Ueber die linearen Relationen zwischen den zu verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsystemen von Integralen der Riemann'schen Differentialgleichung.

Von

Oskar Bolza in Chicago.

Die folgende Notiz beschäftigt sich mit zwei Punkten aus der Theorie der hypergeometrischen Functionen:

1) Die Relationen zwischen den zu den drei singulären Punkten der Gauss'schen Differentialgleichung gehörigen Fundamentalsystemen, wie sie schon von Kummer*) und Gauss**) gegeben worden sind, und die sich vielleicht am vollständigsten bei Herrn Goursat***) zusammengestellt finden, leiden an einer doppelten Unsymmetrie, einmal an der der Gauss'schen Differentialgleichung selbst anhaftenden, und überdies treten in ihnen gewisse Exponentialfactoren in unsymmetrischer Weise auf.

Um *die Relationen in einer in Beziehung auf die drei singulären Punkte symmetrischen Form* zu erhalten, muss man von der Gauss-schen Differentialgleichung zu der allgemeineren Differentialgleichung der Riemann'schen P-Function übergehen. Wie dies im einzelnen durchzuführen ist, und zwar so, dass man aus einer einzigen Relation alle übrigen durch blosse Buchstabenvertauschung herleiten kann, wird in §§ 1 und 2 gezeigt.

2) Die grössere oder geringere Einfachheit der fraglichen Relationen hängt von einer geeigneten *Normirung der Fundamentalintegrale* ab; eine erste Vereinfachung der Gauss'chen Formeln hat Herr Jordan†) angegeben, indem er bei der Normirung der Fundamentalintegrale statt von der hypergeometrischen Reihe von dem Euler'schen bestimmten Integral ausgeht. (Vgl. § 3).

---

*) Crelle's Journal, Bd. 15, pag. 56—60.

**) Gauss' Werke, Bd. III, pag. 210—220.

***) Annales de l'Ecole Normale Superieure, 1881, Supplement pag. 28—30. auch bei Craig, Linear differential equations, pag. 237—239.

†) Cours d'Analyse, III. pag. 230.

Dass aber noch eine weitere Vereinfachung möglich sein muss, ergiebt sich aus der einfachen und eleganten Form, welche Herr Papperitz*) den erzeugenden Substitutionen der Schwarz'schen s-Function, welche aufs engste mit den hier besprochenen Relationen zusammenhängen, gegeben hat. In § 4 und § 5 wird diejenige Normirung der Fundamentalsysteme abgeleitet, welche für die Gruppe der s-Function gerade auf die Papperitz'schen Formeln führt.

§ 1.
Bezeichnungen.

Der Gegenstand unserer Betrachtung ist die *reguläre homogene lineare Differentialgleichung mit drei singulären Punkten.* Die singulären Punkte und die zugehörigen Exponenten, durch welche bekanntlich die Differentialgleichung vollkommen bestimmt**) ist, mögen durch das Schema gegeben sein:

$$(1)\qquad \begin{array}{ccc} a, & b, & c \\ \lambda', & \mu', & \nu' \\ \lambda'', & \mu'', & \nu'' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{(singuläre Punkte),} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{(Exponenten)***)} \end{array}$$

dabei sind die Exponenten der Bedingung unterworfen:

$$(2)\qquad \lambda' + \lambda'' + \mu' + \mu'' + \nu' + \nu'' = 1,$$

und überdies soll im Folgenden angenommen werden, dass keine der drei Differenzen:

$$(3)\qquad \lambda = \lambda' - \lambda'', \quad \mu = \mu' - \mu'', \quad \nu = \nu' - \nu''$$

eine ganze Zahl ist.

