MEMORIE E COMUNICAZIONI.

SULLE SUPERFICIE ALGEBRICHE DI GENERE GEOMETRICO ZERO.

Memoria di **Federigo Enriques**, in Bologna.

Adunanza del 5 marzo 1905.

La proprietà caratteristica delle superficie algebriche irregolari, che ho messa recentemente in luce, mi ha permesso di risolvere il problema di determinare tutte le superficie di *genere geometrico* $p_g = 0$ e di *genere aritmetico* $p_a < 0$:

Le superficie per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a < -1$$

sono riferibili a rigate.

Le superficie per cui

$$p_g = 0 \qquad p_a = -1$$

posseggono un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè, le cui traiettorie formano un fascio razionale (di curve ellittiche).

La famiglia più generale delle superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni in sè, può essere caratterizzata da una rappresentazione parametrica per mezzo di funzioni ellittiche di un parametro ed algebriche di un altro, che è stata stabilita dal sig. PAINLEVÉ *); per riguardo a codesta rappresentazione tali superficie si possono designare col nome di *superficie ellittiche*.

Il genere p_g delle suddette superficie ellittiche risulta uguale a zero allora, e allora solamente, quando il fascio delle curve ellittiche K, traiettorie del corrispondente gruppo, è razionale. La famiglia delle super-

*) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles,* professées à Stockholm en 1895 (Paris, Hermann, 1897), pp. 282-286.

ficie ellittiche di genere $p_g = 0$ ($p_a = -1$) comprende in primo luogo le rigate ellittiche, ma anche innumerevoli altre classi di superficie contenenti un fascio ellittico di curve irrazionali C secanti le K in $n > 1$ punti.

La costruzione effettiva di queste ultime superficie costituisce un problema un po' delicato, che si risolve mediante le trasformazioni di determinante n delle funzioni ellittiche, onde al carattere n conviene il nome di *determinante* delle superficie ellittiche predette.

Così possono assegnarsi *tutti i tipi birazionalmente distinti di superficie ellittiche di genere* $p_g = 0$ *e determinante* $n (> 1)$. In sostanza si può ridursi al caso in cui n sia un numero primo; si hanno allora tipi corrispondenti alle $n + 1$ trasformazioni non equivalenti

$$\Omega = n\omega, \qquad \Omega' = \omega'$$
$$\Omega = \omega - r\omega', \qquad \Omega' = n\omega'$$
$$(r = 0, 1, 2 \ldots n - 1).$$

Per es. alla prima trasformazione corrispondono i tipi:

$$Z = z, \qquad Y = \wp'(u \mid \omega\omega')$$
$$X = \sqrt[n]{(z - a_1)^{h_1}(z - a_2)^{h_2} \ldots (z - a_t)^{h_t} \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \varepsilon^{\lambda} \wp(u + \lambda\omega \mid n\omega, \omega') \right\}}.$$
$$t > 2, \qquad \varepsilon^n = 1, \qquad \varepsilon \neq 1$$
$$h_i < n, \qquad h_1 + h_2 + \cdots + h_t \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n).$$

La costruzione dei tipi di superficie ellittiche di determinante n può anche essere ottenuta in modo algebrico, mediante l'estrazione di un radicale n-mo che porta su funzioni razionali dei punti di un cilindro cubico (§§ 6, 7).

Le superficie ellittiche di genere $p_g = 0$, e d'ordine m (in S_3), ammettono in generale, per $r > 1$, delle superficie r-aggiunte d'ordine $r(m - 4)$, $\varphi_{r(m-4)}$, le cui sezioni (curve r-canoniche) sono invarianti rispetto alle trasformazioni birazionali; il numero delle $\varphi_{r(m-4)}$ linearmente indipendenti costituisce il carattere che si designa col nome di *r-genere* e s'indica di solito con P_r ($P_1 = p_g$) *). Orbene il calcolo effettivo dei plurigeneri, mostra che, mentre si ha per le rigate

$$p_g = P_2 = P_3 = \cdots = 0,$$

*) Cfr. ENRIQUES, *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL), s. III, t. X (1896), pp. 1-81], § 39.

si ha sempre

$$P_4 \geqq 1 , \qquad o \qquad P_6 \geqq 1$$

per le superficie ellittiche non riferibili a rigate.

Dunque

$$p_a < 0 , \qquad P_4 = P_6 = 0$$

sono le condizioni perchè una superficie sia riferibile ad una rigata irrazionale (di genere $-p_a$).

