies aber der Fall, so ordne man die letzten Elemente $\overline{\eta}_i, \cdots, \overline{\eta}_n$ wieder nach der Grösse ihrer Theiler, wobei eventuell $\overline{\eta}_i$ mit einem späteren Elemente zu vertauschen ist. Da aber unter der hier gemachten Voraussetzung die Summe der Exponenten $\sum \frac{r_i}{\mu}$ mindestens um $\frac{1}{\mu}$ gewachsen ist, und da sie andererseits nicht über $\frac{d}{\mu}$ hinaus zunehmen kann, so muss man bei Fortsetzung des Verfahrens zuletzt zu einem Systeme kommen, bei welchem niemals alle Elemente einer Colonne zugleich Null sind. Führt man jetzt die hier geschilderte Umformung bis zu Ende durch und ordnet dann die Colonnen so, dass zuerst diejenigen stehen, in welchen das erste der drei Colonnenelemente gleich Eins ist, dann alle die, für welche das zweite Element gleich Eins ist, so erhält man ein zu $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ äquivalentes System, dessen Anfangssystem jetzt die folgende Gestalt hat:

$$(1^a) \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1; & 1 & 0 & \cdots & 0; & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_\alpha; & 1 & 1 & \cdots & 1; & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_\alpha; & c_1 & c_2 & \cdots & c_\beta; & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Anzahl der von Null verschiedenen Elemente der ersten Zeile muss dann genau gleich α sein; da nämlich diese Zeile zu V_α gehört, so müssen alle Exponenten $\frac{r_1}{\mu}, \cdots$ incongruente Brüche mit dem Nenner α sein, und ihre Anzahl kann daher nicht grösser als α sein, da es nicht mehr als α incongruente Brüche mit diesem Nenner giebt; genau ebenso folgt, dass die Anzahl der Elemente Eins in der zweiten bzw. dritten

Zeile höchstens β bzw. γ sein kann. Endlich kann aber auch keine jener drei Anzahlen kleiner sein als α, β oder γ; denn sonst würde man ja in mindestens einer Colonne lauter Nullen erhalten, das Verfahren wäre somit noch nicht bis zu Ende durchgeführt.

Die zu den α ersten Colonnen dieses Systemes gehörigen Exponenten $\frac{r}{\mu}$ besitzen nun alle den Nenner α; sie bilden somit ein vollständiges System incongruenter Brüche mit diesem Nenner und mögen daher jetzt durch

$$\frac{\varrho_1}{\alpha}, \frac{\varrho_2}{\alpha}, \ldots, \frac{\varrho_\alpha}{\alpha}$$

bezeichnet werden. Genau ebenso mögen die Brüche

$$\frac{\sigma_1}{\beta}, \frac{\sigma_2}{\beta}, \ldots, \frac{\sigma_\beta}{\beta} \quad \text{und} \quad \frac{\tau_1}{\gamma}, \frac{\tau_2}{\gamma}, \ldots, \frac{\tau_\gamma}{\gamma}$$

die Exponenten bezeichnen, welche bzw. zu den β folgenden und zu den γ letzten Colonnen gehören und welche ebenfalls vollständige Systeme incongruenter Brüche mit dem Nenner β und γ bilden.

Schreibt man jetzt die Anfangsglieder für alle α zu V_α gehörigen Blätter unter jene erste Zeile hinunter und beachtet dabei, dass diese sich von jener ersten nur um α^{te} Wurzeln der Einheit unterscheiden, so bilden die α ersten Colonnen ein Partialsystem:

$$(2) \qquad S_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \cdots & \omega_\alpha \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \omega_1^{\alpha-1} & \omega_2^{\alpha-1} & \cdots & \omega_\alpha^{\alpha-1} \end{pmatrix},$$

dessen Determinante den von Null verschiedenen Werth $\alpha^{\frac{\alpha}{2}}$ besitzt, denn sie ist die Quadratwurzel aus der Discriminante der Kreistheilungsgleichung $\omega^\alpha - 1 = 0$. Alle Elemente der $\beta + \gamma$ folgenden Colonnen aber sind gleich Null. Schreibt man in derselben Weise alle n^2 Anfangsglieder jenes transformirten Systemes unter die erste, zweite oder dritte Zeile unseres transformirten Systemes, so erhält man ein System, welches in leicht verständlicher Bezeichnung folgendermassen geschrieben werden kann:

$$(S) = \begin{pmatrix} S_\alpha, & 0, & 0 \\ *, & S_\beta, & 0 \\ *, & *, & S_\gamma \end{pmatrix},$$

wo S_α das System (2) von α Zeilen ist und S_β und S_γ die entsprechenden aus den β^{ten} und γ^{ten} Einheitswurzeln gebildeten Systeme von β bzw. γ Zeilen bedeuten. Die Sterne bedeuten, dass dort verschwindende oder nicht verschwindende Elemente stehen, welche bzw. aus den Grössen a_i, b_i, c_i und den bezüglichen Einheitswurzeln gebildet sind. Da nun die Determinante $|S|$ jenes Systemes durch die Gleichung

$$|S| = |S_\alpha|\cdot|S_\beta|\cdot|S_\gamma| = \alpha^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\beta^{\frac{\beta}{2}}\cdot\gamma^{\frac{\gamma}{2}}$$

bestimmt, also von Null verschieden ist, so ist das so gefundene System regulär, also der Satz vollständig bewiesen.

Ist die Stelle $a = \infty$ der unendlich ferne Punkt, bei welchem die drei Verzweigungspunkte V_α, V_β, V_γ übereinander liegen, so ist der einzige Unterschied der, dass das System

$$(a) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \end{pmatrix}$$

im Sinne der Aequivalenz ungeändert bleibt, wenn man irgend eine Verticalreihe von einer *früheren* abzieht, falls die bezüglichen Exponenten congruente Brüche sind. Ist nämlich wieder etwa $\frac{r_2}{\mu} = \frac{r_1}{\mu} + k$ und ersetzt man jetzt η_1 durch

$$\eta_1' = \eta_1 - \lambda x^k \eta_2,$$

so sind die Coefficienten von $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{r_1}{\mu}}$ jetzt bzw. gleich $a_{11} - \lambda a_{12}$, $a_{21} - \lambda a_{22}$, $a_{31} - \lambda a_{32}$. In diesem Falle muss man also die Transformation nicht von der ersten, sondern von der letzten Colonne aus beginnen, man erkennt aber ohne Weiteres, dass man zuletzt zu genau demselben Resultate gelangt, wie früher.

§ 4.

Die Fundamentalaufgabe der Theorie der algebraischen Functionen kann nunmehr folgendermassen formulirt werden:

> Es sollen alle Functionen des Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche in h beliebig gegebenen Punkten
>
> $$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$$
>
> (I) der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ mindestens von den Ordnungen
>
> $$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$$
>
> sind und sich im Uebrigen auf der ganzen Kugelfläche regulär verhalten.

Diese Aufgabe lässt sich wesentlich einfacher aussprechen, wenn man jene Punkte zu einem Punktsysteme

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1}\mathfrak{P}_2^{\lambda_2}\cdots\mathfrak{P}_h^{\lambda_h}.$$

vereinigt, in welchem jeder der h Punkte $\mathfrak{P}_i$ denjenigen Exponenten λ_i erhält, welcher durch die zugehörige positive oder negative Ordnungszahl λ_i bestimmt ist. Ohne jenes System $\mathfrak{Q}$ im Geringsten zu ändern, kann man ihm einen oder mehrere Punkte mit dem Exponenten Null hinzufügen, und ebenso kann man aus $\mathfrak{Q}$ alle diejenigen Punkte fortlassen, deren Exponent gleich Null ist.

Eine Function ξ *gehört* zu dem Punktsystem $\mathfrak{Q}$, wenn sie in einem jeden Punkte $\mathfrak{P}$ desselben mindestens die zugehörige Ordnungszahl λ_i besitzt und sich im Uebrigen regulär verhält; bei Benutzung dieser Definition kann die zu lösende Aufgabe folgendermassen ausgesprochen werden:

(I′) Es sollen alle Grössen des Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche zu einem gegebenen Punktsystem $\mathfrak{Q}$ gehören.

Bei der Lösung dieser Aufgabe kann ohne jede Beeinträchtigung ihrer Allgemeinheit vorläufig angenommen werden, dass weder einer der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$, von $\mathfrak{Q}$ noch auch einer der Verzweigungspunkte V_α, $V_\beta, \cdots, V_\delta$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ an der Stelle $x = \infty$ sich befinden. Sollte dies nämlich nicht der Fall sein, so genügt es offenbar, von vornherein an Stelle von x die Grösse

$$x' = \frac{1}{x - a_0}$$

als unabhängige Variable einzuführen und a_0 irgendwie so zu wählen, dass an der Stelle $(x = a_0)$ keiner jener Punkte sich befindet. Im Folgenden kann und soll daher vorläufig angenommen werden, dass jene Voraussetzung bereits für die Variable x erfüllt ist.

Das Problem (I) kann nun leicht auf die Lösung der folgenden einfacheren Aufgabe zurückgeführt werden:

(I^a) Es sollen alle Functionen der Körpers $K(x, y)$ gefunden werden, welche in den h im Endlichen liegenden Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$ bzw. mindestens die gegebenen Ordnungszahlen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ besitzen und sonst für alle *im Endlichen liegenden* Punkte regulär sind.

Alle diese Functionen bilden dann einen Bereich (J), ein „Ideal“ in der Dedekind'schen Terminologie. Dieser Bereich ist durch das zugehörige Punktsystem $\mathfrak{Q}$ vollständig charakterisirt.

Für die einem Bereiche (J) angehörigen Functionen bestehen offenbar folgende Sätze:

1) Sind $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_r$ irgendwelche Functionen des Bereiches (J), so gehört auch jede Function

$$\eta = u_1 \eta_1 + u_2 \eta_2 + \cdots + u_r \eta_r$$

demselben Bereiche an, wenn die Coefficienten beliebige, aber *ganze* Functionen von x sind.

2) Jede Function ζ des Körpers $K(x, y)$ kann mit einer solchen *ganzen* Function $g(x)$ von x multiplicirt werden, dass das Product $\eta = g \cdot \zeta$ zu (J) gehört. Gehört nämlich die Function ζ nicht schon selbst zu (J), so ist sie nur in einer endlichen Anzahl von endlichen Stellen nicht regulär, bzw. von niedrigerer als der verlangten Ordnung, und man kann daher $g(x)$ stets so wählen, dass das Product $\eta = g(x)\zeta$ dem Bereiche (J) angehört.

3) Aus 2) folgt, dass man stets ein System von n rational unabhängigen Functionen $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ von $K(x, y)$ so wählen kann, dass sie sämmtlich zu (J) gehören; denn ist $\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n$ irgend ein solches System, dessen Elemente nicht alle zu (J) gehören, so kann man dasselbe durch Multiplication seiner Elemente mit ganzen Functionen $g_1, g_2, \cdots, g_n$ in ein anderes, offenbar ebenfalls unabhängiges System $(g_1\zeta_1, g_2\zeta_2, \cdots, g_n\zeta_n) = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ verwandeln, dessen Elemente jenem Bereiche angehören. Alsdann gehört nach dem ersten Satze jede Function

$$\eta = u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_n\eta_n$$

zu (J), wenn die Coefficienten $u_1, u_2, \cdots, u_n$ beliebige *ganze* Functionen von x sind. Bilden also $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ irgend ein rational unabhängiges System, dessen Elemente sämmtlich dem Bereiche (J) angehören, so gehört der ganze durch $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ constituirte Modul $(\mathfrak{A})$ ebenfalls zu (J).

Es sei nun $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ eine beliebige Basis, deren Elemente sämmtlich dem Bereiche (J) angehören, dann gehört der ganze durch sie constituirte Modul $(\mathfrak{A})$ ebenfalls zu (J) und bildet somit einen Theilbereich jenes Ideales, jedoch fallen im Allgemeinen jene beiden Bereiche nicht zusammen, sondern es giebt Functionen von (J), welche nicht zu $(\mathfrak{A})$ gehören, welche also, durch die Basis $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ ausgedrückt, in gebrochener Form erscheinen. Man kann aber aus jener Basis stets eine andere $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ von der Art ableiten, dass dieselbe eine Basis für das *ganze* Ideal bildet, dass also der durch $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots, \zeta_n)$ repräsentirte Modul mit dem Bereiche (J) identisch ist; eine solche Basis soll *ein Fundamentalsystem für* (J) genannt werden.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$ wieder in der Umgebung irgend einer endlichen Stelle a. Es mögen hier wieder die drei Verzweigungspunkte V_α, V_β und V_γ über einander liegen, und es seien ϱ, σ und τ die Ordnungszahlen, welche alle Functionen von (J) dort mindestens besitzen müssen; diese Zahlen sind dann entweder gewisse unter den Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_h$ des zu (J) gehörigen Systemes $\mathfrak{Q}$ oder aber sie sind gleich Null, je nachdem der betreffende von jenen Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ zu $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_h$ gehört oder nicht.

Dann kann man, wie jetzt gezeigt werden soll, von dem beliebig gegebenen Systeme $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ ausgehend zu einem anderen $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ gelangen, welches als ein Fundamentalsystem für (J) in Bezug auf die Stelle $(x = a)$ bezeichnet werden kann. Dasselbe zerfällt nämlich, entsprechend den drei zu a gehörigen Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ, in drei Partialsysteme:

$$\zeta_1, \cdots \zeta_\alpha; \; \zeta_{\alpha+1}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}; \; \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n.$$

Betrachtet man das erste, zu V_α gehörige Partialsystem

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha$$

für sich, so beginnen die Entwicklungen seiner α Elemente in der Umgebung von V_α mit

$$(x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}, \; (x-a)^{\frac{\varrho+1}{\alpha}}, \cdots (x-a)^{\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}},$$

besitzen also hier der Reihe nach die Ordnungszahlen

$$\varrho, \; \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1,$$

während in der Umgebung der anderen Punkte V_β und V_γ alle ihre Glieder bis zu einer beliebig hohen Potenz von $(x-a)$ hin fortfallen, so dass man in diesem Sinne behaupten kann, dass ihnen für V_β und V_γ die Ordnungszahl ∞ zukommt. Jenes Fundamentalsystem

$$\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha; \; \zeta_{\alpha+1}, \zeta_{\alpha+2}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}; \; \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$$

besitzt also der Reihe nach die Ordnungszahlen:

$$\begin{array}{llll}
\text{für } V_\alpha: & \varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1; & \infty \quad \infty \cdots \infty \quad ; & \infty \quad \infty \cdots \infty, \\
\text{für } V_\beta: & \infty \quad \infty \cdots \infty \quad ; & \sigma, \sigma+1, \cdots \sigma+\beta-1; & \infty \quad \infty \cdots \infty, \\
\text{für } V_\gamma: & \infty \quad \infty \cdots \infty \quad ; & \infty \quad \infty \cdots \infty \quad ; & \tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1.
\end{array}$$

Ein solches System von α Elementen $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_\alpha$, welches in der Umgebung eines Punktes V_α die Ordnungszahlen $\varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1$, aber für alle darüber liegenden Punkte der Riemann'schen Fläche V_β, V_γ, die Ordnung ∞ besitzt, soll ein *Partialsystem von der Ordnung ϱ für den Punkt V_α* genannt werden. Mit Hülfe dieser Bezeichnung kann der zu beweisende Satz folgendermassen ausgesprochen werden:

Jede zu (J) gehörige Basis $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ kann in eine andere transformirt werden, welche in lauter Partialsysteme, entsprechend den an der betrachteten Stelle über einander liegenden Punkten V_α, V_β, V_γ, zerfällt, und deren Ordnungen ϱ, σ, τ gleich denen sind, welche die zugehörigen Punkte in dem Bereiche (J) besitzen.

Zum Beweise dieses wichtigen Satzes braucht man nur zu zeigen, dass $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ in ein anderes System $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ transformirt werden kann, welches nur in der Umgebung *eines* jener drei Verzweigungspunkte, etwa von V_γ, die verlangten Eigenschaften besitzt, dass nämlich seine ersten $\alpha+\beta$ Elemente $\zeta_1, \cdots \zeta_{\alpha+\beta}$ dort die Ordnungszahl ∞ besitzen, während die γ letzten $\zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$ der Reihe nach die Ordnungszahlen $\tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1$ haben. Ist dieser Beweis nämlich geführt, so kann man das ganze System successive für V_γ, V_β, V_α so umformen, dass es ein Fundamentalsystem für (J) in Bezug auf die Stelle $(x=a)$ wird.

Wir nehmen zunächst an, dass die Punkte V_α, V_β, V_γ so bezeichnet sind, dass $\frac{\varrho}{\alpha} \leqq \frac{\sigma}{\beta} \leqq \frac{\tau}{\gamma}$ ist; ferner denken wir uns, das gegebene System von vornherein so gegeben, dass es für die Stelle a regulär ist, was nach den Resultaten des letzten Abschnittes stets möglich ist; es sei wieder das aus den Anfangscoefficienten gebildete dreizeilige System das folgende:

$$\begin{pmatrix} 1\ 1 \cdots 1; & 0\ 0 \cdots 0; & 0\ 0 \cdots 0 \\ a_1\, a_2 \cdots a_\alpha; & 1\ 1 \cdots 1; & 0\ 0 \cdots 0 \\ b_1\, b_2 \cdots b_\alpha; & c_1\, c_2 \cdots c_\beta; & 1\ 1 \cdots 1 \end{pmatrix}.$$

Die Exponenten der zugehörigen Theiler der letzten γ Elemente

$$\eta_{\alpha+\beta+1},\ \eta_{\alpha+\beta+2}, \cdots \eta_n,$$

auf welche es im Folgenden allein ankommt,

$$\frac{\tau_0}{\gamma},\ \frac{\tau_1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau_{\gamma-1}}{\gamma},$$

bilden dann ein vollständiges System incongruenter Brüche mit dem Nenner γ, welche alle gleich oder grösser als $\frac{\tau}{\gamma}$ sind, und die von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden können, dass sie der Reihe nach den γ aufeinander folgenden Brüchen

$$\frac{\tau}{\gamma},\ \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$$

congruent sind, so dass also allgemein

$$\frac{\tau_i}{\gamma} = \frac{\tau+i}{\gamma} + k_i \qquad (i=0,1,\cdots \gamma-1)$$

ist, wo k_i eine ganze nicht negative Zahl bezeichnet. Alsdann bleibt z. B. das zu dem Theiler

$$(x-a)^{\frac{\tau_0}{\gamma}} = (x-a)^{\frac{\tau}{\gamma}+k_0}$$

gehörige Element $\eta_{\alpha+\beta+1}$ in dem Bereiche (J), wenn man dasselbe durch die ganzzahlige Potenz $(x-a)^{k_0}$ dividirt; denn alsdann beginnt es in der Umgebung von V_γ genau mit der $\frac{\tau}{\gamma}^{\text{ten}}$, aber bei V_α und V_β mit einer höheren als der $\frac{\tau}{\gamma}^{\text{ten}}$ Potenz von $x-a$, also a fortiori mit einer höheren als der $\frac{\varrho}{\alpha}^{\text{ten}}$ bezw. $\frac{\sigma}{\beta}^{\text{ten}}$ Potenz, während ihr Verhalten für alle anderen endlichen Stellen durch die Division mit $(x-a)^{k_0}$ offenbar in keiner Weise geändert ist. Genau ebenso kann man weiter erreichen, dass für diese letzten γ Elemente die Exponenten der bezüglichen Theiler der Reihe nach die Brüche $\frac{\tau}{\gamma}, \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$ sind, während sich das System der Anfangscoefficienten sonst in keiner Weise geändert hat.