Die Differentialgleichung bleibt ungeändert, wenn man in dem Schema (1) *die Colonnen beliebig untereinander vertauscht; ebenso, wenn man λ' mit λ'' oder μ' mit μ'', oder ν' mit ν'' vertauscht.*†) Diese beiden Arten von Vertauschungen combiniren sich zu einer Gruppe, G, von 48 Substitutionen zwischen den Buchstaben: a, b, c; λ', μ', ν'; λ'', μ'', ν''. Dieselbe kann erzeugt werden durch die Substitutionen:

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathsf{\Lambda} = (\lambda' \lambda''), \quad \mathsf{M} = (\mu', \mu''), \quad \mathsf{N} = (\nu', \nu''), \\ S = (abc)\,(\lambda' \mu' \nu')\,(\lambda'' \mu'' \nu''), \\ T = \quad (bc) \quad (\mu' \nu') \quad (\mu'' \nu''). \end{array}\right.$$

---

*) Mathematische Annalen Bd. 27, pag. 333.

**) Man findet die ausgeschriebene Differentialgleichung bei Hrn. Papperitz, Mathematische Annalen Bd. 25, pag. 213. Vgl. auch Craiq, Linear Differential Equations pag. 191.

***) Ich folge in der Bezeichnung: λ', λ'' etc., statt Riemann's α, α' etc. Herrn F. Klein's Vorgang.

†) Bei Riemann, Werke pag. 64 als eine Eigenschaft der P-Function ausgesprochen.

Wir benutzen diese Eigenschaft der Differentialgleichung bei der Normirung der Fundamentalintegrale.

Das zum Exponenten λ' gehörige Fundamentalintegral lässt sich auf vier verschiedene Weisen durch hypergeometrische Reihen ausdrücken*). Wir wählen eine dieser Darstellungen willkürlich aus und bezeichnen**):

$$P_0^{\lambda'}\begin{Bmatrix} a & b & c & \\ \lambda' & \mu' & \nu' & x \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'' & \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$$= u^{\lambda'}(1-u)^{\nu'} F(\mu'+\lambda'+\nu',\ \mu''+\lambda'+\nu',\ 1+\lambda'-\lambda'',\ u),$$

wo

$$u = \frac{(c-b)(x-a)}{(c-a)(x-b)}.$$

Auf dies Integral $P_0^{\lambda'}$ wenden wir jestzt die sämmtlichen Substitutionen der Gruppe G an. Wir erhalten dabei jedesmal wieder ein particuläres Integral unserer Differentialgleichung.

Man zeigt nun zunächst durch einfache Schlüsse***), dass $P_0^{\lambda'}$ ungeändert bleibt bei der Untergruppe:

$$1,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N},\ \mathsf{MN}.$$

Bei Anwendung der Gesammtgruppe G wird daher G in 12 verschiedene Functionen übergehen; wir bezeichnen dieselben folgendermassen:

Die Function, in welche $P_0^{\lambda'}$ durch die Substitution Λ übergeführt wird, werde mit $P_0^{\lambda''}$ bezeichnet und dies durch die Gleichung ausgedrückt:

$$(\Lambda)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\lambda''}.$$

In analoger abkürzender Bezeichnung werde weiter definirt:

$$\left\{\begin{array}{ll} (S)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\mu'}; & (S)\ P_0^{\lambda''} = P_0^{\mu''}, \\ (S^2)\ P_0^{\lambda'} = P_0^{\nu'}; & (S^2)\ P_0^{\lambda''} = P_0^{\nu''} \\ \text{ferner:} & \\ (T)\ P_0^{\lambda'} = Q_0^{\lambda'}; & (T)\ P_0^{\lambda''} = Q_0^{\lambda''} \\ \text{und weiter:} & \\ (S)\ Q_0^{\lambda'} = Q_0^{\mu'}; & (S)\ Q_0^{\lambda''} = Q_0^{\mu''}, \\ (S^2)\ Q_0^{\lambda'} = Q_0^{\nu'}; & (S^2)\ Q_0^{\lambda''} = Q_0^{\nu''}. \end{array}\right. \tag{6}$$

Dabei ist zu beachten, dass die Substitutionen Λ, M, N die Function u ungeändert lassen, während

---

*) Riemann, Werke, pag. 77.

**) Das Riemann'sche Zeichen $P^{\lambda'}$ ohne unteren Index soll für eine anders normirte Function reservirt werden, siehe § 4.