Ricordiamo ora che le superficie per cui

$$p_a = 0, \qquad P_2 = 0$$

sono razionali, cioè riferibili a rigate di genere zero *), e notiamo che le condizioni $P_4 = 0$ e $P_6 = 0$ portano evidentemente $P_2 = 0$, $p_a \leqq 0$.

Ne deduciamo il teorema:

Le condizioni perchè una superficie possa trasformarsi in una rigata (razionale o no) si esprimono semplicemente annullando il quadrigenere ed il sestigenere:

$$P_4 = P_6 = 0 .$$

In altri termini si hanno così le *condizioni perchè l'equazione algebrica*

$$f(x, y, z) = 0$$

possa trasformarsi in un'altra del tipo

$$\varphi(X, Y) = 0 ,$$

dove è eliminata una variabile.

Questo resultato era inaspettato. Il sig. Castelnuovo ed io, in fine alla nostra comune memoria degli Annali di Matematica 1900, avevamo incontrato la questione « se l'annullarsi dei plurigeneri di una superficie porti di necessità che essa sia riferibile ad una rigata », ma alcuni esempii, (§ 9) che credevamo di potere generalizzare, in più sensi diversi, ci avevano indotto a prevedere la possibilità di superficie (non rigate) in cui tutti i plurigeneri fossero nulli fino ad un ordine arbitrariamente alto.

§ 1.

Superficie per cui $p_g = 0$, $p_a < -1$.

Una superficie (irregolare) per cui il genere aritmetico è inferiore

*) Castelnuovo, *Sulle superficie di genere zero* [Memorie della Società Italiana delle Scienze (dei XL), s. III, t. X (1896), pp. 103-123].

al genere geometrico,

$$p_a < p_g,$$

possiede sempre sistemi continui di curve di un dato ordine, non appartenenti ad un medesimo sistema lineare. Quando $p_g = 0$, partendo da un tale sistema si può costruire un fascio irrazionale, mediante un procedimento indicato dal sig. CASTELNUOVO.

Così « ogni superficie per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a \leqq -1$$

possiede un fascio irrazionale di curve » *).

Sia ora F una superficie di genere geometrico

$$p_g = 0,$$

e di genere numerico

$$p_a = -p < 0,$$

contenente un fascio irrazionale di curve C di genere

$$\pi \geqq 1.$$

Il genere lineare di F è

$$p^{(1)} \geqq 1 \text{ **)};$$

e, indicando con $\Delta(\geqq 0)$ il numero delle curve C dotate di un punto doppio, con $\rho(>0)$ il genere del fascio, si ha la relazione ***)

$$\Delta + 4(\rho - 1)(\pi - 1) = 13 - 12p - p^{(1)}.$$

Da questa (essendo $\pi \geqq 1$) si ricava

$$\Delta \leqq 13 - 12p - p^{(1)},$$

quindi

$$13 - 12p - p^{(1)} \geqq 0;$$

e poichè $p \geqq 1$, $p^{(1)} \geqq 1$,

$$\Delta = 0, \qquad p = 1, \qquad p^{(1)} = 1.$$

Pertanto l'ipotesi $p > 1$, porta di conseguenza

$$\pi = 0,$$

dal che si deduce ****):

Ogni superficie per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a = -p < -1,$$

è riferibile ad una rigata di genere p.

---

*) ENRIQUES, Atti dell'Accademia di Bologna, 11 Dic. 1904.

**) CASTELNUOVO e ENRIQUES, *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche* [Annali di Matematica, s. III, t. VI (1901), pp. 165-225], n° 20.

***) l. c., n° 6.

****) ENRIQUES, *Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali* [Mathem. Annalen, LII (1899), pp. 449-456].

§ 2.

Superficie con un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1 : p_g = 0,\ p_a = -1$.

Supponiamo ora

$$\pi \geqq 1.$$

Sarà, come è detto innanzi,

$$\Delta = 0, \quad p_g = 0, \quad p_a = -p = -1, \quad p^{(1)} = 1.$$

Notiamo subito che, essendo

$$p_g - p_a = 1,$$

il genere del fascio (irrazionale) delle C varrà

$$\rho = 1 \ ^{*}).$$

Distinguiamo i due casi: $\pi > 1$, $\pi = 1$.

1° caso. Sia $\pi > 1$.

Ogni curva C ammette un sistema lineare 2° aggiunto $|C''|$, di dimensione (almeno)

$$3\pi - 4,$$

il quale sega sopra la curva C una serie $g_{4\pi-4}$ contenuta nella serie bicanonica $g_{4\pi-4}^{3\pi-4}$.