Jetzt kann man endlich bewirken, dass die $\alpha+\beta$ ersten Elemente in der Umgebung von V_γ sämmtlich die Ordnungszahl ∞ besitzen. In der That sei etwa t die Ordnungszahl von η_1, also:

$$\eta_1 = e(x-a)^{\frac{t}{\gamma}} + \cdots$$

die Entwicklung von η_1 in V_γ, so ist $\frac{t}{\gamma} \geqq \frac{\tau}{\gamma}$ und einem Bruche der Reihe $\frac{\tau}{\gamma}, \frac{\tau+1}{\gamma}, \cdots \frac{\tau+\gamma-1}{\gamma}$ congruent. Ist also z. B. $\frac{t}{\gamma} = \frac{\tau+i}{\gamma} + k$ und ersetzt man η_1 durch das neue Element

$$\eta_1' = \eta_1 - e(x-a)^k \eta_{\alpha+\beta+i-1},$$

so erhält man eine neue Basis $(\eta_1', \eta_2, \cdots \eta_n)$, aber η_1' ist von einer mindestens um Eins höheren Ordnung als η_1, da sich hier das Anfangsglied $e(x-a)^{\frac{t}{\gamma}}$ forthebt. Geht man in derselben Weise fort, so erhält man schliesslich ein neues System, dessen $\alpha+\beta$ erste Elemente in V_γ in der That von beliebig hoher Ordnung, also von der Ordnung ∞ sind.

Jetzt forme man die $\alpha+\beta$ ersten Elemente $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_{\alpha+\beta}$ des neuen Systemes so um, dass dasselbe in der Umgebung der beiden ersten Verzweigungspunkte regulär wird. Hierdurch wird an dem Verhalten des ganzen Systemes in der Umgebung von V_γ gar nichts geändert, da seine $\alpha+\beta$ ersten Elemente vor und nach jener Umformung die Ordnung ∞ haben. Alsdann reducire man genau wie vorher die Exponenten $\frac{\sigma_0}{\beta}, \frac{\sigma_1}{\beta}, \cdots \frac{\sigma_{\beta-1}}{\beta}$ der Theiler von $\eta_{\alpha+1}, \cdots \eta_{\alpha+\beta}$ der Reihe nach auf $\frac{\sigma}{\beta}, \frac{\sigma+1}{\beta}, \cdots \frac{\sigma+\beta-1}{\beta}$ und bewirke dann wieder, dass sowohl die α ersten als auch die γ letzten Elemente die Ordnung ∞ erhalten; und endlich reducire man in gleicher Weise die Exponenten der Theiler von $\eta_1, \cdots \eta_\alpha$ auf $\frac{\varrho}{\alpha}, \frac{\varrho+1}{\alpha}, \cdots \frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}$ und die Ordnungszahlen der $\beta+\gamma$ folgenden Elemente in der Umgebung von V_α auf ∞. Man erkennt so, dass auf diesem Wege das ganze System in der verlangten Art umgeformt wird, da bei keiner jener Transformationen das Ergebniss eines früheren Schnittes vernichtet wird.

§ 5.

Das im vorigen Abschnitte gefundene System

$$\zeta_1, \cdots \zeta_\alpha;\ \zeta_{\alpha+1}, \cdots \zeta_{\alpha+\beta};\ \zeta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \zeta_n$$

ist zwar noch kein absolutes Fundamentalsystem für das Ideal (J), dagegen kann es als ein solches für die Stelle $(x = a)$ bezeichnet werden. Es gilt nämlich der Satz:

Eine algebraische Function

$$\zeta = u_1 \zeta_1 + \cdots + u_n \zeta_n$$

kann nur dann dem Bereiche (J) angehören, wenn alle Coefficienten $u_1, u_2, \cdots u_n$ an der Stelle $(x = a)$ endlich sind, wenn also keiner derselben den Linearfactor $x - a$ im Nenner enthält.

In der That: Wäre dies nicht der Fall, so könnte man offenbar n nicht sämmtlich verschwindende Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ so bestimmen, dass die Function

$$\zeta = \frac{c_1 \zeta_1 + c_2 \zeta_2 + \cdots + c_n \zeta_n}{x - a}$$

dem Ideale (J) angehörte. Ist aber c_i die erste nicht verschwindende dieser n Zahlen und ist z. B. $i \leqq \alpha$, so ist das erste Glied der Entwicklung von ζ in der Umgebung von V_α dasjenige, welches von $\dfrac{c_i \zeta_i}{x - a}$ herrührt, also gleich

$$c_i (x - a)^{\frac{\varrho + i - 1}{\alpha} - 1},$$

und dieses hebt sich nicht fort, da $\eta_{i+1}, \cdots \eta_\alpha$ von höherer Ordnung als η_i und alle folgenden von der Ordnung ∞ sind. Da somit die Function ζ unter dieser Voraussetzung von der Ordnung $\varrho - (\alpha - i + 1)$, also von niedrigerer als der ϱ^{ten} Ordnung wäre, so gehört sie nicht zu (J), und die soeben aufgestellte Behauptung ist bewiesen.

Durch die elementaren Betrachtungen der Determinantentheorie erschliesst man, dass jedes Fundamentalsystem $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ für die Stelle a aus einem von ihnen $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ durch eine Substitution

$$\eta_i = \sum a_{i\varkappa}(x) \zeta_\varkappa$$

hervorgeht, deren Coefficienten $a_{i\varkappa}$ für jene Stelle ganz sind, also den Factor $(x - a)$ nicht im Nenner enthalten, und deren Determinante durch denselben nicht theilbar ist. Bildet man für zwei solche „für die Stelle a äquivalente Systeme“ die Determinanten $\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ und $\left|\zeta_i^{(\varkappa)}\right|$, so besitzen diese also dieselbe Potenz von $(x-a)$ als Theiler.

Es ist jetzt leicht, die Potenz des Linearfactors $(x-a)$ zu ermitteln, welche in der Determinante $D=\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ dieses Fundamentalsystemes für die Stelle $(x=a)$ enthalten ist. Hierbei können nämlich alle diejenigen Elemente $\eta_i^{(\varkappa)}$ einfach durch Null ersetzt werden, deren Ordnung an den betrachteten Stellen V_α, V_β, V_γ unendlich gross ist. Thut man aber dieses, so reducirt sich D einfach auf das Product

$$D_\alpha \cdot D_\beta \cdot D_\gamma,$$

wo D_α, D_β, D_γ die Determinanten der zu den drei Verzweigungspunkten gehörigen Partialsysteme bedeuten. So ist z. B.

$$D_\alpha = \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_\alpha^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_\alpha^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(\alpha)} & \eta_2^{(\alpha)} & \cdots & \eta_\alpha^{(\alpha)} \end{vmatrix}.$$

Beachtet man ferner, dass $\eta_1^{(1)}, \cdots \eta_\alpha^{(1)}$ nebst allen ihren Conjugirten bzw. mit $(x-a)^{\frac{\varrho}{\alpha}}, \cdots (x-\alpha)^{\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}}$ beginnen, so erkennt man, dass die Determinante D_α mit

$$(x-\alpha)^{\frac{\varrho}{\alpha}+\frac{\varrho+1}{\alpha}+\cdots+\frac{\varrho+\alpha-1}{\alpha}} = (x-a)^{\varrho+\frac{\alpha-1}{2}}$$

beginnt, und dieses Glied hebt sich nicht fort, da sein Zahlencoefficient, die aus den Anfangsgliedern von D_α gebildete Determinante, wie in (2) S. 448 gezeigt wurde, von Null verschieden, nämlich gleich $\alpha^{\frac{\alpha}{2}}$ ist.

Nimmt man jetzt also allgemein an, dass an der Stelle a nicht bloss drei, sondern beliebig viele Verzweigungspunkte V_α, V_β, $V_\gamma, \cdots V_\delta$ über einander liegen, so ergiebt sich, dass die Determinante $D=\left|\eta_i^{(\varkappa)}\right|$ genau durch die Potenz

$$(x-a)^{\varrho+\sigma+\tau+\cdots+\chi+\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}+\cdots+\frac{\delta-1}{2}} = (x-a)^{r+\frac{o}{2}}$$

theilbar ist, wo r die Summe der Ordnungszahlen bedeutet, welche den Punkten $V_\alpha, \cdots V_\delta$ für das Ideal (J) zukommt, und $o=\Sigma(\alpha-1)$ die Summe der Ordnungszahlen ist, welche jene Verzweigungspunkte auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ besitzen.

Formt man nun das so erhaltene System für eine andere Stelle $(x=b)$ ebenso um, so erhält man ein neues System, dessen Determinante den Linearfactor $x - b$ in der entsprechenden Potenz $r' + \frac{o'}{2}$ enthält, ohne dass sich ihre übrigen Linearfactoren geändert haben. Geht man nun von einem beliebigen Systeme $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ aus und formt dasselbe successive in der Umgebung aller derjenigen Stellen $a, b, \cdots$ in der hier geschilderten Weise um, für welche die Determinante die zugehörigen Linearfactoren $x - a$, $x - b, \cdots$ noch nicht in der niedrigsten Potenz $r + \frac{o}{2}$, $r' + \frac{o'}{2}, \cdots$ enthält, so gelangt man *nach einer endlichen Anzahl* von solchen Reductionen zu einem Systeme $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$, welches für *jede* endliche Stelle von $\mathfrak{K}$ ein Fundamentalsystem für den Bereich (J) ist; dieses System ist also ein absolutes Fundamentalsystem für (J).

§ 6.

Wir benutzen das soeben gefundene Resultat zunächst zur Ableitung eines für das Folgende wichtigen Satzes: Ist $(\xi_1 \cdots \xi_\alpha, \xi_{\alpha+1} \cdots \xi_{\alpha+\beta}, \xi_{\alpha+\beta+1}, \cdots \xi_n)$ wieder ein Fundamentalsystem für das Ideal J, welches entsprechend den bei der Stelle $(x = a)$ übereinander liegenden Verzweigungspunkten V_α, V_β, V_γ in die drei Partialsysteme bzw. von den Ordnungen ϱ, σ, τ zerfällt, so ist:

$$\xi_a = \xi_1 + \xi_{\alpha+1} + \xi_{\alpha+\beta+1}$$

eine Function des Bereiches (J), welche in den conjugirten Punkten V_α, V_β, V_γ, die der Stelle $(x = a)$ entsprechen, *genau die* Ordnungszahlen ϱ, σ, τ besitzt, welche den Punkten V_α, V_β, V_γ in dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ zukommt, wobei z. B. $\varrho = 0$ zu setzen ist, wenn V_α gar nicht in $\mathfrak{Q}$ auftritt u. s w. So kann man für eine jede Stelle $(x = a)$ der unabhängigen Variablen eine solche *zugehörige Function* ξ_a innerhalb (J) berechnen.

Es seien nun:

$$x = a, \quad x = b, \cdots x = c$$

alle und nur die Werthe der unabhängigen Variablen, denen überhaupt Punkte im Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ entsprechen, und es bedeuten:

$$\xi_a, \ \xi_b, \ \cdots \ \xi_c$$

Functionen von (J), welche bzw. den Stellen $a, b, \cdots c$ in dem eben angegebenen Sinne zugehören. Es sei endlich:

$$T(x) = (x-a)^r (x-b)^s \cdots (x-c)^t$$

eine *ganze rationale* Function von x allein, welche dem Ideale (J) ebenfalls angehört, welche aber in jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ von $\mathfrak{Q}$ von höherer als der λ_i^{ten} Ordnung ist; offenbar können die positiven Exponenten $r, s, \cdots t$ stets so gross gewählt werden, dass diesen Bedingungen genügt wird.

Bilden wir dann die Summe:

$$\xi_{\mathfrak{Q}} = \xi_a \cdot \frac{T(x)}{(x-a)^r} + \xi_b \cdot \frac{T(x)}{(x-b)^s} + \cdots + \xi_c \cdot \frac{T(x)}{(x-c)^t},$$

so ist $\xi_{\mathfrak{Q}}$ eine Function von (J), welche an jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ *genau* von der zugehörigen Ordnung λ_i und von keiner höheren Ordnung ist. In der That, gehört $\mathfrak{P}_1$ z. B. zu der Stelle $(x=a)$, so ist n. d. V. ξ_a in $\mathfrak{P}_1$ genau von der λ_1^{ten} Ordnung, während $\frac{T(x)}{(x-a)^r}$ hier von der nullten, alle folgenden Summanden von $\xi_{\mathfrak{Q}}$ aber von höherer als der λ_1^{ten} Ordnung sind, und das Entsprechende können wir für jeden anderen Punkt des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ beweisen.

(I) Eine Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$, welche in jedem Punkte $\mathfrak{P}_i$ eines Punktsystemes $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ *genau* von der Ordnung λ_i ist, soll eine zu $\mathfrak{Q}$ *zugeordnete* Function genannt werden. Zu einem beliebigen Punktsysteme $\mathfrak{Q}$, dessen Exponenten λ_i positiv negativ oder auch Null sein können, kann man also stets eine zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$ berechnen.

Aus diesem Satze ziehen wir gleich einige Folgerungen. Es sei $(x = a)$ eine beliebige endliche oder die unendlich ferne Stelle der unabhängigen Variablen, und es mögen:

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\nu$$

die sämmtlichen zugehörigen conjugirten Punkte der Riemann'schen Fläche sein, welche reguläre oder Verzweigungspunkte sein können. Wählen wir dann:

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_2 \mathfrak{P}_3 \cdots \mathfrak{P}_\nu,$$

so ist die zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}}$ so beschaffen, dass sie in $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden ist, während sie in allen conjugirten Punkten verschwindet. Wählen wir ferner einfach

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{P}_1,$$

so verschwindet die zugeordnete Function $\xi_{\mathfrak{Q}'}$ in $\mathfrak{P}_1$, und zwar genau von der ersten Ordnung: Es bestehen also die beiden Sätze, welche im Folgenden gebraucht werden sollen:

(II) Innerhalb eines Körpers K existiren stets Functionen, welche in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{P}_1$ endlich und von Null verschieden sind, in allen conjugirten Punkten aber verschwinden, und ebenso existiren stets Functionen, welche in einem beliebigen Punkte von der ersten und von keiner höheren Ordnung sind.

Ebenso, wie durch ein Punktsystem $\mathfrak{Q}$ das zugehörige Fundamentalsystem, so ist auch durch das Fundamentalsystem das zugehörige Punktsystem $\mathfrak{Q}$ eindeutig bestimmt. In der That ergiebt sich nämlich offenbar aus den Resultaten des vorigen Abschnittes der folgende wichtige Satz:

(III) Ein System $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ ist dann und nur dann ein Fundamentalsystem für ein Punktsystem, wenn es für jede endliche Stelle $(x = a)$ einem anderen äquivalent ist, welches entsprechend den jener Stelle zugehörigen Punkten $V_\alpha, V_\beta, \cdots V_\gamma$ der Riemann'schen Fläche in lauter Partialsysteme zerfällt. Ist dann für einen beliebigen Punkt $\mathfrak{P}$ das zugehörige Partialsystem von der Ordnung λ, so enthält das Punktsystem $\mathfrak{Q}$ genau die λ^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$, d. h. es ist:

$$\mathfrak{Q} = \prod \mathfrak{P}^\lambda,$$

wo das Product offenbar nur über diejenigen Punkte $\mathfrak{P}$ erstreckt zu werden braucht, für welche die Ordnungszahlen λ von Null verschieden sind.

Endlich wollen wir diese Eigenschaft des Fundamentalsystemes für ein Punktsystem $\mathfrak{Q}$ dazu benutzen, um die Determinante

$$D(\mathfrak{Q}) = \left| \xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \cdots \xi_n^{(i)} \right|$$

des zugehörigen algebraischen Systemes zu berechnen. Da ihr Quadrat eine rationale Function von x allein ist, so ist diese Aufgabe gelöst, wenn man angeben kann, wie oft ein beliebiger Linearfactor $x - a$ in $D(\mathfrak{Q})$ enthalten ist. Nun war aber für jede Stelle $(x = a)$

$$D(\mathfrak{Q}) = D_\alpha D_\beta \cdots D_\gamma$$

wenn $D_\alpha \cdots D_\gamma$ die Determinanten der einzelnen zu $(x = a)$ gehörigen Partialsysteme bedeuten, und da ferner für jedes Partialsystem z. B. die Determinante D_α genau durch $(x - a)^{\lambda + \frac{\alpha - 1}{2}}$ theilbar war, etc., so ergiebt sich für $D(\mathfrak{Q})$ sofort die einfache Darstellung:

$$D(\mathfrak{Q}) = \prod_{(\mathfrak{P})} (x - a)^{\lambda + \frac{\alpha - 1}{2}}, \tag{1}$$

wo sich das Product zunächst auf jeden endlichen Punkt $\mathfrak{P}$ erstreckt, und λ seine Ordnungszahl für $\mathfrak{Q}$, $\alpha - 1$ seine Verzweigungsordnung und $x - a$ den zugehörigen Linearfactor bedeutet.