***) Vgl. z. B. Jordan, Cours d'Analyse III, Art. 183.

$$(7)\qquad \begin{aligned} &(S)\quad u = \frac{1}{1-u},\\ &(T)\quad u = \frac{u}{u-1}. \end{aligned}$$

Um die Definition der 12 Functionen völlig bestimmt zu machen, beschränken wir die Variable u vorläufig auf die obere Halbebene und setzen fest, dass die Potenzen

$$u^r,\quad (1-u)^r,\quad \left(1-\frac{1}{u}\right)^r,$$

resp. in den Punkten:

$$1,\qquad 0\quad ,\qquad \infty$$

den Werth 1 annehmen sollen.

Bei dieser Festsetzung ist in der ganzen oberen Halbebene:

$$(8)\qquad \left(1-\frac{1}{u}\right)^r = e^{r\pi i}\,\frac{(1-u)^r}{u^r}.$$

Durch Wiederholung der Schlussweise, durch welche man gezeigt hat, dass $P_0^{\lambda'}$ bei der Substitution N ungeändert bleibt, ergeben sich nun zwischen den P und Q die Relationen:

$$(9)\qquad \begin{cases} Q_0^{\lambda'} = e^{-\lambda'\pi i}P_0^{\lambda'}, & Q_0^{\lambda''} = e^{-\lambda''\pi i}P_0^{\lambda''},\\ Q_0^{\mu'} = e^{-\mu'\pi i}P_0^{\mu'}, & Q_0^{\mu''} = e^{-\mu''\pi i}P_0^{\mu''},\\ Q_0^{\nu'} = e^{-\nu'\pi i}P_0^{\nu'}, & Q_0^{\nu''} = e^{-\nu''\pi i}P_0^{\nu''}. \end{cases}$$

Für die Erhaltung der Symmetrie in den folgenden Ableitungen ist es nun wesentlich, dass man von diesen Gleichungen (9) *gerade* **nicht** *Gebrauch macht, sondern jedes der sechs Fundamentalintegrale in zwei verschiedenen Normirungen als P und als Q, durch die Formeln laufen lässt,* und erst, wo es nöthig wird, auf die Gleichungen (9) zurückgreift.

§ 2.

Die linearen Relationen zwischen den Fundamentalsystemen.

Um zunächst das particuläre Integral $P_0^{\lambda'}$ durch die beiden linear unabhängigen Integrale

$$Q_0^{\nu'} = (1-u)^{\nu'}u^{\lambda'}F(\mu'+\nu'+\lambda',\ \mu''+\nu'+\lambda',\ 1+\nu'-\nu'',\ 1-u),$$
$$Q_0^{\nu''} = (1-u)^{\nu''}u^{\lambda'}F(\mu'+\nu''+\lambda',\ \mu''+\nu''+\lambda',\ 1+\nu''-\nu',\ 1-u)$$

auszudrücken, kann man Schritt für Schritt den von Gauss (Werke, III, pag. 210—213) angegebenen Weg einschlagen; nur dass der hübsche Kunstgriff, durch welchen Gauss zeigt, dass man von den beiden Coefficienten der Relation nur *einen* wirklich zu bestimmen braucht, hier noch eine einfachere Form annimmt:

Die gesuchte Relation sei

$$(10)\qquad P_0^{\lambda'} = A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix} Q_0^{\nu'} + B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix} Q_0^{\nu''},$$

wobei durch die Bezeichnung der Coefficienten ihre Abhängigkeit von den Exponenten angedeutet werden soll.

Auf diese Relation wenden wir jetzt die Substitution $(\nu'\nu'')$ an; wie wir oben gesehen haben, bleibt dabei $P_0^{\lambda'}$ ungeändert; dagegen werden $Q_0^{\nu'}$ und $Q_0^{\nu''}$ vertauscht, es kommt also:

$$P_0^{\lambda'} = A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} Q_0^{\nu''} + B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} Q_0^{\nu'}.$$

Aus der Vergleichung folgt wegen der linearen Unabhängigkeit von $Q_0^{\nu'}$, $Q_0^{\nu''}$:

$$(11)\qquad \begin{aligned} A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} &= B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix}, \\ B\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu'' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu'\end{pmatrix} &= A\begin{pmatrix}\lambda' & \mu' & \nu' \\ \lambda'' & \mu'' & \nu''\end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wodurch die Berechnung von B auf die von A zurückgeführt ist.