Consideriamo la serie segata da $|C''|$ sopra un'altra curva qualunque $\overline{C}$, appartenente al fascio irrazionale delle C.

Dico che essa è sempre contenuta nella serie bicanonica di $\overline{C}$.

Infatti, per la proprietà fondamentale dei sistemi aggiunti, si ha:

$$|C''| = |\overline{C}'' + C - \overline{C}|,$$

ed il fascio irrazionale delle C è privo di punti base, onde $|\overline{C}'' + C|$ e quindi anche $|\overline{C}'' + C - \overline{C}|$, sega su $\overline{C}$ una $g_{4\pi-4}$ contenuta nella serie (bicanonica) segata da $|\overline{C}''|$.

Ciò posto, teniamo fissa la curva $\overline{C}$, e facciamo variare nel fascio la C, e con essa il sistema $|C''|$.

Si possono fare due ipotesi:

---

*) SEVERI, *Osservazioni sui sistemi continui di curve appartenenti ad una superficie algebrica* [Atti Accademia Torino, vol. XXXIX (1904), pp. 490-506].

1) o (per ogni posizione generica di C) $|C''|$ sega su $\overline{C}$ la serie bicanonica completa;

2) o la serie segata da $|C''|$ su $\overline{C}$ è sempre incompleta.

Nella seconda ipotesi esiste, qualunque sia C, almeno una curva

$$|C'' - \overline{C}|,$$

di genere $3p^{(1)} - 2 = 1$ *) e grado 0, la quale genera un sistema continuo non lineare, contenente il sistema bicanonico $|C'' - C|$. A siffatto sistema continuo si può dare il nome di *parabicanonico*.

Ora le infinite curve parabicanoniche non equivalenti, o le loro parti irriducibili se esse si spezzano, formeranno sulla superficie F un *fascio irrazionale di curve ellittiche* K. Quindi la superficie F, contenente due fasci irrazionali di curve C e K, avrà il genere

$$p_g \geqq 1.$$

Ma ciò contraddice alle supposizioni da cui siamo partiti.

Esaminiamo la prima ipotesi: per ogni posizione generica di C entro il fascio, $|C''|$ sega su $\overline{C}$ la serie bicanonica completa $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$.

In tale ipotesi per un gruppo generico $G_{4\pi-4}$ della serie suddetta passano ∞^1 curve C'', e perciò si trova almeno una curva spezzata

$$C'' = \overline{C} + K,$$

dove la K (di genere 1 e grado 0) è una curva parabicanonica.

Quante saranno le curve parabicanoniche che così vengono costruite?

La serie *ellittica* ∞^1 delle C'' per il gruppo $G_{4\pi-4}$, non può essere un fascio, perchè possiede delle traiettorie razionali costituite dai punti base, del gruppo suddetto; essa avrà dunque un certo indice $\nu > 1$. Per un punto generico della superficie F passano ν curve C'', della nominata serie, fra loro distinte; soltanto per un punto della curva χ, inviluppo delle C'', due (almeno) di queste C'' diventano infinitamente vicine.

Ora se si prende un punto generico di $\overline{C}$, si avranno per esso ν C'' spezzate in $\overline{C}$ ed in una curva parabicanonica; queste ν curve saranno distinte o no?

Ci potremmo esimere dal discutere tale questione ritenendo soltanto il fatto che esistono almeno due curve parabicanoniche, distinte o infi-

*) Ciò risulta in accordo coll'osservazione fatta che deve essere $\rho = 1$.

nitamente vicine, ed osservando come l'avverarsi di quest'ultima ipotesi non infirmi il seguito del nostro ragionamento.

Ma, poichè l'ipotesi stessa risulta a posteriori impossibile, vale forse la pena di vederne subito la ragione: la $\overline{C}$ non può far parte della curva χ, inviluppo della C''.