Diese Gleichung kann man in einer sehr übersichtlichen Form schreiben. Zu diesem Zwecke betrachten wir statt $\mathfrak{Q}$ speciell das Punktsystem $\mathfrak{Q}_0 = 1$, welches also keinen einzigen Punkt in einer von Null verschiedenen Potenz enthält; dann sind die zu $\mathfrak{Q}_0$ gehörigen Functionen alle und nur die *ganzen* algebraischen Functionen von K, da sie allein sich für alle endlichen Punkte regulär verhalten. Ist dann $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ ein Fundamentalsystem, für $\mathfrak{Q}_0 = 1$, so ist seine Determinante, da hier alle Exponenten h_i Null sind, nach dem soeben bewiesenen Satze gleich:

$$(2) \qquad D(1) = \prod (x-a)^{\frac{\alpha-1}{2}},$$

wo das Product nur auf alle Verzweigungspunkte ausgedehnt zu werden braucht, da für alle anderen Punkte die Exponenten $\alpha - 1$ verschwinden.

Sind ferner

$$x - a_1, \; x - a_2, \cdots x - a_h$$

die zu den h Basispunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_h$ von $\mathfrak{Q}$ gehörigen Linearfactoren, von denen auch einzelne einander gleich sein könnten, und setzt man:

$$(3) \qquad N(\mathfrak{Q}) = (x-a_1)^{\lambda_1} (x-a_2)^{\lambda_2} \cdots (x-a_h)^{\lambda_h},$$

so kann unsere Gleichung (1) mit Benutzung von (2) und (3) in der eleganten Form geschrieben werden:

$$D(\mathfrak{Q}) = N(\mathfrak{Q}) \cdot D(1).$$

Da endlich der Grad l von $N(\mathfrak{Q})$ gleich

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h$$

also gleich der Ordnung des Punktsystemes $\mathfrak{Q}$ und der Grad von $D(1)$ gleich:

$$\frac{w}{2} = \frac{1}{2} \sum (\alpha - 1),$$

d. h. gleich der halben Gesammtsumme der Verzweigungsordnungen für alle Verzweigungspunkte ist, so ist der Grad der Determinante $\left|\xi_i^{(x)}\right|$ gleich:

$$l + \frac{w}{2}.$$

Die Zahl w wird die *Verzweigungszahl* der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ genannt.

§ 7.

Zu jedem Systeme von n^2 Elementen:

$$(1) \qquad (\eta) = \begin{pmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_n^{(2)} \\ \vdots & & & \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

mit nicht verschwindender Determinante H gehört ein anderes, das s. g. *complementäre System:*

$$(1a)\qquad (\bar\eta) = \begin{pmatrix} \bar\eta_1^{(1)}, \bar\eta_2^{(1)}, \cdots \bar\eta_n^{(1)} \\ \bar\eta_1^{(2)}, \bar\eta_2^{(2)}, \cdots \bar\eta_n^{(2)} \\ \vdots \\ \bar\eta_1^{(n)}, \bar\eta_2^{(n)}, \cdots \bar\eta_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

welches aus dem zu (η) reciproken Systeme $(\eta)^{-1}$ einfach durch Vertauschung der Horizontal- und Verticalreihen hervorgeht. Für dieses complementäre System ist also z. B.

$$(1b)\qquad \bar\eta_1^{(1)} = \frac{H_1^{(1)}}{H} = \begin{vmatrix} \eta_2^{(2)}, \cdots \eta_n^{(2)} \\ \vdots \\ \eta_2^{(n)}, \cdots \eta_n^{(n)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \eta_1^{(1)} & \eta_2^{(1)} & \cdots & \eta_n^{(1)} \\ \eta_1^{(2)} & \eta_2^{(2)} & \cdots & \eta_n^{(2)} \\ \vdots \\ \eta_1^{(n)} & \eta_2^{(n)} & \cdots & \eta_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Aus dieser Definition ergeben sich sofort die folgenden Fundamentaleigenschaften der complementären Systeme:

I) Ist (η), wie bisher angenommen wurde, ein algebraisches System von x und y, dessen Zeilen also durch Vertauschung von y_1 mit $y_2, \cdots y_n$ aus seiner ersten hervorgehen, so gilt dasselbe von dem complementären Systeme. In der That folgt zunächst aus der Gleichung (1b), dass z. B. $\bar\eta_1^{(1)}$ eine rationale Function von $y_1, y_2, \cdots y_n$ ist, welche aber in $y_2, y_3, \cdots y_n$ symmetrisch ist, mithin rational durch y_1 allein dargestellt werden kann. Vertauscht man nämlich z. B. y_{n-1} mit y_n, so vertauschen sich sowohl in $H_1^{(1)}$ als auch in H die beiden letzten Horizontalreihen, d. h. $\bar\eta_1^{(1)}$ bleibt bei dieser und ebenso auch bei jeder anderen Transposition von $y_2, y_3, \cdots y_n$ ungeändert, ist also wirklich rational von y_1 allein abhängig.

Vertauscht man aber etwa y_1 mit y_2, so vertauschen sich in dem ursprünglichen Systeme (η), also auch in dem complementären Systeme nur die erste und die zweite Zeile, es geht also bei jener Vertauschung z. B. $\bar\eta_1^{(1)}$ in $\bar\eta_1^{(2)}$ über u. s. w., unsere Behauptung ist also in allen ihren Theilen bewiesen.

Ist also $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ irgend ein rational unabhängiges System des Körpers $K(x, y)$, so existirt ein zu ihm complementäres System $(\bar\eta_1, \bar\eta_2, \cdots \bar\eta_n)$ desselben Körpers, welcher auf dem soeben angegebenen Wege stets gefunden werden kann. Sind $|\eta|$ und $|\bar\eta|$ die Determinanten complementärer Systeme, so folgt aus den Grundeigenschaften der reciproken Systeme:

$$|\eta| \cdot |\bar\eta| = 1.$$

Ebenso leicht erkennt man, dass wenn $(\bar\eta)$ complementär zu (η) ist, auch umgekehrt (η) das complementäre System zu $(\bar\eta)$ ist.

II) Geht das System $(\eta_1, \cdots \eta_n)$ durch eine beliebige Transformation (a_{ik}) von nicht verschwindender Determinante in ein anderes $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ über, so geht auch das complementäre System $(\bar{\eta}_1, \cdots \bar{\eta}_n)$ durch die complementäre Transformation $(\bar{a}_{ik})$ in das complementäre System $(\bar{\xi}_1, \cdots \bar{\xi}_n)$ über, d. h. von den beiden Compositionsgleichungen:

$$(\eta)(a_{ik}) = (\xi),$$
$$(\bar{\eta})(\bar{a}_{ik}) = (\bar{\xi}),$$

ist jede eine Folge der anderen. Dieser Satz ist eine unmittelbare Folgerung daraus, dass das System $(\bar{\eta})$ aus dem reciproken durch Vertauschung der Zeilen und Colonnen hervorgeht. Ist also speciell (η) äquivalent (ξ), so gilt das Gleiche von $(\bar{\eta})$ und $(\bar{\xi})$.

III) Ist das System $(\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_n)$ für irgend eine Stelle, z. B. für $(x = \infty)$ regulär, so gilt dasselbe von dem complementären $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n)$. Sind dann ferner $r_1, r_2, \cdots r_n$ die Ordnungszahlen seiner n Elemente, so sind die Ordnungszahlen von $(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n)$ bezw. gleich $(-r_1, -r_2, \cdots -r_n)$. Ersetzt man nämlich z. B. in dem Ausdrucke (1b) von $\bar{\eta}_1^{(1)}$ die n^2 Elemente $\eta_i^{(k)}$ durch ihre Entwickelungen nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ und beachtet dabei, dass alle Elemente $\eta_i^{(1)}, \eta_i^{(2)}, \cdots \eta_i^{(n)}$ einer und derselben Colonne in der Form $\left(\frac{1}{x}\right)^{r_i} G\left(\frac{1}{x}\right)$ geschrieben werden können, weil η_i n. d. V. für die Stelle $(x = \infty)$ die Ordnungszahl r_i besitzt, so erkennt man, dass die Determinante $\mathsf{H}_1^{(1)}$ im Zähler von (1b) mindestens die Ordnung $(r_2 + r_3 + \cdots + r_n)$ hat, während die Determinante H im Nenner genau von der Ordnung $r_1 + r_2 + \cdots + r_n$ ist, weil das System $\left(\eta_i^{(\varkappa)}\right)$ n. d. V. für jene Stelle regulär ist. Also ist der Quotient: $\bar{\eta}_1^{(1)} = \frac{\mathsf{H}_1^{(1)}}{\mathsf{H}}$ mindestens von der Ordnung $-r_1$ und das Entsprechende beweist man von den conjugirten Elementen $\bar{\eta}_1^{(2)} \cdots \bar{\eta}_1^{(n)}$; es zeigt sich also, dass $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_n$ mindestens die Ordnungszahlen $-r_1, -r_2, \cdots -r_n$ haben. Die Ordnungszahl der Determinante $|\bar{\eta}|$ des complementären Systems ist also mindestens gleich $-(r_1 + r_2 + \cdots + r_n)$ und könnte nur dann grösser als diese Zahl sein, wenn eins der Elemente $\bar{\eta}_i$ von höherer als der $(-r_i)^{\text{ten}}$ Ordnung wäre. Da aber $|\bar{\eta}| = \frac{1}{|\eta|}$ ist, so ist $|\bar{\eta}|$ genau von der $-(r_1 + \cdots + r_n)^{\text{ten}}$ und nicht von höherer Ordnung, unsere Behauptung ist daher vollständig bewiesen.

IV) Ist das System (η) so beschaffen, dass es für eine Stelle $(x = a)$ entsprechend den dort vorhandenen Verzweigungspunkten $V_\alpha, V_\beta, \cdots V_\gamma$

in Partialsysteme zerfällt, so gilt das Gleiche auch von dem complementären Systeme. Ist ferner z. B. das zu V_α gehörige Partialsystem von (η) von der Ordnung ϱ, so besitzt das complementäre Partialsystem die Ordnung $\bar{\varrho} = -(\varrho + \alpha - 1)$, d. h. es besteht die Gleichung:

(2) $$\varrho + \bar{\varrho} = -(\alpha - 1).$$

Der erste Theil unserer Behauptung folgt einfach aus dem bekannten Satz der Determinantentheorie, dass, wenn ein System von n^2 Elementen z. B. in drei Partialsysteme bezw. von α^2, β^2, γ^2 Elementen zerfällt, wenn es also die Form hat:

$$\begin{pmatrix} A, & 0, & 0 \\ 0, & B, & 0 \\ 0, & 0, & C \end{pmatrix}$$

dann das reciproke System in gleicher Weise zerfällt; und zwar so, dass jedes Partialsystem desselben einfach zu dem entsprechenden Partialsysteme des ersten Systemes reciprok ist.

Zweitens ist aber unter der oben gemachten Voraussetzung das System für die Stelle $(x = a)$ regulär und die Ordnungszahlen $(r_1, r_2, \cdots r_n)$ seiner Elemente $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_\alpha;\ \eta_{\alpha+1}, \eta_{\alpha+2}, \cdots \eta_{\alpha+\beta};\ \eta_{\alpha+\beta+1}, \cdots \eta_n$ sind der Reihe nach:

(2) $$\varrho, \varrho+1, \cdots \varrho+\alpha-1;\ \sigma, \sigma+1, \cdots \sigma+\beta-1;\ \tau, \tau+1, \cdots \tau+\gamma-1.$$

Nach dem soeben bewiesenen Satze III) ist also auch das complementäre System

$$\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots \bar{\eta}_\alpha;\ \bar{\eta}_{\alpha+1}, \bar{\eta}_{\alpha+2}, \cdots \bar{\eta}_{\alpha+\beta};\ \bar{\eta}_{\alpha+\beta+1}, \cdots \bar{\eta}_n$$

regulär und die Ordnungszahlen seiner Elemente sind bezw.

(2a) $$-\varrho, -(\varrho+1), \cdots -(\varrho+\alpha-1);\ -\sigma, -(\sigma+1), \cdots -(\sigma+\beta-1);$$
$$-\tau, \cdots -(\tau+\gamma-1).$$

Daher besitzen die drei Partialsysteme von $(\bar{\eta})$ bezw. die Ordnungszahlen $-(\varrho+\alpha-1)$, $-(\sigma+\beta-1)$ und $-(\tau+\gamma-1)$ da diese in den Reihen (2a) die kleinsten Zahlen sind; der obige Satz ist also vollständig bewiesen.

Um nun endlich den Fundamentalsatz über die complementären Systeme einfach aussprechen zu können, führen wir den folgenden neuen und für die ganze Theorie sehr wichtigen Begriff ein:

Unter dem *Verzweigungssystem* des Körpers $K(x, y)$ in Bezug auf x verstehen wir das Punktsystem

(3) $$\mathfrak{Z} = \prod \mathfrak{P}_\alpha^{\alpha-1},$$

in welchem jeder Punkt $\mathfrak{P}_\alpha$ der Kugelfläche $\mathfrak{K}$ so oft vorkommt, als seine Verzweigungsordnung $\alpha - 1$ angiebt. Dasselbe enthält also alle und nur die Verzweigungspunkte, der zugehörigen Riemann'schen Fläche. Da wir die Stelle $(x=\infty)$ als regulär vorausgesetzt hatten, so enthält $\mathfrak{Z}$ hier nur solche Divisoren, welche endlichen Stellen entsprechen.

Mit Benützung dieses Begriffes können wir jenen Hauptsatz nun folgendermassen aussprechen:

V) Ist $(\xi_1, \xi_2 \cdots \xi_n)$ ein Fundamentalsystem für ein beliebiges Punktsystem $\mathfrak{Q}$, so ist das complementäre $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots \bar{\xi}_n)$ ein Fundamentalsystem für dasjenige Punktsystem $\bar{\mathfrak{Q}}$, welches mit $\mathfrak{Q}$ durch die Gleichung:

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}$$

verbunden ist.

Unserer Voraussetzung zufolge ist nämlich das System $(\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n)$ für jede endliche Stelle $(x=a)$ einem anderen äquivalent, welches, entsprechend den dort über einander liegenden Punkten der Riemann'schen Fläche in Partialsysteme zerfällt. Das Gleiche gilt also nach Satz (II) und (IV) für das complementäre System $(\bar{\xi}_1, \cdots \bar{\xi}_n)$, nach dem a. S. 459 bewiesenen Satze ist also auch dieses ein Fundamentalsystem für einen anderen Divisor $\bar{\mathfrak{Q}}$. Sind ferner:

$$\mathfrak{Q} = \prod \mathfrak{P}^{\varrho}, \qquad \bar{\mathfrak{Q}} = \prod \mathfrak{P}^{\bar{\varrho}}$$

die zu (ξ) und $(\bar{\xi})$ gehörigen Punktsysteme, so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung (2) für ihr Product die Relation:

$$\mathfrak{Q}\bar{\mathfrak{Q}} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{\varrho+\bar{\varrho}} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{-(\alpha-1)} = \frac{1}{\mathfrak{Z}}$$

und damit der vollständige Beweis unseres Fundamentalsatzes.

§ 8.

Bis jetzt hatten wir der Betrachtung des Körpers K die Grösse x als unabhängige Variable zu Grunde gelegt. Wir können aber aus jenem Körper irgend eine nicht constante Grösse ξ herausgreifen, diese als unabhängige Variable bestimmen, und sind dann stets im Stande, eine andere Grösse η desselben Körpers so zu wählen, dass der Körper $K(\xi, \eta)$ aller rationalen Functionen von ξ und η mit dem Körper $K(x, y)$ der Functionen von x und y identisch ist. Auf den Beweis dieser bekannten Thatsache will ich hier nicht eingehen.

Dann genügt η und jede andere Grösse ζ des Körpers $K(\xi\eta) = K(xy)$ einer Gleichung eines bestimmten ν^{ten} Grades mit in ξ rationalen Coefficienten, welche selbst irreductibel oder die Potenz einer irreductiblen

Function ist; und man zeigt genau ebenso wie vorher, dass nun der ganze Werthvorrath einer solchen Grösse ζ eindeutig auf einer ν-blättrigen Riemann'schen Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$ ausgebreitet werden kann, deren Blätter jetzt wieder in einer endlichen Anzahl von Verzweigungspunkten zusammenhängen, und für die Entwickelung einer Function ζ nach Potenzen von $\xi - \alpha$ bezw. $\frac{1}{\xi}$ in der Umgebung eines Punktes dieser Fläche gelten jetzt wörtlich dieselben Sätze, wie sie im § 1 für die zur Variablen x zugehörige Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ angegeben wurden.

Eine Stelle $\mathfrak{P}$ der Riemann'schen Fläche $\mathfrak{K}_x$ ist dadurch eindeutig und unabhängig von der zu Grunde gelegten unabhängigen Variablen definirt, dass alle Functionen z des Körpers $K(x\,y)$ dort bestimmte constante Werthe z_0 erhalten, welche auch Null oder unendlich gross sein können. Umgekehrt ist aber durch die unendlich vielen Gleichungen $z = z_0$ die zugehörige Stelle $\mathfrak{P}$ eindeutig bestimmt, denn es giebt nicht zwei Stellen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$, wo *jede* Function z des Körpers denselben Werth z_0 annimmt. Wäre dies nämlich der Fall, so müsste ja x in beiden Punkten denselben Werth a erhalten, d. h. $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ müssten zwei von den bei $x = a$ über einander liegenden conjugirten Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots \mathfrak{P}_\nu$ sein. Andererseits folgt aber aus dem Satze (II) des § 6, dass man stets eine Function z finden kann, welche in einem jener conjugirten Punkte $\mathfrak{P}_1$ den Werth Eins, in allen anderen $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \cdots$ den Werth Null annimmt, und damit ist jene Behauptung vollständig bewiesen. Da aber die hier zu Grunde gelegte Definition der Stelle $\mathfrak{P}$ nur von dem Körper $K(x\,y) = K(\xi\,\eta)$ aber gar nicht von der unabhängigen Variablen x oder ξ abhängt, so entspricht jedem Punkte $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{K}_x$ ein einziger Punkt von $\mathfrak{K}_\xi$ und beide können somit durch denselben Buchstaben bezeichnet werden.