Indem man nun genau nach Gauss weiterschliesst, erhält man das Resultat:

$$(12)\qquad \begin{aligned} P_0^{\lambda'} = &\frac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\nu''-\nu'-1)}{\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu')\,\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu')}\, Q_0^{\nu'} \\ &+ \frac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\nu'-\nu''-1)}{\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu'')\,\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu'')}\, Q_0^{\nu''}. \end{aligned}$$

Auf diese Relation wenden wir jetzt wieder die 48 Substitutionen der Gruppe G an.

Ebenso wie $P_0^{\lambda'}$, bleibt die ganze Relation ungeändert bei der Untergruppe:

$$1,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N},\ \mathsf{MN}.$$

Bei Anwendung der Gesammtgruppe werden wir daher 12 verschiedene Relationen erhalten.

Die Substitution $(\lambda'\lambda'')$ ergiebt:

$$(12')\qquad \begin{aligned} P_0^{\lambda''} = &\frac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\nu''-\nu'-1)}{\Pi(-\lambda'-\mu'-\nu')\,\Pi(-\lambda'-\mu''-\nu')}\, Q_0^{\nu'} \\ &+ \frac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\nu'-\nu''-1)}{\Pi(-\lambda'-\mu'-\nu'')\,\Pi(-\lambda'-\mu''-\nu'')}\, Q_0^{\nu''} \end{aligned}$$

Auf diese beiden Relationen wenden wir jetzt die Substitution T an und beachten, dass

$$(T)\,Q_0^{\nu'} = (T)\,(S^2)\,Q_0^{\lambda'} = (S)\,(T)\,Q_0^{\lambda'} = (S)\,P_0^{\lambda'} = P_0^{\mu'};$$

so erhalten wir:

$$(13)\quad \begin{cases} Q_0^{\lambda'} = \dfrac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\mu''-\mu'-1)}{\Pi(-\lambda''-\nu'-\mu')\,\Pi(-\lambda''-\nu''-\mu')} P_0^{\mu'} \\ \qquad + \dfrac{\Pi(\lambda'-\lambda'')\,\Pi(\mu'-\mu''-1)}{\Pi(-\lambda''-\nu'-\mu'')\,\Pi(-\lambda''-\nu''-\mu'')} P_0^{\mu''}, \\ Q_0^{\lambda''} = \dfrac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\mu''-\mu'-1)}{\Pi(-\lambda'-\nu'-\mu')\,\Pi(-\lambda'-\nu''-\mu')} P_0^{\mu'} \\ \qquad + \dfrac{\Pi(\lambda''-\lambda')\,\Pi(\mu'-\mu''-1)}{\Pi(-\lambda'-\nu'-\mu'')\,\Pi(-\lambda'-\nu''-\mu'')} P_0^{\mu''} \end{cases}$$

Aus diesen vier Relationen folgen die übrigen acht durch Anwendung der Substitutionen S und S^2, d. h. einfach durch cyklische Vertauschung der Buchstaben λ, μ, ν.

§ 3.

Die Jordan'sche Normirung.

Die Relationen vereinfachen sich, wenn man nach Herrn Jordan (Cours d'Analyse, III, pag. 230) statt von der Function $P_0^{\lambda'}$ ausgeht von

$$(14)\qquad P_1^{\lambda'} = \frac{\Pi(-\lambda''-\mu''-\nu'')\,\Pi(-\lambda''-\mu'-\nu')}{\Pi(\lambda'-\lambda'')} P_0^{\lambda'}$$