Per dimostrare l'asserto, si cerchi anzitutto il numero delle intersezioni di χ con una C generica; si tratta perciò di determinare quanti sono i gruppi $G_{4\pi-4}$ dotati di un punto doppio, in una serie ellittica ∞^1 d'indice ν, contenuta nella $g^{3\pi-4}_{4\pi-4}$ bicanonica. Mediante la rappresentazione di C con una curva d'ordine $4\pi - 4$ in $S_{3\pi-4}$, si trova facilmente che il numero cercato è

$$2\nu(4\pi - 4).$$

Si cerchino quindi le molteplicità di χ nei punti del gruppo base $G_{4\pi-4}$ su $\overline{C}$; preso uno di questi punti A, ogni tangente generica per A determina ν curve C'' della nostra serie, sicchè (la serie essendo ellittica) si avranno, per A, 2ν tangenti della curva inviluppo χ. Dunque i punti del gruppo base $G_{4\pi-4}$ sono 2ν-pli per la χ. Se ora la $\overline{C}$ facesse parte di χ:

$$\chi = \overline{C} + \chi_1,$$

χ_1 avrebbe nei $4\pi - 4$ punti suddetti una molteplicità inferiore a 2ν, quindi incontrerebbe $\overline{C}$ in meno che

$$2\nu(4\pi - 4)$$

punti; ma ciò è assurdo perchè una qualunque C ha appunto $2\nu(4\pi - 4)$ intersezioni con χ, e zero intersezioni con $\overline{C}$.

Riteniamo dunque la conclusione: sopra la superficie F esistono $\nu > 1$ curve parabicanoniche distinte, di genere 1 e grado 0;

Consideriamo due curve siffatte K_1, K_2.

Esse determinano sopra ogni C, due gruppi (bicanonici) equivalenti e quindi una $g^1_{4\pi-4}$.

Consideriamo i gruppi, $G_{4\pi-4}$, delle ∞^1 $g^1_{4\pi-4}$ così costruite come elementi « *punti* », di una varietà doppiamente infinita « *superficie* » φ.

La φ si potrà riguardare come una rigata, multipla secondo $4\pi - 4$, su cui la F viene rappresentata, per modo che alle K_1, K_2 corrispondono due curve direttrici K'_1, K'_2.

Potremo anzi supporre la φ proiettivamente determinata, in guisa che essa sia d'ordine pari $2m$, normale in un S_{2m-1}, e che le K'_1, K'_2 abbiano l'ordine m, appartenendo rispett. a due S_{m-1} indipendenti.

Costruiamo ora, su φ, la curva di diramazione θ'; essa è l'immagine della curva θ, luogo di coincidenze delle serie $g^1_{4\pi-4}$. La θ' non ha punti comuni colle K'_1, K'_2, perchè sulle curve ellittiche K_1, K_2, le involuzioni* ellittiche $\gamma^1_{4\pi-4}$, i cui gruppi corrispondono rispett. ai punti di K'_1, K'_2, sono prive di coincidenze.

Di quì si deduce in primo luogo che la θ' è di genere 1, e si compone quindi di curve ellittiche irriducibili, senza punti comuni. Basta perciò applicare la formula fondamentale del sig. SEGRE *), per la quale, designando con ν l'ordine di θ', con x il suo genere (virtuale), con k il numero delle sue intersezioni colle generatrici di φ, si ha:

$$(k-1)\nu - x = \frac{k(k-1)}{2} 2m - 1 .$$

Infatti, si mandi un iperpiano per K'_1, che avrà comuni con φ m generatrici; poichè θ' non incontra K'_1, questo iperpiano intersecherà θ' in

$$\nu = mk$$

punti, e quindi si avrà

$$(k-1)km - x = (k-1)km - 1$$

ed

$$x = 1 .$$

Si consideri ora una parte irriducibile di θ', secante le generatrici in un certo numero di punti $i \geqq 1$. Questa curva, L', appartiene ad un fascio di curve ellittiche, i-secanti le generatrici di φ, in cui sono contenute le K'_1, K'_2 contate i volte; il suddetto fascio si costruisce trasformando L' colle ∞^1 omografie di S_{2m-1}, aventi come spazio di punti uniti i due S_{m-1} determinati rispett. da K'_1, K'_2 **).

Ora le ∞^1 curve L', come quella di partenza, non avranno punti comuni colla curva di diramazione θ', sicchè ad esse corrisponderanno sulla superficie F delle curve L, di genere 1; le L comporranno un fascio, determinato dalle due curve parabicanoniche K_1, K_2, contate i volte. Tuttavia le curve L potranno spezzarsi in parti ellittiche, e si potrà quindi avere su F un fascio *razionale o irrazionale* di curve ellittiche

---

*) *Intorno alla geometria su una rigata algebrica; Sulle varietà algebriche composte di una serie semplicemente infinita di spazi* [Rend. Acc. Lincei, vol. III, 2° sem. 1887, pp. 3-6; pp. 149-153] e *Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques*, II^e Partie [Math. Annalen, XXXIV (1889), pp. 1-25], n° 1.