Um nun auch die Ordnungszahl der Functionen z in einem Punkte $\mathfrak{P}$ unabhängig von der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ oder $\mathfrak{K}_\xi$ zu charakterisiren, greife ich in dem Körper $K(xy)$ irgend eine Function π heraus, welche hier von möglichst niedriger also von der ersten Ordnung ist; auch solche Functionen existiren in $K(xy)$, wie in dem soeben erwähnten Satze des § 6 bewiesen worden ist. Jede andere in $\mathfrak{P}$ verschwindende Function z ist dann so beschaffen, dass der Quotient $\frac{z}{\pi}$ in $\mathfrak{P}$ einen endlichen Werth besitzt. Dann sagen wir allgemein: Eine Function z ist in $\mathfrak{P}$ von der Ordnung ϱ, wenn ϱ derjenige Exponent von π ist, für welchen der Quotient $\frac{z}{\pi^\varrho}$ in $\mathfrak{P}$ endlich und von Null verschieden ist. Aus den Ergebnissen des vorigen Abschnittes folgt dann, dass diese Ordnungszahl für jede Grösse z von $K(x\,y) = K(\xi\,\eta)$ einen bestimmten *ganzzahligen* Werth hat, der positiv, Null, oder negativ sein kann und vollständig unabhängig von der Variablen x oder ξ ist; denn als Massstab wird die Function π des Körpers gewählt, welche hier von möglichst niedriger Ordnung unendlich klein wird.

§ 9.

Durch die Ergebnisse der vorigen Abschnitte ist die mit (Ia) bezeichnete zweite Aufgabe, alle zu einem beliebigen Ideale (J) gehörigen algebraischen Functionen zu finden, vollständig gelöst. Es handelt sich jetzt zur Erledigung der Hauptaufgabe (I) nur noch darum, aus den Functionen von (J) alle und nur die Functionen auszuscheiden, welche das Punktsystem $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ wirklich enthalten, d. h. die Functionen, welche sich auch für die Stelle $(x = \infty)$ regulär verhalten, welche also dort mindestens die Ordnung Null besitzen. Die Gesammtheit dieser Functionen bildet einen Theilbereich von (J), dessen Individuen durch folgenden Satz charakterisirt sind:

> Alle zu dem System $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$ gehörigen Functionen ξ sind dadurch charakterisirt, dass sie allgemein in $\mathfrak{P}_i$ mindestens von der Ordnung λ_i und für jeden anderen Punkt der *ganzen* Kugelfläche regulär sind.

Diese zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen sind für die in der Theorie der algebraischen Functionen auftretenden Fragen allein wesentlich, während die Moduln und Ideale nur Hülfsbegriffe sind. Die Richtigkeit der letzteren Bemerkung erkennt man leicht daraus, dass schon bei einer einfachen gebrochenen Substitution $x' = \frac{1}{x - a_0}$ für die unabhängige Variable, also bei einfacher Verschiebung der Stelle $x = \infty$ auf der Kugelfläche $\mathfrak{K}$, sowohl die Moduln als auch die Ideale sich vollständig ändern, während der Bereich aller Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ allein von diesem abhängt und bei jeder umkehrbaren Transformation *beider* Variabeln derselbe bleibt.

Es sei nun ein Fundamentalsystem $(\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n)$ für das Ideal (J) gegeben, welches für die Stelle $(x = \infty)$ regulär ist; da dort n. d. V. keine Verzweigungspunkte über einander liegen, so sind die Ordnungszahlen

$$r_1, r_2, \cdots r_n$$

jener n Elemente ganze Zahlen, welche wieder nach ihrer Grösse so geordnet sein mögen, dass $r_1 \geqq r_2 \geqq \cdots \geqq r_n$ ist. Ist dann r_s die letzte nicht negative dieser Zahlen, so gehören von jenen n Elementen $\zeta_1, \cdots \zeta_s, \zeta_{s+1}, \cdots \zeta_n$ nur die s ersten zu dem Systeme $\mathfrak{Q}$ die $n - s$ letzten aber nicht mehr, da diese für $x = \infty$ nicht regulär sind. Aus der Grundeigenschaft der für eine Stelle $(x = a)$ regulären Systeme folgt aber weiter der allgemeine Satz, durch welchen jetzt auch die Hauptfrage (I) in voller Allgemeinheit gelöst wird:

Alle zu einem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen, und nur sie, sind in der Form

$$\zeta = u_1 \zeta_1 + u_2 \zeta_2 + \cdots + u_s \zeta_s$$

enthalten, in welcher die Coefficienten $u_1, \cdots u_s$ beliebige *ganze* Functionen von x bezw. von den Graden $r_1, r_2, \cdots r_s$ sind.

In der That gehören ja alle jene Functionen offenbar zu dem System $\mathfrak{Q}$, da sie einmal Functionen von (J) sind, und da andererseits ihre Ordnung für die Stelle $(x = \infty)$ gleich oder grösser als Null ist. Wäre aber auch nur einer jener Coefficienten, etwa u_i, von höherem als dem angegebenen Grade in x, oder wäre auch nur einer der folgenden Coefficienten $u_{s+1}, \cdots u_n$ von Null verschieden, so wäre das bezügliche Glied $u_i \zeta_i$, also auch ζ selbst, für $x = \infty$ von negativer Ordnung, ζ gehörte also sicher nicht zu dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$.

Bezeichnet man also die

$$N = (r_1 + 1) + (r_2 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

algebraischen Functionen

$$\zeta_i,\ x\zeta_i,\ x^2\zeta_i, \cdots x^{r_i}\zeta_i \qquad (i = 1, 2, \cdots s)$$

in irgend einer Reihenfolge durch

$$z_1,\ z_2, \cdots z_N,$$

so bilden diese in der Weise ein vollständiges System linear unabhängiger zu $\mathfrak{Q}$ gehöriger Functionen, als alle Functionen z jenes Bereiches eindeutig in der Form

$$z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + \cdots + c_N z_N$$

mit constanten Coefficienten darstellbar sind. Die Anzahl N der linear unabhängigen zu $\mathfrak{Q}$ gehörigen Functionen ist durch die Ordnungszahlen $r_1, r_2, \cdots r_n$ der Elemente $\zeta_1, \zeta_2, \cdots \zeta_n$ für $x = \infty$ bestimmt und diese wiederum dadurch, dass ihre Summe gleich der Ordnung der Determinante $\left|\zeta_i^{(x)}\right|$, also ihrem negativen Grade in x gleich ist, welcher oben bestimmt wurde. Hieraus ergiebt sich die bemerkenswerthe Gleichung:

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = -\left(l + \frac{w}{2}\right),$$

in der l die Ordnung des Systemes $\mathfrak{Q}$ und w die Verzweigungszahl der Riemann'schen Fläche bedeutet. Da in dieser Gleichung sowohl die Ordnungszahl l von $\mathfrak{Q}$, als auch die Ordnungszahlen r_i der Elemente ζ_i für

$(x=\infty)$ ganze Zahlen sind, so folgt, dass $\frac{w}{2}$ eine ganze, dass also die Verzweigungszahl

$$w=\sum(a-1)$$

der Riemann'schen Kugelfläche nothwendig eine gerade Zahl sein muss.

Das hier erlangte Resultat ist von der bisher gemachten Voraussetzung, dass sich an der Stelle $(x=\infty)$ keiner der Basispunkte $\mathfrak{P}_1, \cdots \mathfrak{P}_h$ von $\mathfrak{Q}$ und auch kein Verzweigungspunkt befindet, vollkommen unabhängig. Ist diese Annahme nämlich nicht erfüllt, so braucht man nur für x die unabhängige Variable

$$x'=\frac{1}{x-a_0}$$

einzuführen, wenn $(x=a_0)$ irgend eine Stelle ist, für die jene beiden Voraussetzungen erfüllt sind. Bildet man dann für diese Variable ein Fundamentalsystem $(\zeta_1, \cdots \zeta_n)$ des Ideales (J), welches für die Stelle $(x'=\infty)$ oder $(x=a_0)$ regulär ist und dessen Ordnungszahlen $r_1, \cdots r_s, \cdots r_n$ sind, und ersetzt man dann wieder x' durch x, so erhält man in den

$$N=(r_1+1)+\cdots+(r_s+1)$$

Elementen

$$\zeta_i, \ \frac{\zeta_i}{x-a_0}, \ \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^2}, \cdots \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^{r_i}} \qquad (i=1,2,\cdots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, $(\bar{\zeta}_1, \bar{\zeta}_2, \cdots \bar{\zeta}_N)$, und jene Aufgabe ist somit ohne jede beschränkende Voraussetzung vollständig gelöst.

Wir stellen nun endlich die allgemeinere Aufgabe, alle diejenigen Multipla von $\mathfrak{Q}$ aufzusuchen, welche in den n zu $x=a_0$ gehörigen Punkten der Riemann'schen Fläche mindestens von der Ordnung λ sind, wo λ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet, während man für $\lambda=0$ den soeben behandelten Fall wieder erhält. Sind dann in dem vorher betrachteten Systeme $(\zeta_1, \cdots \zeta_\sigma, \cdots \zeta_n)$ die σ ersten Elemente $\zeta_1, \cdots \zeta_\sigma$ diejenigen, deren Ordnungszahlen $r_1, \cdots r_\sigma$ gleich oder grösser als λ sind, so zeigt man genau ebenso wie früher, dass die

$$N_\lambda=(r_1-\lambda+1)+\cdots+(r_\sigma-\lambda+1)$$

Elemente

$$\zeta_i, \ \frac{\zeta_i}{x-a_0}, \cdots \frac{\zeta_i}{(x-a_0)^{r_i-\lambda}} \qquad (i=1,2,\cdots\sigma)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ der verlangten Art repräsentiren.

§ 10.

Auf die im § 8 gefundenen Eigenschaften der Punkte $\mathfrak{P}$ und der Ordnungszahlen der Functionen des Körpers $K(x, y)$ gründet sich nun die Einführung der algebraischen Divisoren, welche für das Folgende von grundlegender Bedeutung ist.

Jedem Punkte $\mathfrak{P}$ einer beliebigen Riemann'schen Fläche ordnen wir einen algebraischen Primtheiler zu, den wir ebenso durch $\mathfrak{P}$ bezeichnen, und wir sagen, eine Function ξ ist durch die Potenz $\mathfrak{P}^\lambda$ von $\mathfrak{P}$ theilbar, wenn sie in dem entsprechenden Punkte die Ordnungszahl λ besitzt, (λ kann hier eine positive oder negative ganze Zahl oder auch Null bedeuten). Aus den Resultaten des vorigen Abschnittes folgt dann, dass diese Primtheiler völlig unabhängig von der Wahl der unabhängigen Variablen sind, und man erkennt ebenso leicht, dass ihnen die elementaren Eigenschaften der Primzahlen in der Zahlentheorie ebenfalls zukommen.

Das Product

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

einer beliebigen Anzahl gleicher oder verschiedener Primfactoren soll *ein algebraischer Divisor* genannt werden, so dass also jedem Punktsysteme ein algebraischer Divisor eindeutig entspricht. Die Exponenten können ebenfalls positiv oder negativ oder auch Null sein. Wir wollen diese Divisoren selbstständig neben den Grössen des Körpers $K(xy)$ betrachten.

Die Summe

$$l = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_h$$

der Ordnungszahlen von $\mathfrak{Q}$ soll die *Ordnung* jenes Divisors genannt werden.

Sind

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}, \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\mu_1} \mathfrak{P}_2^{\mu_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\mu_h}$$

zwei beliebige Divisoren, deren Exponenten λ und μ auch zum Theil Null sein können, so soll ihr Product und ihr Quotient durch die Gleichungen

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1+\mu_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h+\mu_h}, \qquad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1-\mu_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h-\mu_h}$$

definirt sein. Ein Divisor $\mathfrak{Q}$ heisst *ganz*, wenn keiner seiner Exponenten λ_i negativ ist, im anderen Falle heisst er *gebrochen*. Jeder gebrochene Divisor kann als Quotient zweier ganzen Divisoren dargestellt werden. Ist

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{n}}$$

diese Darstellung, so heissen die ganzen Divisoren $\mathfrak{z}$ und $\mathfrak{n}$ der *Zähler* und der *Nenner* von $\mathfrak{Q}$ und die Ordnung von $\mathfrak{Q}$ ist gleich der Differenz der Ordnungszahlen des Zählers und des Nenners.

Ein Divisor $\mathfrak{R}$ ist durch einen anderen $\mathfrak{Q}$ theilbar, wenn der Quotient $\dfrac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist, wenn also $\mathfrak{R}$ jeden Primfactor mindestens ebenso oft enthält als $\mathfrak{Q}$. Sind $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ zwei beliebige ganze oder auch gebrochene Divisoren, so nennen wir *den* Divisor

$$\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2)$$

ihren *grössten gemeinsamen Theiler*, welcher jeden einzelnen Primfactor $\mathfrak{P}$ so oft enthält als er mindestens in $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ auftritt. Ist $\mathfrak{D}$ so bestimmt, so ist offenbar $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_2$ durch $\mathfrak{D}$ theilbar, d. h. es ist:

$$\mathfrak{Q}_1 = \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}_1, \quad \mathfrak{Q}_2 = \mathfrak{D}\,\mathfrak{G}_2,$$

wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ *ganze* theilerfremde Divisoren sind. In gleicher Weise können wir offenbar auch den grössten gemeinsamen Theiler mehrerer Divisoren $\mathfrak{D} = (\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu)$ definiren. Derselbe wird ein ganzer oder gebrochener Divisor sein, jenachdem alle Divisoren $\mathfrak{Q}_i$ ganz sind, oder auch nur ein einziger einen Nenner besitzt.

Jede algebraische Function ξ des Körpers $K(x, y)$ ist einem Divisor $\mathfrak{Q}_\xi = \dfrac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$ äquivalent, welcher durch die Nullstellen und durch die Pole von ξ nebst den zugehörigen Ordnungszahlen vollständig bestimmt ist. Umgekehrt ist die algebraische Function ξ durch die Aequivalenz

$$\xi \sim \mathfrak{Q}_\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}$$

bekanntlich zwar nicht eindeutig, wohl aber bis auf eine multiplicative Constante bestimmt. Man kann aber jene Beziehung nöthigenfalls dadurch zu einer eindeutigen machen, dass man dem Divisor $\mathfrak{Q}_\xi$ speciell diejenige Function ξ zuordnet, deren Anfangsglied in der Umgebung einer beliebigen aber ein für alle Male fest angenommenen Stelle $\mathfrak{P}_0$ den Coefficienten Eins besitzt. Alsdann können wir das Zeichen der Aequivalenz durch das Gleichheitszeichen ersetzen. Alle anderen zu demselben Divisor gehörigen Functionen ξ' sind dann in der Form $c \cdot \mathfrak{Q}_\xi$ enthalten, wenn c eine beliebige Constante bedeutet.

Da jede algebraische Function ξ gleich viele Nullstellen und Pole besitzt, so sind in der Darstellung (1) von ξ der Zähler $\mathfrak{z}_\xi$ und der Nenner $\mathfrak{n}_\xi$ stets von gleicher Ordnung. Eine Function ξ heisst *vom Grade* ν, wenn ihr Zähler und ihr Nenner die Ordnung ν besitzen.

Ist speciell

$$x = \frac{\mathfrak{z}_x}{\mathfrak{n}_x}$$

die bisher betrachtete unabhängige Variable, so erkennt man, dass sie vom Grade n ist, d. h. dass ihr Grad gleich der Ordnung des Körpers $K(x, y)$ ist, sobald man x als unabhängige Variable wählt; ihr Zähler $\mathfrak{z}_x$ besteht nämlich aus allen Primfactoren, welche den zu $x = 0$ gehörigen Punkten von $\mathfrak{K}_x$ entsprechen, der Nenner aus allen denjenigen, welcher den zu $x = \infty$ zugehörigen Stellen angehören, mit der Massgabe, dass ein solcher Primfactor in der α^{ten} Potenz im Zähler oder im Nenner auftritt, wenn der zugehörige Punkt $\mathfrak{P}$ ein α-blättriger Verzweigungspunkt der Fläche $\mathfrak{K}_x$ ist.

Ist ferner a irgend eine endliche Constante, so ergiebt sich für den Linearfactor: $x - a$ die folgende Zerlegung:

$$x - a = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_{x-a}} = \frac{\mathfrak{z}_{x-a}}{\mathfrak{n}_x},$$

wo der Nenner derselbe geblieben ist, weil der Linearfactor $x - a$ dieselben Pole besitzt, wie x selbst.

Genau ebenso zeigt sich jetzt, wenn ξ eine beliebige Function des Körpers vom ν^{ten} Grade ist, und man wählt ξ als unabhängige Variable, so gehört zu ihr eine ν-blättrige Riemann'sche Fläche, und für jeden constanten Werth ξ_0 ergiebt sich für den Linearfactor $\xi - \xi_0$ die Zerlegung:

$$\xi - \xi_0 = \frac{\mathfrak{z}_{\xi - \xi_0}}{\mathfrak{n}_\xi}, \qquad \frac{1}{\xi} = \frac{\mathfrak{n}_\xi}{\mathfrak{z}_\xi}.$$

Zu jedem Primtheiler $\mathfrak{P}$ gehört dann ein und nur ein Linearfactor $\xi - \xi_0$ in welchem derselbe aufgeht. Ist $\mathfrak{P}$ ein α-facher Theiler von $\xi - \xi_0$ so entspricht diesem Punkte ein α-blättriger Verzweigungspunkt der Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$.

Mit Benutzung der Divisoren können wir nun die oben abgeleiteten Resultate über Punktsysteme und die zu ihnen gehörigen algebraischen Functionen in einfacherer Form aussprechen: Zu jedem Punktsystem

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}_1^{\lambda_1} \mathfrak{P}_2^{\lambda_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{\lambda_h}$$

gehört ein algebraischer Divisor, der genau ebenso zu bezeichnen ist, und eine algebraische Function gehört einfach dann und nur dann zu dem Punktsysteme $\mathfrak{Q}$, wenn sie ein ganzes Vielfaches des Divisors $\mathfrak{Q}$ ist. Wir haben somit im § 9 die Fundamentalaufgabe gelöst, alle und nur die linear unabhängigen Multipla eines beliebig gegebenen Divisors zu finden. Auch die dort gefundene Lösung ist vollständig unabhängig davon, welche Grösse des Bereiches $K(x, y)$ als unabhängige Variable zu Grunde gelegt wird.