Falls:

$$\Re(-\lambda''-\mu''-\nu'') > -1, \qquad \Re(-\lambda''-\mu'-\nu') > -1,$$

so ist dies identisch mit*):

$$(15)\quad P_1^{\lambda'} = u^{\lambda'}(1-u)^{\nu'}\int\limits_0^1 z^{-\lambda''-\mu''-\nu''}(1-z)^{-\lambda''-\mu'-\nu'}(1-uz)^{-\lambda'-\mu''-\nu'}\,dz.$$

Wenn man auf die Function $P_1^{\lambda'}$ wieder die 48 Substitutionen der Gruppe G anwendet, so sieht man zunächst, dass $P_1^{\lambda'}$ nur mehr bei der Untergruppe $[1, \mathsf{MN}]$ ungeändert bleibt; man erhält also 24 verschiedene particuläre Integrale bei Anwendung der Gesammtgruppe. Wir beschränken uns jedoch auf die Betrachtung der Untergruppe von der Ordnung 24, welche durch die Substitutionen MN, $\mathsf{\Lambda N}$, T, S erzeugt wird, und erhalten dementsprechend wieder 12 particuläre Integrale.

Wir definiren

$$(\mathsf{\Lambda N})\quad P_1^{\lambda'} = P_1^{\lambda''} = \frac{\Pi(-\mu''-\lambda'-\nu')\,\Pi(-\mu'-\lambda'-\nu'')}{\Pi(\lambda''-\lambda')} P_0^{\lambda''},$$

während die übrigen zehn particulären Integrale $P_1^{\mu'}$, $P_1^{\mu''}$ etc. $Q_1^{\lambda'}$, $Q_1^{\lambda''}$ etc. genau so wie in (6) definirt werden.

*) Riemann, Werke, pag. 76. Sind die Ungleichungen nicht erfüllt, so hat man auf einem „Doppelumlauf" um die beiden Punkte 0 und 1 herum zu integriren, siehe Jordan, Cours d'Analyse III, No. 193; Pochhammer, Mathem. Annalen Bd. 35, pag. 470.

Da dabei

$$Q_1^{\lambda'} : Q_0^{\lambda'} = P_1^{\lambda'} : P_0^{\lambda'}, \text{ etc.}$$

so bleiben die Gleichungen (9) bestehen, wenn man darin den unteren Index 0 durch 1 ersetzt, also:

$$(16) \qquad Q_1^{\lambda'} = e^{-\lambda'\pi i} P_1^{\lambda'}, \quad Q_1^{\lambda''} = e^{-\lambda''\pi i} P_1^{\lambda''}, \text{ etc.}$$

Die Relationen (12), (12′) nehmen nun nach Einführung von $P_1^{\lambda'}$, $Q_1^{\lambda'}$ etc. folgende vereinfachte Gestalt an:

$$(17) \qquad \begin{cases} P_1^{\lambda'} = \dfrac{\sin(\lambda''+\mu''+\nu')\pi}{\sin(\nu''-\nu')\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\sin(\lambda''+\mu'+\nu'')\pi}{\sin(\nu'-\nu'')\pi} Q_1^{\nu''}, \\ P_1^{\lambda''} = \dfrac{\sin(\lambda'+\mu'+\nu')\pi}{\sin(\nu''-\nu')\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\sin(\lambda'+\mu''+\nu'')\pi}{\sin(\nu'-\nu'')\pi} Q_1^{\nu''}, \end{cases}$$

daraus die übrigen Relationen durch Anwendung der Substitutionen S, S^2, T, ST, S^2T, wie oben.

In dieser Form der Relationen treten die von Riemann (Werke, pag. 68) abgeleiteten, von der Normirung der P, Q unabhängigen Bedingungen zwischen den Coefficienten der Relationen unmittelbar in Evidenz, sobald man mit Hilfe von (16) die Q_1 durch die P_1 ausdrückt.