**) Cfr. SEGRE, *Ricerche sulle rigate ellittiche di qualunque ordine* [Atti Acc. Torino, vol. XXI (1886)] (passim e in particolare il n° 19).

irriducibili; ma l'ipotesi che il fascio sia irrazionale porta $p_g > 0$, contraddicendo alle nostre supposizioni fondamentali.

Se poi le L formano un fascio razionale esse debbono segare le C (di genere $\pi > 1$) in $n > 1$ punti.

§ 3.

Superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche:

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1.$$

2° Caso. — *Sia* $\pi = 1$.

Abbiamo dunque una superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche C, per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a = -p = -1, \qquad p^{(1)} = 1,$$
$$\Delta = 0.$$

Consideriamo il discriminante della curva C, variabile nel fascio, come funzione razionale dell'elemento (C) di una varietà ellittica ∞^1 (il fascio). Il numero degli zeri (e dei poli) di questa funzione è precisamente $\Delta = 0$, quindi il discriminante stesso è costante, cioè: *le curve ellittiche C hanno tutte lo stesso modulo.*

Le C sono dunque trasformabili birazionalmente l'una nell'altra, ma per determinare *una* corrispondenza fra due date C occorrerà in generale eseguire delle *operazioni irrazionali.*

Soltanto un numero finito di corrispondenze fra due C, potrà, nel suo insieme, essere determinato *razionalmente* come segue:

Suppongasi p. es. che le curve C sieno d'ordine $m = 3$.

Due cubiche di ugual modulo sono sempre proiettive, e (lasciando da parte il caso particolare delle curve armoniche ed equianarmoniche) vi sono 18 proiettività che trasformano l'una cubica nell'altra, corrispondenti al gruppo delle 18 proiettività che lasciano invariata ciascuna delle due cubiche ed i suoi 9 flessi.

Similmente due curve ellittiche normali, di ugual modulo, sono sempre proiettive, e ciò in $2m^2$ modi, se m è l'ordine delle curve (supposte non armoniche nè equianarmoniche).

Date dunque due C, di cui si designi l'ordine con m, verrà determinato razionalmente il gruppo delle $2m^2$ trasformazioni birazionali di esse, che nascono dalle proiettività tra le curve normali corrispondenti, di cui le C sono proiezioni.

Questo enunciato esige solo una lieve modificazione nei casi armonico ed equianarmonico: nel 1° caso sulle C può determinarsi razionalmente *una* g_2^1 (corrispondente al quadrato della trasformazione ciclica del 4° ordine) e si hanno in rapporto a queste 8 corrispondenze fra due C; nel 2° caso è data su ogni C *una* g_3^1 ciclica, e si ha razionalmente un gruppo di 18 trasformazioni di due C una nell'altra.

Ciò posto si fissi nel fascio una curva $\overline{C}$, e si considerino le $2m^2$ (o 8 o 18) corrispondenze tra di essa ed una C variabile. I punti omologhi di un punto generico di $\overline{C}$, descriveranno una curva secante le C in $2m^2$ (o risp. in 8 o 18) punti. Si otterranno similmente ∞^1 curve componenti un fascio razionale.

Queste curve potranno essere spezzate; in tal caso le loro componenti irriducibili K costituiranno un fascio che potrà essere razionale o irrazionale; ma, nella seconda ipotesi, il genere della superficie F risulta

$$p_g > 0 .$$

Ora dunque se, come supponiamo, $p_g = 0$, le curve irriducibili K, secanti le C in un certo numero $n(> 1)$ di punti, costituiranno un fascio razionale.

Una curva generica K, contiene una involuzione ellittica γ_n^1 determinata dal fascio delle C; se questa γ_n^1 non ha coincidenze la K è ellittica.

Se invece ci sono delle coincidenze, queste (in numero di $2\theta - 2$) costituiscono un gruppo canonico della curva K *) (la quale è allora di genere θ). D'altra parte la K non può avere delle coincidenze sopra una C generica, ma soltanto sopra una C che si riduce ad una curva ellittica contata due o più volte.

Si trova dunque una curva di genere 1 (composta di parti di curve C), la quale sega sopra ogni K un gruppo canonico.

Il caso che veniamo così ad incontrare è effettivamente possibile, ma soltanto per $p_g > 0$. Invero è facile persuadersi che la curva X, costruita innanzi, è una curva canonica della superficie F.

---

*) Cfr. CASTELNUOVO, *Alcune osservazioni sopra le serie irrazionali di gruppi di punti appartenenti ad una curva algebrica* [Rend. Acc Lincei, vol. VII, 2° sem. 1891, pp. 294-299].