Endlich hatten wir gesehen, dass man zu jedem Divisor $\mathfrak{Q}$ eine zugeordnete Grösse $\xi_{\mathfrak{Q}}$ von $K(x, y)$ so bestimmen kann, dass sie jeden Primfactor von $\mathfrak{Q}$ genau so oft enthält als $\mathfrak{Q}$ selbst, dass also

$$\xi_{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{Q}\mathfrak{R},$$

ist, wo $\mathfrak{R}$ keinen Primfactor von $\mathfrak{Q}$ in einer positiven oder negativen Potenz enthält.

§ 11.

Wir gehen jetzt dazu über, den grossen Bereich aller ganzen und gebrochenen Divisoren in Classen einzutheilen, um dann die gemeinsamen Eigenschaften aller einer und derselben Classe angehörigen Divisoren zu untersuchen.

Zwei ganze oder gebrochene Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ heissen *äquivalent*, wenn sie sich nur um eine beliebige Grösse ξ des Körpers $K(x, y)$ unterscheiden, wenn also eine Gleichung

$$(1) \qquad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}'} = \xi \quad \text{oder} \quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}'\xi$$

besteht. Ist also $\mathfrak{Q}_0$ irgend ein beliebiger Divisor, so giebt es unendlich viele äquivalente Divisoren zu $\mathfrak{Q}_0$ und zwar sind alle und nur diese in der Form

$$(2) \qquad \mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\xi$$

enthalten, wenn ξ alle Grössen des Körpers $K(x, y)$ durchläuft.

Alle zu einem Divisor $\mathfrak{Q}_0$ und also auch unter einander äquivalenten Divisoren $\mathfrak{Q}$ rechnen wir in eine *Divisorenclasse*, welche durch Q bezeichnet werden soll. Aus der Gleichung (2) folgt zunächst, da jede Grösse ξ des Körpers K die Ordnung Null hat, dass äquivalente Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}_0$ dieselbe Ordnungszahl q besitzen, welche daher die *Ordnung* der Classe R genannt werden soll.

Die einfachste Divisorenclasse ist die, welche von den Functionen ξ des Körpers selbst, und nur von diesen gebildet wird, wenn man sie als Divisoren betrachtet; sie bilden wirklich eine Classe für sich, da sie und sie allein unter einander äquivalent sind. Diese Classe heisse die *Haupt- oder Einheitsclasse;* sie werde durch E, oder wenn kein Missverständniss zu befürchten ist, auch durch (1) bezeichnet; ihre Ordnung ist gleich Null.

Man erkennt ohne Weiteres, dass die bekannten Elementarsätze für die Aequivalenz auch für diese Definition der Aequivalenz bestehen bleiben. Insbesondere ergeben sich aus den beiden Aequivalenzen:

$$\mathfrak{Q} \sim \mathfrak{Q}', \quad \mathfrak{R} \sim \mathfrak{R}'$$

unmittelbar die folgenden:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{R} \sim \mathfrak{Q}'\mathfrak{R}', \quad \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{R}} \sim \frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'}.$$

Sind also $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ zwei beliebige Divisoren, Q und R ihre Classen, so bilden alle Producte $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ je zweier bezw. zu $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ äquivalenter Divisoren eine neue Classe, welche durch QR bezeichnet werden möge, und umgekehrt kann jeder aus dieser Classe gehörige also zu $\mathfrak{Q}\mathfrak{R}$ äquivalente Divisor offenbar in zwei Factoren $\mathfrak{Q}'\mathfrak{R}'$ zerlegt werden, welche bezw. zu $\mathfrak{Q}$ und zu $\mathfrak{R}$ äquivalent sind. Genau ebenso bilden alle Quotienten $\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{R}'}$ von je zwei Divisoren von Q und R die sämmtlichen Divisoren einer neuen Classe, welche wir $\frac{Q}{R}$ nennen wollen. Sind q und r die Ordnungszahlen der Classe Q und R, so besitzen QR und $\frac{Q}{R}$ offenbar bezw. die Ordnungszahlen $q+r$ und $q-r$. Die Hauptclasse E ist die einzige, durch deren Multiplication oder Division eine beliebige Classe Q nicht geändert wird, denn es ist ja:

$$QE = Q, \quad \frac{Q}{E} = Q.$$

Man kann also auf die Divisorenclassen ebenso wie auf die Divisoren selbst die Operationen der Multiplication und Division unbeschränkt anwenden. Insbesondere folgt aus einer Gleichung $QR = S$ sofort die andere

$$Q = \frac{S}{R}.$$

Die Elemente $\mathfrak{Q}$ einer beliebigen Classe Q gehen nach (2) aus den entsprechenden Elementen $\mathfrak{x}$ der Hauptclasse E durch Multiplication mit einem und demselben beliebig aber fest anzunehmenden Divisor $\mathfrak{Q}_0$ hervor, welcher daher *der zu Q gehörige Multiplicator* genannt werden möge. Jeder Grösse $\mathfrak{x}$ von E entspricht hiernach ein eindeutig bestimmter Divisor $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0\mathfrak{x}$ von Q; wir wollen daher die beiden sich so entsprechenden Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{x}$ *zugeordnete Divisoren* von E und Q nennen. Zwei solche zugeordneten Divisoren $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{x}$ sind also dadurch charakterisirt, dass ihr Quotient $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{x}}$ gleich dem festen Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ ist. Welchen Divisor $\mathfrak{Q}_0$ aus der Classe Q wir als Multiplicator für deren Uebergange von E zu Q wählen, ist vollständig gleichgültig; bei einer Aenderung des Multiplicators ändern sich aber natürlich die Paare zugeordneter Divisoren. Ist nämlich $\mathfrak{Q}_0'$ ein anderer Multiplicator und sind $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ die einer und derselben Grösse $\mathfrak{x}$ der Hauptclasse das eine und das andere Mal zugeordneten Divisoren, so wird ja:

$$\mathfrak{Q}' = \mathfrak{Q}_0'\mathfrak{x} = \mathfrak{Q}_0 \cdot \left(\frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0}\right)\mathfrak{x} = \mathfrak{Q}\cdot\mathfrak{x}_0\cdot\mathfrak{x}$$

worin $\mathfrak{x}_0 = \frac{\mathfrak{Q}_0'}{\mathfrak{Q}_0}$ den der Hauptclasse angehörigen Quotienten von $\mathfrak{Q}_0'$ und $\mathfrak{Q}_0$ bedeutet; man erhält also die Zuordnung der Divisoren von E und Q für den neuen Multiplicator $\mathfrak{Q}_0'$, indem man die zu den Elementen $\xi, \xi_1 \cdot \xi_2 \cdots$ von E zugeordneten Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots$ von Q alle mit *einem und demselben* Divisor ξ_0 von E multiplicirt.

Man kann den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ innerhalb der Classe Q stets so wählen, dass er einen oder mehrere gegebene Primtheiler $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}' \cdots$ gar nicht, weder im Zähler noch im Nenner enthält. Sollte das nämlich für den ursprünglich gewählten Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ nicht der Fall sein, so kann man statt seiner einen anderen $\mathfrak{Q}_0' = \mathfrak{Q}_0 \cdot \frac{1}{\xi_0}$ nehmen und die Function ξ_0 des Körpers K nach S. 458 so wählen, dass der Quotient:

$$\mathfrak{Q}_0' = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\xi_0}$$

die Primfactoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots$ gar nicht enthält.

Hat man den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0'$ so gewählt, so sind je zwei zugeordnete Elemente ξ und $\mathfrak{Q}$ jener beiden Classen stets von derselben Ordnung in Bezug auf die gegebenen Primfactoren $\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots$ weil ja ihr Quotient jedesmal gleich $\mathfrak{Q}_0$ ist, jene Primfactoren also gar nicht enthält.

§ 12.

Es seien jetzt

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$$

μ beliebige Functionen des Körpers, welche also als Divisoren betrachtet der Hauptclasse (E) angehören; dann stellt jede homogene lineare Function

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_\mu \xi_\mu \tag{1}$$

für jedes Werthsystem $c_1 \cdots c_\mu$ ebenfalls einen Divisor der Hauptclasse dar, welcher durch jene Constanten eindeutig bestimmt ist, und leicht folgendermassen gefunden werden kann:

Es sei $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler der μ Divisoren $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$ so dass allgemein:

$$\xi_i = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_i$$

ist, und die μ *ganzen* Divisoren $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu)$ theilerfremd sind. Dann ist die Function ξ ebenfalls ein Multiplum von $\mathfrak{G}$, d. h. es ist

$$\xi = \mathfrak{D}\mathfrak{G}.$$

Ist nämlich $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Punkt der Riemann'schen Fläche, und ist δ die Ordnungszahl, welche alle Functionen ξ_i in $\mathfrak{P}$ mindestens besitzen, so ergeben sich für jene μ Elemente die folgenden Entwickelungen in der Umgebung von $\mathfrak{P}$:

$$\xi_i = e_i(x-a)^{\frac{\delta}{a}} + \cdots, \qquad (i = 1, 2, \cdots \mu)$$

wo nicht alle μ Anfangscoefficienten e_i verschwinden. Also ergiebt sich für $\mathfrak{x}$ die Entwickelung

$$\mathfrak{x} = e(x-a)^{\frac{\delta}{\alpha}} + \cdots$$

wo

(2) $$e = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \cdots + c_\mu e_\mu$$

ist. Also ist $\mathfrak{x}$ in jedem Punkte der Riemann'schen Fläche mindestens von der gleichen Ordnung wie der gemeinsame Theiler $\mathfrak{D}$ von $(\mathfrak{x}_1 \cdots \mathfrak{x}_\mu)$ also in der Form $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$ darstellbar.

Aus der Form (2) des Anfangscoefficienten e in der Entwickelung von $\mathfrak{x}$ folgen aber noch weiter unmittelbar die Sätze:

1) Man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ auf unendlich viele Arten so bestimmen, dass in der Function $\mathfrak{x} = \mathfrak{D}\mathfrak{G}$ die Function $\mathfrak{G}$ beliebig viele beliebig gegebene Primfactoren nicht enthält.

2) Man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ stets so bestimmen, dass der Divisor $\mathfrak{G}$ einen gegebenen Primfactor $\mathfrak{P}$ enthält.

Da sich die Divisoren einer Classe Q von den zugeordneten Divisoren der Hauptclasse E nur um einen und denselben Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ unterscheiden, so gelten die soeben gefundenen Sätze auch ohne Weiteres für die Divisoren einer beliebigen Classe, wenn wir festsetzen:

dass jede Gleichung zwischen beliebigen Grössen des Körpers oder der Hauptclasse E gültig bleibt, wenn man ihre linke Seite mit einem beliebigen von Null verschiedenen Divisor multiplicirt.

Sind dann nämlich:

$$\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$$

die den μ Functionen $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \cdots \mathfrak{x}_\mu$ zugeordneten Divisoren der Classe Q, so ist allgemein:

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{x}_i \cdot \mathfrak{Q}_0.$$

Multiplicirt man also die Gleichung (1) mit $\mathfrak{Q}_0$ und setzt den dann links sich ergebenden Divisor $\mathfrak{Q}_0 \mathfrak{x} = \mathfrak{Q}$, so ist $\mathfrak{Q}$ ein und zwar ebenfalls eindeutig bestimmter Divisor derselben Classe Q, weil ja $\mathfrak{x}$ eindeutig bestimmt ist und der Hauptclasse angehört. Durch die so sich ergebende Gleichung:

(3) $$\mathfrak{Q} = c_1 \mathfrak{Q}_1 + c_2 \mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_\mu$$

ist also für jedes Werthsystem $c_1, \cdots c_\mu$ ein Divisor $\mathfrak{Q}$ von Q eindeutig bestimmt, nämlich $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0 \mathfrak{x}$, wenn $\mathfrak{Q}_0$ der Multiplicator für Q und

$$\mathfrak{x} = \sum c_i \mathfrak{x}_i$$

ist. Diese Bestimmung von $\mathfrak{Q}$ ist ganz unabhängig von der Wahl des

Multiplicators $\mathfrak{Q}_0$; denn setzt man $\mathfrak{Q}_0'$ an die Stelle von $\mathfrak{Q}_0$ und sind $\xi', \xi_1', \cdots \xi_\mu'$ die zu $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \cdots$, zugeordneten Functionen der Hauptclasse, so ist

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_0' \xi'$$

und

$$\xi' = c_1 \xi_1' + \cdots + c_\mu \xi_\mu'$$

und dies ergiebt genau denselben Divisor, weil ja allgemein $\xi_i' = \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'} \xi_i$ also $\xi' = \xi \cdot \frac{\mathfrak{Q}_0}{\mathfrak{Q}_0'}$ ist.

Durch die Gleichung (3) ist also für jedes Werthsystem $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ ein Divisor $\mathfrak{Q}$ von Q eindeutig bestimmt. Wir können das Verhalten des so bestimmten Divisors $\mathfrak{Q}$ in Bezug auf jeden einzelnen Primfactor $\mathfrak{P}$ leicht feststellen. Zu diesem Zwecke wählen wir den Multiplicator $\mathfrak{Q}_0$ einfach so, dass er $\mathfrak{P}$ weder im Zähler noch im Nenner enthält, was nach der oben gemachten Bemerkung stets möglich ist. Dann enthalten aber die Divisoren $\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$ den Primtheiler $\mathfrak{P}$ genau so oft, wie die zugeordneten Functionen $\xi, \xi_1, \cdots \xi_\mu$, welche durch die Gleichung (1) zusammenhängen, und da dasselbe für jeden Divisor $\mathfrak{P}$ bewiesen werden kann, so können die soeben für die Hauptclasse gefundenen Resultate unmittelbar auf die beliebige Classe Q übertragen werden. Ist also wieder $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler von $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$, ist also allgemein:

$$\mathfrak{Q}_i = \mathfrak{D}\mathfrak{G}_i,$$

wo die ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ theilerfremd sind, so ist $\mathfrak{Q}$ ebenfalls durch $\mathfrak{D}$ theilbar, also gleich $\mathfrak{D}\mathfrak{G}$, und man kann die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_\mu$ stets so bestimmen, dass $\mathfrak{Q}$ entweder beliebig gegebene Divisoren nicht enthält, oder dass $\mathfrak{Q}$ einen gegebenen Primfactor $\mathfrak{P}$ als Theiler besitzt.

Wir sagen, μ Divisoren $\mathfrak{Q}_1, \cdots \mathfrak{Q}_\mu$ sind *linear unabhängig*, wenn zwischen ihnen keine lineare Relation:

$$c_1 \mathfrak{Q}_1 + c_2 \mathfrak{Q}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{Q}_\mu = 0$$

mit constanten Coefficienten besteht, oder, was dasselbe ist, wenn die μ zugeordneten Functionen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$ der Hauptclasse linear unabhängig sind.

§ 13.

Unter den Divisoren einer Classe Q sind nun diejenigen von besonderer Bedeutung, welche ganz sind, also keinen Nenner haben. Sie bilden einen Theilbereich jener Classe, welchen ich ihren *Integritätsbereich* nennen und durch $[Q]$ bezeichnen will.

Ist

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}_0 \xi$$

ein *ganzer* Divisor von Q', so ist für die zugeordnete Function ξ

$$\xi = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{Q}_0},$$

d. h. $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann ein ganzer Divisor von Q, wenn die zugeordnete Function ξ ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ ist, und $\mathfrak{Q}_0$ wieder den zur Classe Q gehörigen Multiplicator bedeutet.

Sind $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ irgend welche ganze Divisoren von Q, so ist nach den Ergebnissen des vorigen Abschnittes jeder Divisor:

$$\mathfrak{G} = c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu\mathfrak{G}_\mu$$

ebenfalls ein ganzer Divisor. Wir wollen nun zeigen, dass für jede Classe Q nur eine endliche Anzahl linear unabhängige ganze Divisoren existiren, durch welche alle anderen homogen und linear dargestellt werden können. Hierzu führen folgende Ueberlegungen:

Die Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ bilden dann und nur dann ein linear unabhängiges System ganzer Divisoren der Classe (Q), wenn die zugeordneten Functionen $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_\mu$ der Hauptclasse ebenfalls linear unabhängig und sämmtlich Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ sind. Ist umgekehrt $\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_N$ ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, so dass also allgemein

$$\xi_i = \frac{\mathfrak{G}_i}{\mathfrak{Q}_0}$$

ist, so bilden die zugeordneten Divisoren

$$\xi_1\mathfrak{Q}_0, \quad \xi_2\mathfrak{Q}_0, \cdots \quad \xi_N\mathfrak{Q}_0$$

offenbar ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Divisoren von Q.

Mit Benutzung der im § 9 auseinandergesetzten Methode können wir aber stets ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$ aufstellen. Zu diesem Zwecke bilden wir ein Fundamentalsystem

$$\xi_1, \xi_2, \cdots \xi_n$$

für den Körper K und den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, welches in Bezug auf die Stelle $(x = a_0)$ regulär ist. Sind dann wieder

$$r_1, r_1, \cdots r_n$$

die Ordnungszahlen jener Functionen in Bezug auf jene Stelle $(x = a_0)$, und sind ferner $r_1, \cdots r_s$ diejenigen unter ihnen, welche positiv sind, so bilden die

$$N = (r_1 + 1) + \cdots + (r_s + 1)$$

Functionen:

$$\xi_i, \frac{\xi_i}{(x-a_0)}, \cdots \frac{\xi_i}{(x-a_0)^{r_i}} \qquad (i=1,2,\cdots s)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_0}$, und ihre zugeordneten Divisoren ein vollständiges System ganzer Divisoren von Q.

Ein jedes vollständige System $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_N)$ linear unabhängiger ganzer Divisoren von Q soll *ein Fundamentalsystem für den Bereich* $[Q]$ heissen, und die Anzahl N seiner Elemente wollen wir *die Dimension* von Q nennen, und durch $\{Q\}$ bezeichnen.

Für eine beliebige Divisorenclasse Q von negativer Ordnung ist offenbar $\{Q\}=0$, da ein ganzer Divisor negativer Ordnung nicht existirt. Dasselbe ist für jede Classe von der Ordnung Null der Fall, welche nicht die Einheitsclasse ist, denn ein ganzer Divisor kann nur dann die Ordnung Null haben, wenn er gleich Eins ist; in diesem Falle ist aber $Q=E$, weil diese Classe allein die Constanten enthält. Also ist endlich

$$\{E\}=1,$$

denn hier sind die Constanten die einzigen linear unabhängigen ganzen Elemente von E.