Die Coefficienten der Relationen (17) (auch schon der Relationen (12)) hängen nur von den Differenzen

$$\lambda = \lambda' - \lambda'', \quad \mu = \mu' - \mu'', \quad \nu = \nu' - \nu''$$

ab. Aus (2) folgt nämlich z. B.

$$\lambda'' + \mu'' + \nu' = 1 - \lambda' - \mu' - \nu'' = \tfrac{1}{2}(1 - \lambda - \mu + \nu),$$

u. s. w. Beachtet man dies und setzt überdies

$$(18) \qquad \frac{\lambda + \mu + \nu}{2} = \sigma$$

so nehmen die Relationen (17) folgende Form an:

$$(19) \qquad \begin{cases} P_1^{\lambda'} = \dfrac{\cos(\sigma-\nu)\pi}{\sin(-\nu)\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\cos(\sigma-\mu)\pi}{\sin\nu\pi} Q_1^{\nu''}, \\ P_1^{\lambda''} = \dfrac{\cos\sigma\pi}{\sin(-\nu)\pi} Q_1^{\nu'} + \dfrac{\cos(\sigma-\lambda)\pi}{\sin\nu\pi} Q_1^{\nu''}. \end{cases}$$

§ 4.

Weitere Vereinfachung.

Wir führen jetzt nach Herrn Papperitz Vorgang drei Hilfsgrössen L, M, N ein durch die Gleichungen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \cos\lambda\pi = -\cos\mu\pi\cos\nu\pi + \sin\mu\pi\sin\nu\pi\cos L, \\ \cos\mu\pi = -\cos\nu\pi\cos\lambda\pi + \sin\nu\pi\sin\lambda\pi\cos M, \\ \cos\nu\pi = -\cos\lambda\pi\cos\mu\pi + \sin\lambda\pi\sin\mu\pi\cos N, \\ \dfrac{\sin L}{\sin\lambda\pi} = \dfrac{\sin M}{\sin\mu\pi} = \dfrac{\sin N}{\sin\nu\pi}, \end{cases}$$

so dass also, wenn λ, μ, ν reell und überdies

$$\lambda + \mu + \nu > 1,$$

L, M, N die drei Seiten des sphärischen Dreiecks mit den Winkeln $\lambda\pi$, $\mu\pi$, $\nu\pi$ sind.

Durch die Gleichungen (20) sind L, M, N nicht vollkommen bestimmt; ist L_0, M_0, N_0 *ein* Lösungssystem, so ist die allgemeinste Lösung:

$$L = \varepsilon L_0 + 2g\pi, \quad M = \varepsilon M_0 + 2h\pi, \quad N = \varepsilon N_0 + 2k\pi,$$

wo $\varepsilon = +1$ oder -1, und g, h, k ganze Zahlen sind. Durch geeignete Wahl von g, h, k kann man stets bewirken, dass die *Gauss'schen Gleichungen* mit demjenigen Vorzeichen gelten, mit welchem sie beim gemeinen sphärischen Dreieck zu nehmen sind*). Alsdann ergeben sich aus den Gauss'schen Gleichungen die folgenden:

$$(21)\quad \begin{cases} \sin\frac{N}{2}\cos(\sigma-\mu)\pi = \sin\nu\pi\cos\frac{L}{2}\sin\frac{M}{2}, \\ \sin\frac{N}{2}\cos(\sigma-\lambda)\pi = \sin\nu\pi\sin\frac{L}{2}\cos\frac{M}{2}, \\ \cos\frac{N}{2}\cos\sigma\pi = -\sin\nu\pi\sin\frac{L}{2}\sin\frac{M}{2}, \\ \cos\frac{N}{2}\cos(\sigma-\nu)\pi = \sin\nu\pi\cos\frac{L}{2}\cos\frac{M}{2}. \end{cases}$$

Setzt man jetzt

$$(21)\quad \begin{cases} P^{\lambda'} = -\dfrac{1}{\cos\frac{L}{2}} P_1^{\lambda''}, \quad Q^{\lambda'} = \dfrac{1}{\cos\frac{L}{2}} Q_1^{\lambda'}, \\ P^{\lambda''} = \dfrac{1}{\sin\frac{L}{2}} P_1^{\lambda''}, \quad Q^{\lambda''} = \dfrac{1}{\sin\frac{L}{2}} Q_1^{\lambda''} \end{cases}$$