§ 14.

Wir verallgemeinern jetzt das im vorigen Paragraphen gefundene Resultat, indem wir uns folgende Aufgabe stellen:

Es sollen alle Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb einer beliebigen Classe R gefunden werden.

Ist speciell $R=E$ die Hauptclasse, so ist diese Aufgabe bereits in I a. S. 449 aufgestellt und dann vollständig gelöst worden; sie wurde damals als das Hauptproblem in der Theorie der algebraischen Functionen bezeichnet. Wir zeigen jetzt dass und wie die hier vorgelegte allgemeinste Aufgabe unmittelbar auf jene zurückgeführt werden kann.

Ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{Q}\mathfrak{G}$ ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ innerhalb R, so ist $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor der Classe $\frac{R}{Q}$ und umgekehrt, da ja $R=Q\cdot\frac{R}{Q}$ ist; bilden also

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$$

ein Fundamentalsystem für die Classe $\frac{R}{Q}$, so ist $\mathfrak{R}=\mathfrak{Q}\mathfrak{G}$ dann und nur dann ein Multiplum von $\mathfrak{G}$, wenn:

$$\mathfrak{G}=c_1\mathfrak{G}_1+c_2\mathfrak{G}_2+\cdots+c_\mu\mathfrak{G}_\mu$$

ist, d. h. die μ Divisoren:

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{G}_1, \mathfrak{Q}\mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{Q}\mathfrak{G}_\mu$$

bilden ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$, und man erhält so den wichtigen Satz:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{Q}$, welche innerhalb einer beliebigen Divisorenclasse R existiren, ist stets gleich

$$\left\{\frac{R}{Q}\right\},$$

also gleich der Dimension der Classe $\frac{R}{Q}$, wenn Q die Classe des betrachteten Divisors ist; diese Anzahl ist also von der speciellen Wahl von $\mathfrak{Q}$ innerhalb der Classe Q ganz unabhängig. Man erhält ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb R dadurch, dass man die Elemente eines Fundamentalsystemes für die Classe $\frac{R}{Q}$ mit $\mathfrak{Q}$ multiplicirt.

Ist speciell $R = E$ die Hauptclasse, so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla von $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Körpers $K(x, y)$ gleich der Dimension $\left\{\frac{E}{Q}\right\} = \left\{\frac{1}{Q}\right\}$ der durch den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$ bestimmten Classe, man erhält also für unsere frühere Aufgabe noch das beinahe selbstverständliche Resultat:

Die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla eines Divisors $\mathfrak{Q}$ innerhalb des Körpers $K(x, y)$ bleibt ungeändert, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch einen beliebigen äquivalenten Divisor ersetzt.

Es sei jetzt Q eine beliebige Classe, und

$$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots \mathfrak{G}_\mu$$

möge ein Fundamentalsystem für Q sein. Ist dann $\mathfrak{D}$ der grösste gemeinsame Theiler jener μ Divisoren, so ist $\mathfrak{D}$ ebenfalls ganz, und jeder andere ganze Divisor von G:

$$\mathfrak{G} = c_1 \mathfrak{G}_1 + c_2 \mathfrak{G}_2 + \cdots + c_\mu \mathfrak{G}_\mu.$$

ist ebenfalls ein Multiplum von $\mathfrak{D}$ also gleich $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}$.

Es sei nun allgemein:

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}}_i;$$

ist dann D die zu $\mathfrak{D}$ gehörige Classe, so bilden die μ theilerfremden ganzen Divisoren

$$\overline{\mathfrak{G}}_1, \overline{\mathfrak{G}}_2, \cdots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

ein Fundamentalsystem für die Classe:

$$\overline{Q} = \frac{Q}{D},$$

denn diese Divisoren gehören erstens offenbar alle zu dieser Classe, zweitens sind sie linear unabhängig, und drittens ist jeder ganze Divisor $\overline{\mathfrak{G}}$ von $\overline{G}$ in der Form

$$\overline{\mathfrak{G}} = c_1 \overline{\mathfrak{G}}_1 + \cdots + c_\mu \overline{\mathfrak{G}}_\mu$$

darstellbar, weil das Product $\mathfrak{D}\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}$ zu Q gehört, also in der Form $c_1 \mathfrak{G}_1 + \cdots + c_\mu \mathfrak{G}_\mu$ enthalten ist. Da die μ Divisoren $\overline{\mathfrak{G}}_1, \cdots \overline{\mathfrak{G}}_\mu$ theilerfremd sind, so kann man innerhalb $\overline{G}$ einen Divisor

$$\overline{\mathfrak{G}} = \sum c_i \overline{\mathfrak{G}}_i$$

so auswählen, dass er beliebige Primfactoren nicht enthält; wir denken uns einen Divisor $\overline{\mathfrak{G}}_0$ speciell so gewählt, dass er zu $\mathfrak{D}$ relativ prim ist.

Ist also Q eine beliebige Classe, $\mathfrak{D}$ der Theiler aller Divisoren des Integritätsbereiches $[Q]$, ist ferner D die Classe von $\mathfrak{D}$, und

$$Q = D\overline{Q},$$

so besitzen die beiden Classen dieselbe Dimension μ, d. h. es ist:

$$\{Q\} = \{\overline{Q}\};$$

ferner aber besteht der Satz, dass für die Classe D

$$\{D\} = 1$$

ist, dass nämlich jene Classe nur den einen ganzen Divisor $\mathfrak{D}$ enthält. In der That, existirte ausser $\mathfrak{D}$ auch nur noch ein anderer ganzer Divisor $\mathfrak{D}'$ innerhalb D, und ist $\overline{\mathfrak{G}}_0$ der oben bestimmte zu $\mathfrak{D}$ theilerfremde Divisor von $\overline{G}$, so würde ja das Product $\mathfrak{D}'\overline{\mathfrak{G}}_0$ ein ganzer Divisor von G, also als solcher nothwendig durch $\mathfrak{D}$ theilbar sein, und dies ist unmöglich, da $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zu $\mathfrak{D}$ relativ prim, und $\mathfrak{D}'$ von $\mathfrak{D}$ verschieden ist, also nothwendig mindestens einen Primfactor $\mathfrak{P}$ weniger oft enthält als $\mathfrak{D}$.

Eine Classe Q soll nach dem Vorgange der Herren *Dedekind* und *Weber* eine *eigentliche* Classe genannt werden, wenn ihre ganzen Divisoren $\mathfrak{G}_1, \cdots \mathfrak{G}_\mu$ relativ prim sind; haben dieselben dagegen den grössten gemeinsamen Theiler $\mathfrak{D}$, so soll G eine *uneigentliche Classe vom Theiler* $\mathfrak{D}$ genannt werden. Im letzteren Falle kann also vermittelst der Gleichung:

$$Q = D \cdot \overline{Q}$$

jede uneigentliche Classe als Product einer eigentlichen Classe $\overline{Q}$ und einer anderen D dargestellt werden, deren Dimension $\{D\}$ stets gleich Eins ist. Ist Q selbst eine eigentliche Classe, so ist speciell $\mathfrak{D} = 1$, $D = E$, und es ist also auch hier $\{D\} = \{E\} = 1$. Sind endlich q, $\overline{q}$ und δ die Ordnungszahlen von Q, $\overline{Q}$ und von $\mathfrak{D}$, so folgt aus dieser Gleichung:

$$q = \overline{q} + \delta, \qquad \{Q\} = \{\overline{Q}\}.$$

§ 15.

Wir wollen die in dem ersten Theile dieser Arbeit gefundenen rein arithmetischen Resultate jetzt auf die Theorie der algebraischen Differentiale und die zu ihnen gehörigen Integralfunctionen anwenden.

Es seien ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers $K(x, y)$ und es möge:

$$F(\xi, \eta) = 0$$

die zwischen ihnen bestehende irreductible algebraische Gleichung sein. Dann ergiebt sich aus ihr durch Differentiation die Gleichung:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial \xi}}{\dfrac{\partial F}{\partial \eta}} = -\frac{F'_\xi}{F'_\eta}$$

d. h. das Verhältniss der beiden Differentiale $d\xi$ und $d\eta$ ist als rationale Function von ξ und η eine Grösse des Körpers $K(x, y)$, welche also durch den zu ihr gehörigen Divisor bis auf eine multiplicative Constante bestimmt ist. Wir stellen uns daher die für das Folgende fundamentale Aufgabe, diesen Divisor zu bestimmen.

Wegen der Gleichung:

$$\frac{d\eta}{\partial \xi} = \frac{d\eta}{dx} : \frac{d\xi}{dx}$$

genügt es offenbar, zu bestimmen, wie oft ein beliebiger Primdivisor $\mathfrak{P}$ in jedem der beiden Differentialquotienten $\frac{d\xi}{dx}$ und $\frac{d\eta}{dx}$ enthalten ist, wenn x irgend eine Grösse des Körpers ist, die als unabhängige Variable angenommen wird. Der Einfachheit wegen wählen wir x so, dass der betrachtete Punkt $\mathfrak{P}$ einem endlichen Punkte $(x = a)$ der zugehörigen Riemann'schen Fläche entspricht, und es bestehe für die Function ξ in der Umgebung der Stelle $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung:

$$\xi - \xi_0 = \xi_d (x - a)^{\frac{d}{\alpha}} + \xi_{d+1} (x - a)^{\frac{d+1}{\alpha}} + \cdots,$$

wo also ξ_0 das constante Glied in der Entwickelung von ξ bedeutet, und die Ordnungszahl d von $\xi - \xi_0$ positiv oder auch negativ sein kann; dann enthält also der Linearfactor $\xi - \xi_0$ genau die d^{te} Potenz von $\mathfrak{P}$. Durch Differentiation dieser Gleichung nach x ergiebt sich aber:

$$\frac{d\xi}{dx} = \xi_d \cdot \frac{d}{\alpha} (x - a)^{\frac{d-\alpha}{\alpha}} + \cdots .$$

Enthält also $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$, so ist $\frac{d\xi}{dx}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-\alpha}$ theilbar, wenn die Stelle $\mathfrak{P}$ für die Kugelfläche K_x ein α-blättriger Verzweigungspunkt ist, Da aber das Analoge auch für die Function η gilt, so ergiebt sich zunächst das folgende einfache Resultat:

Sind ξ_0 und η_0 die zu ξ und η gehörigen constanten Glieder in der Entwickelung jener Functionen in der Umgebung der beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$, und sind die Linearfactoren $\xi - \xi_0$ und $\eta - \eta_0$ also durch $\mathfrak{P}^d$ und $\mathfrak{P}^e$ theilbar, so ist der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ genau durch $\mathfrak{P}^{e-d}$ theilbar, es ist also

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \prod_{(\mathfrak{P})} \mathfrak{P}^{e-d},$$

wenn das Product über alle Stellen $\mathfrak{P}$ erstreckt wird.

Denselben Divisor können wir aber, und das ist das Wesentliche, auf andere Art und zwar in geschlossener Form darstellen. Wählt man ξ als unabhängige Variable, so gehört zu ihr eine Riemann'sche Kugelfläche $\mathfrak{K}_\xi$ und ein bestimmter Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$, welcher alle und nur die Verzweigungsfactoren $\mathfrak{P}$ für diese Fläche $\mathfrak{K}_\xi$ enthält, jeden zu der Potenz erhoben, welche seine Ordnungszahl angiebt; das Entsprechende gilt für die Function η. Es sei nun

$$\xi = \frac{\mathfrak{z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi}, \qquad \eta = \frac{\mathfrak{z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta}$$

und es seien $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$ bzw. die Verzweigungstheiler für die Functionen ξ und η. Dann gilt der folgende wichtige Satz:

Sind ξ und η zwei beliebige Grössen des Körpers K, so besteht immer die Gleichung

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}. \tag{1}$$

Zum Beweise dieses Satzes brauchen wir nur zu zeigen, dass der rechts stehende Quotient jeden Primfactor $\mathfrak{P}$ in der $(e-d)^{\text{ten}}$ Potenz enthält, und dies ist offenbar geschehen, sobald wir nachgewiesen haben, dass für ein beliebiges ξ der Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar ist und das Analoge für η gilt.

Ist nun $\mathfrak{P}$ zunächst eine im Endlichen liegende Stelle der Fläche $\mathfrak{K}_\xi$ und enthält der zugehörige Linearfactor $\xi - \xi_0$ die Potenz $\mathfrak{P}^d$ von $\mathfrak{P}$, so ist, wie oben § 10 gezeigt wurde, $\mathfrak{P}$ eine endliche Verzweigungsstelle der $(d-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, also ist $\mathfrak{Z}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar, während in $\mathfrak{n}_\xi$ der Divisor $\mathfrak{P}$ gar nicht auftritt, weil $\mathfrak{P}$ im Endlichen liegt. Also ist $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ in diesem Falle wirklich genau durch $\mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar.

Ist dagegen $\mathfrak{P}$ eine unendlich ferne Stelle für $\mathfrak{K}_\xi$, ist also $d = -\delta$ negativ, so ist $\mathfrak{n}_\xi$ durch $\mathfrak{P}^\delta$ theilbar, und $\mathfrak{P}$ entspricht einem Verzweigungspunkte der $(\delta - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung, der Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$ enthält somit genau die Potenz $\mathfrak{P}^{\delta-1}$. Also ist der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ durch $\mathfrak{P}^{\delta-1-2\delta} = \mathfrak{P}^{-\delta-1} = \mathfrak{P}^{d-1}$ theilbar, die aufgestellte Behauptung ist also vollständig bewiesen. Ebenso zeigt man, dass der Quotient $\frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$ genau $\mathfrak{P}^{e-1}$ enthält, und damit ist die Richtigkeit der Gleichung (1) bewiesen.

Aus dieser Gleichung ziehen wir zunächst eine merkwürdige und für das Weitere sehr wichtige Folgerung. Da nämlich der Differentialquotient $\frac{d\eta}{d\xi}$ eine Function des Körpers K ist, so sind die beiden Divisoren:

$$\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \quad \text{und} \quad \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2}$$

auf der rechten Seite von (1) einander nothwendig äquivalent, und daher sind ihre Ordnungszahlen einander gleich, wie auch ξ und η innerhalb des Körpers angenommen sein mögen. Sind also ξ und η zwei beliebige Functionen des Körpers, sind n_ξ und n_η ihre Grade, und w_ξ und w_η die Ordnungen ihrer Verzweigungstheiler $\mathfrak{Z}_\xi$ und $\mathfrak{Z}_\eta$, so ist stets:

$$w_\xi - 2n_\xi = w_\eta - 2n_\eta$$

d. h. die Zahl $w - 2n$ ist eine Invariante des Körpers, denn sie ist unabhängig von der Wahl der zu Grunde gelegten Variablen. Nach § 9 ist w eine gerade, also die Zahl

$$p = \frac{1}{2}w - n + 1$$

eine ganze Zahl, welche für jede Grösse von K den gleichen Werth besitzt. Wir nennen dieselbe das *Geschlecht* von K. Diese Zahl ist eine der wichtigsten Invarianten des Körpers.

§ 16.

Jedes Differential, das zu dem Körper K gehört, kann je nach der Wahl der Integrationsvariablen in sehr verschiedener Form geschrieben werden. Ist ξ die Integrationsvariable, ζ_ξ der Integrand, so ist das zugehörige Differential

$$d\omega = \zeta_\xi d\xi,$$

und beim Uebergange zu einer anderen Integrationsvariablen η erhält man:

$$d\omega = \zeta_\xi \cdot d\xi = \zeta_\xi \cdot \frac{d\xi}{d\eta} \cdot d\eta = \xi_\eta d\eta.$$

Sind also ζ_ξ und ζ_η die Integranden für ein und dasselbe Differential $d\omega$, wenn man das eine Mal ξ, das andere Mal η als Integrationsvariable zu Grunde legt, so sind diese beiden Grössen des Körpers K durch die Gleichung:

$$\frac{\zeta_\xi}{\zeta_\eta} = \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} : \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

mit einander verbunden, d. h. es besteht für jede Grösse von K die Gleichung:

$$\zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} = \zeta_\eta \frac{\mathfrak{Z}_\eta}{\mathfrak{n}_\eta^2} = \mathfrak{W}_\omega,$$

wo also $\mathfrak{W}_\omega$ ein algebraischer Divisor ist, welcher nur von dem Differential $d\omega$, aber in keiner Weise von der Wahl der Integrationsvariablen ξ oder η abhängt und *der dem Differentiale $d\omega$ zugehörige Divisor* genannt werden soll. Umgekehrt ist aber auch das Differential $d\omega$ durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ bis auf eine multiplicative Constante vollständig bestimmt; denn für eine beliebige Integrationsvariable ξ ist ja dann:

$$d\omega = \zeta_\xi \, d\xi \quad \text{und} \quad \zeta_\xi = \frac{\mathfrak{W}_\omega \cdot \mathfrak{n}_\xi^2}{\mathfrak{Z}_\xi}.$$

Alle Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ sind untereinander äquivalent, sie gehören also einer und derselben Divisorenclasse (W) an; denn ist:

$$d\omega = \zeta_\xi \, d\xi,$$

$$d\omega' = \zeta'_\xi \, d\xi,$$

so ist ja für die zugehörigen Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ und $\mathfrak{W}_{\omega'}$

$$\frac{\mathfrak{W}_\omega}{\mathfrak{W}_{\omega'}} = \frac{\zeta_\xi}{\zeta'_\xi},$$

d. h. jener Quotient ist eine Grösse von K, und da

$$\mathfrak{W}_\omega = \zeta_\xi \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2} \sim \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$$

ist, so ist die Classe (W) mit der Classe aller Divisoren identisch, welche äquivalent dem Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$ sind, wenn ξ irgend eine Grösse des Körpers bedeutet. Es kann demnach die Classe (W) aller Differentialtheiler auch als die Classe $\left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ bezeichnet werden. Umgekehrt entspricht auch jeder Divisor $\mathfrak{W}$ dieser Classe einem Differentiale $d\omega$; denn ist $\mathfrak{W}$ äquivalent $\frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2}$, so ist ja

$$\mathfrak{W} = \zeta \cdot \frac{\mathfrak{Z}_\xi}{\mathfrak{n}_\xi^2},$$

wo ζ eine Grösse des Körpers K ist, d. h. $\mathfrak{W}$ entspricht dem Differentiale:

$$d\omega = \zeta\, d\xi.$$

Wie also alle und nur die Divisoren der Hauptclasse mit allen Grössen des Körpers $K(x\bar{y})$ zusammenfallen, so entsprechen alle und nur die Divisoren der Classe $(W) = \left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ allen Differentialen $d\omega$, welche zu diesem Körper K gehören; daher soll (W) die zum Körper K gehörige *Differentialclasse* genannt werden. Die Ordnung der Differentialclasse $\left(\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}\right)$ ist $w - 2n = 2p - 2$, ist somit im Allgemeinen von Null verschieden. Die Untersuchung dieser Divisorenclasse fällt also vollständig mit der Betrachtung aller Abel'schen Differentiale zusammen. Als Multiplicator für die Differentialclasse kann man irgend einen Divisor $\frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$ wählen, wenn x eine Grösse des Körpers K bedeutet. Diesem Multiplicator entspricht dann die Darstellung der Differentiale $d\omega$ in der Form $\xi_x\, dx$ d. h. die Wahl von x als Integrationsvariable.