denen acht weitere, durch gleichzeitige cyklische Vertauschung von λ, μ, ν und L, M, N abzuleitende Gleichungen hinzuzufügen sind, *so gehen die Relationen* (19) *unter Benutzung von* (21) *über in:*

$$(22)\quad \begin{cases} P^{\lambda'} = \cos\frac{M}{2} Q^{\nu'} - \sin\frac{M}{2} Q^{\nu''}, \\ P^{\lambda''} = \sin\frac{M}{2} Q^{\nu'} + \cos\frac{M}{2} Q^{\nu''}, \end{cases}$$

daraus durch Auflösen:

$$(23)\quad \begin{cases} Q^{\nu'} = \cos\frac{M}{2} P^{\lambda'} + \sin\frac{M}{2} P^{\lambda''}, \\ Q^{\nu''} = -\sin\frac{M}{2} P^{\lambda'} + \cos\frac{M}{2} P^{\lambda''}; \end{cases}$$

---

*) Vgl. Baltzer, Elemente der Mathematik, II, pag. 319.

Aus diesen vier Relationen ergeben sich die übrigen acht durch gleichzeitige cyklische Vertauschung der Buchstaben λ, μ, ν und L, M, N.

Man beachte noch, dass jetzt

$$(24)\qquad \begin{cases} Q^{\lambda'} = -\, e^{-\lambda'\pi i}\, P^{\lambda'}, \\ Q^{\lambda''} = +\, e^{-\lambda''\pi i} P^{\lambda''}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

§ 5.

Die erzeugenden linearen Substitutionen.

Aus den Relationen (22), (23) kann man unmittelbar die linearen Substitutionen ableiten, welche irgend eines der Fundamentalsysteme bei einem Umlauf der Variabeln x um einen der singulären Punkte a, b, c erleidet*). Ich will das Resultat für das Fundamentalsystem $Q^{\lambda'}$, $Q^{\lambda''}$ angeben. Bei einem *positiven Umlauf um den Punkt* a erfährt dasselbe die Substitution:

$$A = e^{(\lambda'+\lambda'')\pi i} \begin{vmatrix} e^{\lambda\pi i} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda\pi i} \end{vmatrix},$$

bei einem *positiven Umlauf um den Punkt* b die Substitution:

$$B = e^{(\mu'+\mu'')\pi i} \begin{vmatrix} \cos\mu\pi + i\cos N \sin\mu\pi, & -i\sin N \sin\mu\pi \\ -i\sin N\sin\mu\pi, & \cos\mu\pi - i\cos N\sin\mu\pi \end{vmatrix},$$

bei einem *positiven Umlauf um den Punkt* c die Substitution:

$$C = e^{(\nu'+\nu'')\pi i} \begin{vmatrix} \cos\nu\pi + i\cos M\sin\nu\pi, & -i\sin M\sin\nu\pi\, e^{-\lambda\pi i} \\ -i\sin M\sin\nu\pi\, e^{\lambda\pi i}, & \cos\nu\pi - i\cos M\sin\nu\pi \end{vmatrix},$$

wobei $e^{(\lambda'+\lambda'')\pi i}$, $e^{(\mu'+\mu'')\pi i}$, $e^{(\nu'+\nu'')\pi i}$ als „Scalarfactoren" im Sinne der Matrixtheorie zu verstehen sind.

Man verificirt leicht, dass die Substitutionen A, B, C die *Riemann'sche Bedingung* **):

$$BA = C^{-1}$$

erfüllen, wenn man von den Gleichungen (2) und (20) Gebrauch macht.

Es bleibt nun zum Schlusse noch nachzuweisen, dass unsere Normirung der Functionen $P^{\lambda'}$, $P^{\lambda''}$ etc. in der That gerade auf die im Eingang erwähnten *Papperitz'schen Formeln* führt.

Man setze

$$s = \frac{Q^{\lambda''}}{Q^{\lambda'}},$$

so ergeben sich aus A, B, C unmittelbar die linearen, nicht-homogenen

*) Riemann's Werke pag. 67.