Wir fragen uns zunächst, wie sich das einem Abel'schen Differentiale $d\omega$ zugehörige Integral ω in der Umgebung einer beliebigen Stelle $\mathfrak{P}$ verhält, und wir zeigen, dass dasselbe an allen und nur denjenigen Stellen nicht regulär ist, für welche die zugehörigen Primfactoren in $\mathfrak{W}_\omega$ enthalten sind. Es werde die Integrationsvariable x so gewählt, dass der gerade betrachtete Primfactor $\mathfrak{P}$ weder in $\mathfrak{n}_x$ noch in $\mathfrak{Z}_x$ auftritt, dass also die Stelle $\mathfrak{P}$ eine reguläre im Endlichen liegende Stelle der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ ist. Beides ist offenbar möglich; denn man braucht nur für x eine Grösse zu wählen, welche in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung verschwindet; dann entspricht ja $\mathfrak{P}$ eine reguläre Nullstelle für $x = 0$. Dann ist in dem Differentiale:

$$d\omega = \zeta_x\, dx \qquad \zeta_x = \frac{\mathfrak{W}_\omega \mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x}$$

ζ_x in Bezug auf $\mathfrak{P}$ von genau derselben Ordnung wie $\mathfrak{W}_\omega$. Ist also $\mathfrak{W}_\omega$ genau durch $\mathfrak{P}^d$ theilbar, wo d positiv, negativ oder Null sein kann, so besteht für $\zeta_x dx$ in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ die folgende Entwickelung nach Potenzen von x:

$$d\omega = \zeta_x\, dx = (\alpha_d x^d + \alpha_{d+1} x^{d+1} + \cdots)\, dx,$$

und durch gliedweise Integration dieser Reihe ergiebt sich also

$$\omega - \omega_0 = \frac{\alpha_d}{d+1}\, x^{d+1} + \cdots,$$

wo ω_0 die Integrationsconstante ist, oder für den speciellen Fall, dass $d = -1$ ist:

$$\omega - \omega_0 = \alpha_{-1} lx + \cdots,$$

d. h. es besteht der Satz:

Ist $\mathfrak{P}$ ein d-facher Theiler des zu $d\omega$ gehörigen Divisors $\mathfrak{W}_\omega$, so ist das Integral $\omega - \omega_0$ entweder durch $\mathfrak{P}^{d+1}$ oder durch $l(\mathfrak{P})$ theilbar, je nachdem $d \gtrless -1$ oder $d = -1$ ist. Wir sagen hier, dass eine Integralfunction den Divisor $l\mathfrak{P}$ enthält, wenn ihre Entwickelung in der Umgebung von $\mathfrak{P}$ mit dem Logarithmus des zugehörigen Linearfactors anfängt.

Wir sagen nun, ein Integral verhält sich an einer Stelle $\mathfrak{P}$ regulär, wenn $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{P}$ von der ersten Ordnung ist, oder wenn in der Umgebung derselben die Entwickelung besteht:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 (x - a)^{\frac{1}{\alpha}} + \omega_2 (x - a)^{\frac{2}{\alpha}} + \cdots$$

und der Coefficient ω_1 von Null verchieden ist, d. h. wenn die Differenz $\omega - \omega_0$ in $\mathfrak{P}$ genau von der ersten Ordnung verschwindet. Dann folgt aus dem soeben bewiesenen Satze, dass ω für alle und nur die Primdivisoren nicht regulär ist, welche in $\mathfrak{W}_\omega$ enthalten sind, und zwar wird $\omega - \omega_0$ für alle und nur die Theiler des Nenners in $\mathfrak{P}$ unendlich gross. Wir brauchen daher im Folgenden nur die Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ zu betrachten, um die Natur der Abel'schen Integrale ω vollständig kennen zu lernen. Man erkennt somit, dass in der That das Integral ω an jeder Stelle $\mathfrak{P}$ durch den zugehörigen Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ in durchaus einheitlicher Weise charakterisirt wird.

Jeden Differentialtheiler $\mathfrak{W}_\omega$ können wir als Quotienten zweier ganzen Divisoren d. h. in der Form schreiben:

$$\mathfrak{W}_\omega = \frac{\mathfrak{z}_\omega}{\mathfrak{n}_\omega}.$$

Der Nenner enthält alle und nur die Punkte, welche den sämmtlichen Unendlichkeitsstellen des Integrales ω entsprechen, und zwar entspricht jedem einfachen Primfactor eine logarithmische Unstetigkeitsstelle, jedem Primfactor $\mathfrak{P}^m$ ein Pol der $(m-1)$ Ordnung in dem Integrale. Ebenso enthält der Zähler alle und nur die Stellen für welche $\omega - \omega_0$ von höherer als der ersten Ordnung verschwindet.

§ 17.

Die Fundamentalaufgabe in der Theorie der Abel'schen Integrale kann in ihrer allgemeinsten Form so ausgesprochen werden:

Es soll ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale $d\omega$ gefunden werden, deren Divisor $\mathfrak{W}_\omega$ ein Multiplum eines beliebig gegebenen Divisors $\mathfrak{Q}$ ist, für welche also

$$\mathfrak{W}_\omega = \mathfrak{G}_\omega \mathfrak{Q}$$

ist, wenn $\mathfrak{G}_\omega$ irgend einen *ganzen* Divisor bedeutet.

Diese Aufgabe kann, und zwar für eine beliebig gegebene Integrationsvariable folgendermassen gelöst werden:

Wir bilden nach der im § 4 angegebenen Methode ein Fundamentalsystem:

$$(1) \qquad \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

für den Körper K und die unabhängige Variable x in Bezug auf alle Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, und zwar möge es gleich so gewählt sein, dass es für eine beliebige reguläre Stelle $(x = a_0)$ regulär ist. Zu diesem Systeme bilden wir das complementäre:

$$(2) \qquad \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n;$$

nach § 7 III ist dasselbe dann in Bezug auf $(x = a_0)$ ebenfalls regulär, und es kann von vornherein so geordnet vorausgesetzt werden, dass die Ordnungszahlen seiner Elemente

$$\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$$

in Bezug auf diese Stelle eine zunehmende Reihe bilden, dass also allgemein $\bar{\varrho}_i \leq \bar{\varrho}_{i+1}$ ist. Ist dann $\bar{\xi}_s$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\bar{\varrho}_s \geq 2$ ist, so bilden die folgenden Differentiale:

$$(3) \qquad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^2}\,dx, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^3}\,dx, \cdots, \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^{\bar{\varrho}_i}}\,dx \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Abel'scher Differentiale, $d\omega = \zeta_x\,dx$, für welche $\mathfrak{W}_\omega$ ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$ ist.

Das System $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ ist nämlich n. d. V. ein Fundamentalsystem für die Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}}$, also das complementäre $(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n)$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des complementären Divisors $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$. Da dasselbe aber in Bezug auf die Stelle $(x = a_0)$ der unabhängigen Variablen x ausserdem regulär ist, so bilden die Elemente:

$$\bar{\xi}_i, \quad \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)}, \cdots, \frac{\bar{\xi}_i}{(x-a_0)^{\bar{\varrho}_i-2}} \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Z}_x}$, welche ausserdem in allen n Punkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \cdots, \mathfrak{P}_n$, welche bei $x = a_0$ über einander liegen, mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen, oder, was dasselbe ist, jene Elemente bilden ein vollständiges System aller Multipla des Divisors:

$$\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{z}^2_{x-a_0}}{\mathfrak{Z}_x}.$$

Dividirt man daher jedes dieser Elemente mit

$$(x-a_0)^2 = \frac{\mathfrak{z}^2_{x-a_0}}{\mathfrak{n}^2_x},$$

so erkennt man, dass in der That die Elemente (3) ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}^2_x}{\mathfrak{Z}_x}$ bilden, also den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Als Beispiel betrachten wir die s. g. *Integrale erster Gattung* ε, welche an keiner einzigen Stelle eine Unendlichkeitsstelle besitzen. Aus den Ergebnissen des § 16 folgt, dass dies dann und nur dann der Fall ist, wenn der dem Differentiale $d\varepsilon$ zugehörige Divisor $\mathfrak{W}_\varepsilon$ ganz ist, also keinen Nenner besitzt. Also entspricht den linear unabhängigen ganzen Divisoren der Classe (W) oder, was dasselbe ist, den Vielfachen des Divisors $\mathfrak{Q} = 1$ ein vollständiges System linear unabhängiger Differentiale erster Gattung.

Der Einfachheit wegen nehmen wir an, was ja eventuell stets durch eine Substitution $x' = \frac{1}{x-a_0}$ erreicht werden kann, dass der Stelle $x=\infty$ n reguläre Punkte der Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ entsprechen. Alsdann können wir die Stelle $(x=\infty)$ an Stelle der vorher eingeführten $(x=a_0)$ wählen, und daher den Linearfactor $x-a_0$ durch $\frac{1}{x}$ ersetzen. Nach der soeben angegebenen Methode bilden wir nun zuerst ein Fundamentalsystem

$$\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$$

für die ganzen algebraischen Functionen von $K(x, y)$, welches für die Stelle $(x=\infty)$ regulär ist, und es bedeuten:

$$\varrho_1, \varrho_2, \cdots, \varrho_n$$

die Ordnungszahlen der n Elemente η_i für jene Stelle und zwar seien dieselben so bezeichnet, dass $\varrho_1 \geq \varrho_2 \geq \cdots \geq \varrho_n$ ist. Dann ist

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \cdots + \varrho_n = -\frac{w}{2},$$

und man zeigt leicht, dass $\varrho_1 = 0$ ist und alle folgenden Ordnungszahlen negativ sind. In der That, eine ganze algebraische Function η besitzt im Endlichen gar keinen Pol; soll sie also keine Constante sein, so muss sie mindestens in einem der n unendlich fernen Punkte von negativer Ordnung sein, ihre Ordnungszahl ϱ für $(x=\infty)$ ist also stets negativ und nur dann Null, wenn η eine Constante ist. Da aber im Körper K sicher auch die Constanten auftreten, so muss $\eta_1 = c$, folglich $\varrho_1 = 0$ sein, aber ϱ_2 kann dann nicht mehr Null sein, da sonst auch η_2 constant wäre, also η_1 und η_2 rational abhängig wären.

Es sei nun

$$(\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \cdots, \bar{\eta}_n)$$

das complementäre System zu $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. Sind dann

$$\bar{\varrho}_1, \bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente, so ist allgemein:

$$\bar{\varrho}_i = -\varrho_i,$$

d. h. es ist $\bar{\varrho}_1 = 0$, und alle folgenden Ordnungszahlen $\bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_n$ sind positiv. Ist also $\bar{\eta}_s$ das erste Element, dessen Ordnungszahl $\geqq 2$ ist, so bilden die Functionen:

$$\bar{\eta}_i,\ x\bar{\eta}_i,\ x^2\bar{\eta}_i, \cdots, x^{\bar{\varrho}_i - 2}\bar{\eta}_i \qquad (i = s, s+1, \cdots, n)$$

ein vollständiges System linear unabhängiger Integranden erster Gattung, denn sie bilden ein vollständiges System linear unabhängiger Multipla von $\frac{\mathfrak{n}_x^2}{\mathfrak{Z}_x}$, da sie für $x = \infty$ alle mindestens die Ordnungszahl 2 besitzen. Da $\bar{\varrho}_2, \cdots, \bar{\varrho}_{s-1}$ alle gleich Eins, also $\bar{\varrho}_2 - 1, \cdots, \bar{\varrho}_{s-1} - 1$ gleich Null sind, so kann ihre Anzahl auch so geschrieben werden:

$$\bar{\varrho}_1 + (\bar{\varrho}_2 - 1) + \cdots + (\bar{\varrho}_n - 1) = \sum_1^n \bar{\varrho}_k - n + 1$$

und da nach § 7 III

$$\sum \bar{\varrho}_i = -\sum \varrho_i = \sum (\alpha - 1) = \frac{w}{2}$$

ist, so folgt für die obige Summe der Werth:

$$\frac{w}{2} - n + 1 = p.$$

Also die Anzahl aller linear unabhängigen Integrale erster Gattung ist stets dem Geschlecht des Körpers $K(x, y)$ gleich.

Es existiren also nur dann gar keine allenthalben endlichen Integrale ε, wenn $p = 0$ ist, und das ist wieder dann und nur dann der Fall, wenn in dem Fundamentalsysteme $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ alle Elemente, ausser dem ersten, die Ordnungszahl -1 besitzen. Da endlich die *Anzahl*

$$p = \frac{w}{2} - n + 1$$

ihrer Natur nach nie negativ sein kann, so ist stets

$$\frac{w}{2} \geqq n - 1.$$

§ 18.

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, (Q) seine Classe, und q die Ordnung derselben; dann ist ein Differential $d\omega$ dann und nur dann ein Multiplum von $\mathfrak{Q}$, wenn für den zugehörigen Theiler $\mathfrak{W}_\omega$ eine Gleichung

$$\mathfrak{W}_\omega \sim \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{G}_\omega$$

besteht, in der $\mathfrak{G}_\omega$ einen ganzen Divisor bedeutet; da dann umgekehrt

$$\mathfrak{G}_\omega \sim \frac{\mathfrak{W}_\omega}{\mathfrak{Q}}$$

ist, so ist $\mathfrak{G}_\omega$ ein ganzer Divisor der Classe $\left(\frac{W}{Q}\right)$. Zu jeder Classe (Q) gehört eine andere $(Q') = \left(\frac{W}{Q}\right)$, die s. g. *Ergänzungsclasse*, welche alle und nur die Divisoren $\frac{\mathfrak{W}_1}{\mathfrak{Q}_1}$ enthält, deren Zähler zu (W) und deren Nenner zu (Q) gehört. Ist q' die Ordnung der Classe (Q'), so folgt aus der Gleichung

$$(Q) \cdot (Q') = (W),$$
$$q + q' = 2p - 2.$$

Ein Differential $d\omega$ ist also dann und nur dann ein Multiplum eines Divisors $\mathfrak{Q}$, wenn $\mathfrak{W}_\omega = \mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{G}_\omega$ und $\mathfrak{G}_\omega$ ein ganzer Divisor der Ergänzungsclasse (Q') ist, und die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, ist demnach für alle zu $\mathfrak{Q}$ äquivalenten Divisoren dieselbe, nämlich gleich der Anzahl der linear unabhängigen ganzen Divisoren der Ergänzungsclasse (Q'); es ergiebt sich also der Satz:

> Ist (Q) eine beliebige Divisorenclasse, und $\mathfrak{Q}$ irgend ein Divisor von (Q), so ist die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla $d\omega$ von $\mathfrak{Q}$ stets gleich der Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsclasse von (Q).

Wir wollen jetzt eine Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsclassen herleiten, welche *der Riemann-Roch'sche Satz* genannt wird. Zu diesem Zwecke wählen wir die unabhängige Variable x so, dass der Stelle $x = \infty$ n reguläre Punkte $\mathfrak{P}_\infty$ entsprechen. Es seien dann $\mathfrak{Q}_1$ und $\mathfrak{Q}_1'$ zwei beliebige ganze oder gebrochene Divisoren, welche aber keinen Divisor $\mathfrak{P}_\infty$ enthalten, und deren Product:

$$\mathfrak{Q}_1 \cdot \mathfrak{Q}_1' = \mathfrak{Z}_x$$

dem Verzweigungstheiler der Kugelfläche K_x gleich ist. Dann sind die zu den beiden Divisoren:

$$\mathfrak{Q} = \frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{n}_x}, \qquad \mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{n}_x}$$

gehörigen Classen (Q) und (Q') Ergänzungsclassen, da

$$\mathfrak{Q} \cdot \mathfrak{Q}' = \frac{\mathfrak{Q}_1 \mathfrak{Q}_1'}{\mathfrak{n}_x^2} = \frac{\mathfrak{Z}_x}{\mathfrak{n}_x^2}$$

also $(Q Q') = (W)$ ist, und umgekehrt kann man in zwei beliebigen Ergänzungsclassen stets zwei solche Theiler $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Q}'$ finden. Die Dimension $\{Q\}$ der Classe (Q) ist dann gleich der Anzahl aller linear unabhängigen ganzen Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1}$ innerhalb $K(xy)$ und ebenso ist $\{Q'\}$ gleich der Anzahl der unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1'}$.

Um nun diese Dimensionen $\{Q\}$ und $\{Q'\}$ zu finden, bestimmen wir zunächst ein Fundamentalsystem

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$$

des Körpers $K(x, y)$ für den Divisor $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, welches für die Stelle $(x = \infty)$ regulär ist, und es seien wieder

$$r_1, r_2, \cdots, r_n \qquad (r_i \geqq r_{i+1})$$

die Ordnungszahlen seiner Elemente für jene Stelle. Dann ist das complementäre System

$$\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \cdots, \bar{\xi}_n$$

ein Fundamentalsystem für den complementären Theiler:

$$\frac{\mathfrak{Q}_1}{\mathfrak{Z}_x} = \frac{1}{\mathfrak{Q}_1'},$$

welches ebenfalls für $(x = \infty)$ regulär ist, und dessen Ordnungszahlen für jene Stelle bzw.

$$-r_1, -r_2, \cdots, -r_n$$

sind.