**) Riemann's Werke pag. 66.

Substitutionen, welche s bei den Umläufen der Variabeln x um die drei singulären Punkte erfährt. Diese Substitutionen bringe man nun mit Herrn Papperitz in die folgende Form, in welche jede lineare, nicht-homogene Substitution gebracht werden kann*):

$$s' = \frac{\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)s - \sin\frac{\varphi}{2}(\eta - i\xi)}{\sin\frac{\varphi}{2}(\eta + i\xi)s + \left(\cos\frac{\varphi}{2} - i\zeta\sin\frac{\varphi}{2}\right)},$$

mit der Bedingung:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

und schreibe diese Substitution in der abgekürzten Form:

$$s' = (\xi,\ \eta,\ \zeta,\ \varphi\ ;\ s).$$

Alsdann lauten die drei fraglichen Substitutionen:

(A_1) $\quad s' = (0,\ 0,\ 1,\ -2\lambda\pi;\ s),$

(B_1) $\quad s' = (\sin N,\ 0,\ \cos N,\ -2\mu\pi;\ s),$

(C_1) $\quad s' = (\sin M\cos\lambda,\ \sin M\sin\lambda,\ \cos M,\ -2\nu\pi;\ s),$

welches genau die Formeln sind, welche Herr Papperitz l. c. p. 333 für die Function

$$s = \mathfrak{s}_0(x)$$

giebt, wo auch die geometrische Deutung derselben ausführlich discutirt wird.

Freiburg i. B., im October 1892.

Nachtrag.

Aus den sechs zu den drei singulären Punkten gehörigen Fundamentalintegralen lassen sich 20 Tripel bilden. Dieselben zerfallen in zwei Kategorien:

1) in 12 von den Tripeln kommen jedesmal *zwei* zu *demselben* singulären Punkt gehörige Integrale vor,

2) in den 8 übrigen Tripeln gehört *jedes* der drei Integrale *zu einem andern* singulären Punkt.

Die drei Integrale eines Tripels sind jedesmal durch eine lineare Relation verbunden, und man erhält daher, der Eintheilung der Tripel entsprechend, 12 Relationen erster Art und 8 Relationen zweiter Art. Von den 20 Relationen sind 4 linear unabhängig, die übrigen eine Folge dieser vier.

Geht man bei der Definition der P-Function von der *linearen*

*) Siehe Papperitz, Mathem. Annalen Bd. 27, pag. 331, und Klein, Vorlesungen über das Ikosaeder, pag. 34.

Differentialgleichung aus, so sind in erster Linie die 12 Relationen *erster Art* von Wichtigkeit und auf sie haben wir uns in der obigen Darstellung ausschliesslich beschränkt. Die übrigen 8 würden sich daraus durch Elimination ergeben.

Geht man dagegen von der Definition durch das *bestimmte Integral* aus, so wird man zunächst naturgemäss auf die 8 Relationen *zweiter Art* geführt. In dieser Beziehung verweise ich auf die Arbeit von Herrn Goursat (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1881, Supplément pag. 23), dann aber vor allen auf die demnächst erscheinende*) Dissertation von Herrn Schellenberg, *Neue Behandlung der hypergeometrischen Function auf Grund ihrer Definition durch das bestimmte Integral*, Göttingen 1892. In derselben wird, im Anschluss an die Vorlesungen von Herrn F. Klein**) vom Sommer 1890, eine detaillirte und systematische Darstellung der Theorie der hypergeometrischen Functionen, ausgehend von dem bestimmten Integral

$$\int (ua)^{\alpha} (ub)^{\beta} (uc)^{\gamma} (ud)^{\delta} (udu),$$

gegeben.

Die Relationen, welche uns hier beschäftigt haben, würden sich durch eine Combination der Gleichungen (22) und (38) von Herrn Schellenberg ergeben. Zu einer Vergleichung mit unsern Formeln wäre jedoch eine ziemlich umständliche Bestimmung gewisser Einheitswurzeln erforderlich, wesshalb ich hier nicht weiter darauf eingehe.

---

*) Dieselbe ist inzwischen erschienen.

**) Vgl. auch Math. Annalen Bd. 38, pag. 151.