Dann sind alle und nur die linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1}$ in dem Systeme

$$\xi_i, x\xi_i, \cdots, x^{r_i - 1}\xi_i \qquad (r_i \geqq 1)$$

enthalten, für welche die Ordnungszahlen $r_i \geqq 1$ sind; denn alle diese sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$, weil das System (ξ_i) ein Fundamentalsystem für $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1}$ ist, aber sie sind auch Multipla von $\mathfrak{n}_x$, weil sie alle mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $(z = \infty)$ besitzen. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q\}$, ist also durch die Gleichung

$$\{Q\} = r_1 + r_2 + \cdots + r_s$$

gegeben, wenn r_s die letzte Ordnungszahl r ist, welche $\geqq 0$ ist. Hier können und sollen die Ordnungszahlen $r_i = 0$ mitgezählt werden, da sie ja an der Summe nichts ändern.

Dagegen sind alle und nur die unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}'} = \frac{\mathfrak{n}_x}{\mathfrak{Q}_1'}$ in dem Systeme:

$$\bar{\xi}_k,\ x\bar{\xi}_k,\ x^2\bar{\xi}_k,\ \cdots,\ x^{-r_k-1}\,\bar{\xi}_k \qquad (-r_k \geqq 1)$$

enthalten, für welche ihre Ordnungszahl $-r_k \geqq 1$ ist, denn alle diese sind Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1'}$, aber auch von $\mathfrak{n}_x$, weil auch sie mindestens die Ordnungszahl $+1$ für $(x=\infty)$ haben. Ihre Anzahl, die Dimension $\{Q'\}$ der Ergänzungsclasse (Q'), ist also gleich:

$$\{Q'\} = -(r_{s+1} + r_{s+2} + \cdots + r_n),$$

weil ja n. d. V. r_{s+1} die erste negative Ordnungszahl in dem Systeme (ξ_i), also $(-r_{s+1})$ die erste positive in dem complementären Systeme $(\bar{\xi}_i)$ ist. Durch Subtraction ergiebt sich also die wichtige Gleichung:

$$\{Q\} - \{Q'\} = (r_1 + r_2 + \cdots + r_n).$$

Nun war aber das System $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ ein Fundamentalsystem für die Multipla des Divisors $\frac{1}{\mathfrak{Q}_1} = \frac{1}{\mathfrak{Q}\mathfrak{n}_x}$, dessen Ordnung gleich $-(q+n)$ ist; also ist

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = q + n - \frac{w}{2} = q - p + 1,$$

wo w die Verzweigungszahl der zu x gehörigen Kugelfläche $\mathfrak{K}_x$ ist; die soeben gefundene Gleichung geht also über in:

$$\{Q\} = \{Q'\} + q - p + 1.$$

Wenn man aber jetzt Q mit Q' vertauscht, so ergiebt sich die correspondirende Gleichung

$$\{Q'\} = \{Q\} + q' - p + 1.$$

Subtrahirt man die zweite von der ersten Gleichung, so kann das Resultat folgendermassen geschrieben werden:

$$\text{(I)} \qquad \{Q\} - \frac{q}{2} = \{Q'\} - \frac{q'}{2}.$$

Ersetzt man endlich in der zweiten der soeben gefundenen Gleichungen die Ordnung Q' der Ergänzungsclasse (Q') durch $2p-2-q$, so erhält man die zweite Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad \left\{\frac{W}{Q}\right\} = \{Q'\} = \{Q\} + p - 1 - q.$$

Beide Gleichungen geben uns die gesuchte Beziehung zwischen den Dimensionen von zwei beliebigen Ergänzungsclassen und können folgendermassen in Worten ausgesprochen werden:

I) Ist $QQ' = W$, so besitzt die Differenz zwischen der Dimension und der halben Ordnung für Q und Q' stets den gleichen Werth.

II) Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor der Ordnung q und (Q) seine Classe, so ist die Anzahl aller unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Divisoren $\mathfrak{W}_\omega$ Multipla von $\mathfrak{Q}$ sind, stets gleich der Dimension der Classe (Q) vermehrt um die Zahl $p-1-q$,

Aus der zweiten Gleichung ziehen wir noch zwei einfache, aber für das Weitere sehr wichtige Folgerungen. Ist $\mathfrak{Q}$ ein beliebiger Divisor, dessen Ordnung $q = -b$ negativ ist, so ist die Dimension $\{Q\} = 0$, da es keinen ganzen Divisor von negativer Ordnung giebt. In diesem Falle ist also

III) $$\{Q'\} = \left\{\frac{W}{Q}\right\} = b + p - 1.$$

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla eines beliebigen Divisors von negativer Ordnung b sind, ist also stets gleich $b + p - 1$.

Ist zweitens $\mathfrak{Q} = \mathfrak{E}$ ein beliebiger Divisor der Hauptclasse, so ist $(Q) = (E)$ also $q = 0$, $\{E\} = 1$, da die einzigen ganzen Divisoren dieser Classe die Constanten sind; in diesem Falle ist also die Ergänzungsclasse

$$(Q') = \left(\frac{W}{E}\right) = (W)$$

und es ergiebt sich also aus (II) die Gleichung:

(IV) $$\{W\} = p,$$

also wieder der Satz, dass die Anzahl der linear unabhängigen Differentiale erster Gattung gleich p ist. Aber hier folgt allgemeiner, dass auch die Anzahl aller unabhängigen Differentiale deren Divisoren Multipla eines beliebigen Divisors $\mathfrak{E}$ der Hauptclasse ist, stets gleich p ist.

§ 19.

Wir benutzen zunächst den Riemann-Roch'schen Satz zum Beweise der Thatsache, dass die Differentialclasse (W) eines jeden Körpers K eine eigentliche ist, d. h. dass ihre ganzen Divisoren $(\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{W}_p)$ nicht alle einen gemeinsamen Theiler $\mathfrak{M}$ besitzen. Ist nämlich μ der Grad jenes Divisors $\mathfrak{M}$ und (M) seine Classe, so ist

$$\mathfrak{W}_i = \mathfrak{M} \cdot \overline{\mathfrak{W}}_i$$

und die p ganzen Divisoren $(\overline{\mathfrak{W}}_1, \overline{\mathfrak{W}}_2, \cdots, \overline{\mathfrak{W}}_p)$ gehören zu der *eigentlichen* Classe $\overline{W}$, welche durch die Gleichung

$$M\overline{W} = W$$

vollständig bestimmt ist. Für diese beiden Ergänzungsclassen M und $\overline{W}$ besteht aber nach Formel (I), § 18 die Beziehung:

$$(1) \qquad \{M\} - \frac{\mu}{2} = \{\overline{W}\} - \frac{\overline{w}}{2},$$

wenn $\overline{w}$ die Ordnung der Classe $\overline{W}$ bedeutet; nun bestehen aber nach den Sätzen des § 14 die Gleichungen:

$$\{\overline{W}\} = \{W\} = p, \qquad \{M\} = 1, \qquad \overline{w} = 2p - 2 - \mu.$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (1) ein, so ergiebt sich zur Bestimmung der noch unbekannten Ordnungszahl μ von $\mathfrak{M}$ bzw. von (M):

$$1 - \frac{\mu}{2} = p - (p-1) + \frac{\mu}{2},$$

d. h. es muss nothwendig $\mu = 0$, also der Theiler aller ganzen Divisoren von (W) gleich Eins sein, w. z. B. w.

Wir benutzen den Riemann-Roch'schen Satz ferner zur Beantwortung der folgenden allgemeineren Frage. Wie viele unabhängige Integrale giebt es, welche sich nur in einer Anzahl gegebener Punkte nicht regulär verhalten, und in jedem von diesen höchstens in vorgegebener Ordnung unendlich werden? Offenbar kann diese Aufgabe jetzt auch so ausgesprochen werden:

Es soll die Anzahl aller linear unabhängigen Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{B}}$ innerhalb der Differentialclasse (W) bestimmt werden, wenn $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{g_1} \cdots \mathfrak{P}_h^{g_h}$ einen beliebigen aber *ganzen* Divisor bedeutet.

Alle diese Divisoren der Classe (W) besitzen dann nämlich die Form:

$$\mathfrak{W}_\omega = \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$$

und ihre Integrale ω haben in $\mathfrak{P}_1, \cdots, \mathfrak{P}_h$ entweder höchstens bzw. die Ordnungszahlen $g_1 - 1, \cdots, g_h - 1$ oder werden höchstens unendlich, wie $l\mathfrak{P}_i$, je nachdem $g_i > 1$ oder $g_i = 1$ ist, während sich ω in allen übrigen Punkten regulär verhält.

In diesem Falle ist also

$$\mathfrak{Q} = \frac{1}{\mathfrak{B}}, \quad (Q) = \left(\frac{1}{B}\right), \quad q = -b,$$

wenn B die Classe von $\mathfrak{B}$ ist, und $b = g_1 + \cdots + g_h$ die Ordnung von $\mathfrak{B}$ bedeutet. Ferner ist

$$\{Q\} = \left\{\frac{1}{B}\right\} = 0,$$

weil es keinen ganzen Divisor von der negativen Ordnung $-b$ geben kann. Setzt man diese Werthe in die Gleichung (II) des vorigen Abschnittes ein, so ergiebt sich für die gesuchte Anzahl, oder für die Dimension $\{Q'\} = \{BW\}$ der Ergänzungsclasse von $\left(\frac{1}{B}\right)$ die Gleichung:

$$\{BW\} = b + p - 1.$$

Die Anzahl aller linear unabhängigen Differentiale mit dem Nenner $\mathfrak{B}$ der Ordnung b ist stets gleich $b + p - 1$.

Es sei nun zunächst $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}$, also $b = 1$, dann lehrt unser Satz, dass die Anzahl aller unabhängigen Differentiale $d\omega$, deren Nenner höchstens $\mathfrak{P}$ ist, gleich p ist, oder dass die Dimension der Ergänzungsclasse $\{\mathfrak{P}W\}$ zu $\left(\frac{1}{\mathfrak{P}}\right)$ gleich p ist. Sind aber $\mathfrak{W}_1, \mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{W}_p$, wie vorher, ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren der Classe (W), so bilden die p Divisoren

$$\mathfrak{P}\mathfrak{W}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{W}_p$$

ein ebensolches System für die Classe $(\mathfrak{P}W)$; denn einmal sind sie unabhängig, zweitens gehören sie zu jener Classe und drittens giebt es nicht mehr unabhängige ganze Divisoren in dieser Classe. Jede Classe $(\mathfrak{P}W)$ ist also eine uneigentliche Classe, und ihr Theiler ist gleich $\mathfrak{P}$. Jedes Differential, dessen Nenner höchstens gleich $\mathfrak{P}$ ist, besitzt also die Form:

$$d\omega \sim \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{W}}{\mathfrak{P}} \sim \mathfrak{W},$$

ist also ein Differential erster Gattung, es besteht daher der Satz:

Es giebt kein einziges Integral, welches nur an einer Stelle und zwar logarithmisch unendlich wird.

Alle folgenden Classen (BW), für welche der ganze Divisor $\mathfrak{B}$ mindestens zwei Primfactoren enthält, sind aber stets eigentliche Classen. Zum Beweise dieses wichtigen Satzes nehmen wir an, dass für einen beliebigen ganzen Divisor $\mathfrak{B}$, dessen Ordnung $b \geqq 2$ ist, die $b + p - 1$ Divisoren

(2) $$\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1}$$

ein vollständiges System unabhängiger ganzer Divisoren der Classe (BW) bilden, und dass diese keinen gemeinsamen Theiler besitzen. Ist dann $\mathfrak{P}$ ein ganz beliebiger Primtheiler, so gehören die $b + p - 1$ linear unabhängigen ganzen Divisoren

(2ᵃ) $$\mathfrak{P}\mathfrak{G}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_{b+p-1}$$

sicher zu der Classe $(\mathfrak{P}BW)$; da aber die Ordnung von $\mathfrak{P}B$ gleich $b + 1$ ist, so ist die Dimension $\{\mathfrak{P}BW\}$ dieser Classe gleich $b + p$; es muss also in dieser Classe noch einen ganzen Divisor $\mathfrak{G}_0$ geben, welcher von den Divisoren (2ᵃ) linear unabhängig ist. Derselbe ist durch $\mathfrak{P}$ nicht theilbar; denn wäre $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}}_0$, so gehörte $\overline{\mathfrak{G}}_0$ zur Classe (BW), wäre also durch die $(b+p-1)$ Divisoren (2) linear darstellbar, es müsste also $\mathfrak{P}\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch die Divisoren (2^a) mit den gleichen Coefficienten darstellbar sein.

Ist also $(\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1})$ ein vollständiges System linear unabhängiger ganzer Divisoren für den Nenner $\mathfrak{B}$, so giebt es ein System:

$$(2^b) \qquad \mathfrak{G}_0, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_1, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{G}_{b+p-1}$$

für den Nenner $\mathfrak{P}\mathfrak{B}$, für welches $\mathfrak{G}_0$ den Primtheiler $\mathfrak{P}$ sicher nicht enthält. Daraus folgt, dass die Classe $(\mathfrak{P}BW)$ eine eigentliche ist, denn die $b+p$ ganzen Divisoren (2^b) enthalten weder den gemeinsamen Theiler $\mathfrak{P}$, noch auch irgend einen von $\mathfrak{P}$ verschiedenen Theiler $\mathfrak{P}'$, denn $\mathfrak{P}'$ müsste ja dann schon in $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \cdots, \mathfrak{G}_{b+p-1}$ enthalten sein, was mit der Voraussetzung, dass (BW) eine eigentliche Classe ist, im Widerspruch stehen würde.

Nun ist aber unser Satz für den ersten Fall, nämlich für $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'$ richtig, mögen nun $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}'$ gleich oder verschieden sein. In der That ist dann die Dimension der Classe (BW) gleich $p+1$; ausser den p unabhängigen ganzen Divisoren dieser Classe:

$$(3) \qquad \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_1, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_2, \cdots, \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\mathfrak{W}_p$$

muss also noch ein weiterer $\mathfrak{G}_0$ vorhanden sein, welcher weder durch $\mathfrak{P}$ noch durch $\mathfrak{P}'$ theilbar ist. Enthielte nämlich $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}'\mathfrak{G}_0'$ etwa den Theiler $\mathfrak{P}'$, so gehörte $\mathfrak{G}_0'$ der uneigentlichen Classe $(\mathfrak{P}W)$ an, wäre also auch durch $\mathfrak{P}$ theilbar, und dann wäre $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{P}\mathfrak{P}'\overline{\mathfrak{G}}_0$ durch die p ganzen Divisoren (3) linear darstellbar, also nicht von ihnen unabhängig. Hiermit ist also unsere Behauptung vollständig erwiesen.

Wenden wir diesen allgemeinen Satz auf diejenigen Differentiale an, deren Nenner $\mathfrak{B} = \mathfrak{P}^m$ oder gleich $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2$ also entweder eine Potenz eines einzigen Primfactors oder das Product zweier verschiedener Primtheiler ist, so ergeben sich die beiden Folgerungen:

I) Ist m eine beliebige ganze Zahl >1 und $\mathfrak{P}$ ein beliebiger Primtheiler, so giebt es stets ein Differential

$$dt_{m-1} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}^m},$$

dessen Nenner in der reducirten Form gleich $\mathfrak{P}^m$ ist. Das zugehörige Integral t_{m-1} heisst ein *Elementarintegral zweiter Gattung*, es besitzt nur in $\mathfrak{P}$ einen Pol und zwar von der $(m-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

II) Sind $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ zwei beliebige von einander verschiedene Primtheiler, so giebt es stets ein Differential

$$dp_{12} \sim \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2},$$

dessen Nenner in der reducirten Form gleich $\mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2$ ist. Das zugehörige Integral p_{12} heisst ein *Elementarintegral dritter Gattung*, es wird nur in $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ und zwar logarithmisch unendlich.

Hieraus folgt endlich, dass man jedes Differential

$$d\omega \sim \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}},$$

dessen Nenner

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{P}_1^{g_1} \mathfrak{P}_2^{g_2} \cdots \mathfrak{P}_h^{g_h}$$

ein beliebiger ganzer Divisor ist, stets als eine Summe von Elementardifferentialen der ersten, zweiten und dritten Gattung darstellen kann; denn man erkennt leicht, dass man von $d\omega$ stets ein solches Elementardifferential $d\omega$ multiplicirt mit einer geeigneten Constanten abziehen kann, dass in der Differenz

$$d\omega - c_0 \, d\omega_0 = d(\omega - c_0 \omega_0) \sim \frac{\mathfrak{A}'}{\mathfrak{B}'}$$

der Nenner $\mathfrak{B}'$ mindestens einen Primtheiler in einer mindestens um Eins niedrigeren Potenz enthält, und durch Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man schliesslich zu einem Differentiale erster Gattung.

Zum Schluss möchte ich noch bemerken, dass die in dieser Abhandlung gegebenen Beweise, sowie alle von mir benutzten Methoden meines Wissens neu sind; mit ihrer Hilfe kann man alle in dieser Theorie sich darbietenden Aufgaben auf *ein* Grundproblem zurückführen, und dieses bei beliebig gegebener Grundcurve ohne jede vorgängige Vereinfachung derselben *mit rein arithmetischen Hülfsmitteln* lösen.

Von den Hauptresultaten dieser Arbeit sind die Sätze über die algebraischen Systeme oder Moduln, über ihre Transformation in reguläre Systeme, und der Satz über die charakteristischen Eigenschaften des Fundamentalsystemes für ein Ideal noch nicht gegeben worden; dasselbe gilt von der allgemeinen Theorie der (ganzen *und* gebrochenen) Divisoren, ihrer Eintheilung in Classen, und von der Aufstellung des Grundproblemes dieser Theorie und seiner Anwendung auf die der Abel'schen Integrale. Dagegen möchte ich ausdrücklich erwähnen, dass sich eine Theorie der *ganzen* Divisoren nebst ihren Anwendungen auf ganz anderer Grundlage und in ganz anderer Behandlung in der classischen Abhandlung der Herren *Dedekind* und *Weber* im 92. Bande des Crelle'schen Journales findet, deren sonstige Vorzüge hier nicht noch einmal hervorgehoben zu werden brauchen.