A tal fine basta immaginare la F proiettivamente trasformata in una superficie di S_1 (con singolarità ordinarie) sulla quale le curve K sieno sezioni dei piani per una retta a. Designiamo infatti con r l'ordine delle K, con i la molteplicità di a per F.

In ogni piano per a si costruisca la curva d'ordine $r - 3$ aggiunta alla K, determinata dal gruppo sezione di X; il luogo di tali curve è una superficie φ_{r+s-3} di un certo ordine $r + s - 3$, la quale passa per la curva doppia di F, e contiene la retta i-pla a come s-pla. Ma tenendo conto che il genere della curva sezione X vale 1, si conclude

$$s = i - 1;$$

perciò la $\varphi_{r+s-3} = \varphi_{r+i-4}$ è una superficie aggiunta ad F e la X è una curva canonica ($p_g > 0$).

Concludiamo pertanto, che nel caso $p_g = 0$ le K sono ellittiche, cioè:

Se una superficie algebrica per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1,$$

contiene un fascio irrazionale (ellittico) di curve ellittiche C, essa contiene altresì un fascio razionale di curve ellittiche K, secanti le prime in un certo numero $n(> 1)$ di punti.

§ 4.

Conclusione relativa alle superficie per cui $p_g = 0$, $p_a = -1$: gruppo ellittico di trasformazioni ad esse inerente.

Confrontando i resultati ottenuti nei due casi $\pi > 1$, $\pi = 1$, e completandoli con ciò che si sà pel caso $\pi = 0$, avremo il teorema:

Ogni superficie algebrica F per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1$$

contiene

1) *un fascio ellittico di curve C, di genere $\pi \geqq 0$;*

2) *e un fascio razionale di curve ellittiche K, secanti le prime in un certo numero $n \geqq 1$ di punti.*

Si può aggiungere che *le curve ellittiche K hanno tutte lo stesso modulo,* poichè a questa conseguenza si è tratti dall'essere $p^{(1)} = 1$, col ragionamento, che abbiamo applicato al fascio delle C nell'ipotesi $\pi = 1$, in principio al § 3.

Consideriamo ora una K generica del fascio alla quale appartiene *un* integrale ellittico di 1ª specie U.

Le trasformazioni di 1ª specie, $U' = U + a$, che essa ammette in sè medesima, formano una varietà ellittica di elementi (birazionalmente identica alla K), sopra la quale è *razionalmente dato,* in funzione dei coefficienti delle equazioni di K, *un* punto, corrispondente alla trasformazione identica.

Esclusi i valori particolari del modulo di K, che corrispondono al caso armonico ed equianarmonico, possiamo dunque rappresentare razionalmente le « trasformazioni » di K sui « punti » di una cubica L:

$$x = \wp(a), \qquad y = \pm\, \wp'(a),$$

colla sola ambiguità proveniente dal doppio segno di a; si hanno cioè per ogni K *due* rappresentazioni birazionali del corrispondente gruppo di trasformazioni sopra la cubica L, ciascuna di esse deducendosi dall'altra coll'*invertire* le trasformazioni; i due punti omologhi di una trasformazione su L sono coniugati in una g^1_2 (trasformazione di 2ª specie) che ha come punto doppio

$$a \equiv 0.$$

Emerge da ciò che « dato un fascio di curve ellittiche K collo stesso modulo (esclusi i casi armonico ed equianarmonico), ad ogni trasformazione di 1ª specie di una K vengono razionalmente coordinate *due* trasformazioni, l'una inversa dell'altra, sopra ogni altra K; la separazione di queste richiede in generale un'irrazionalità quadratica, che porta sopra il parametro da cui le K dipendono ». Ora dico che « questa irrazionalità quadratica si deve considerare come *aggiunta* al campo di razionalità determinato dai coefficienti di due K, allorchè è *data* una corrispondenza biunivoca tra due involuzioni ellittiche γ^1_n, sulle due K ».

Fissiamo infatti sopra le due K, due gruppi omologhi

$$G_n, \qquad G'_n$$

delle involuzioni sudette, e consideriamo sulla prima K una trasformazione di 1ª specie generica

$$U' \equiv U + a$$

e la sua inversa

$$\overline{U}' \equiv U - a;$$

le due trasformazioni mutano il G_n in due gruppi diversi della γ^1_n, a cui corrispondono due gruppi razionalmente distinti della γ^1_n sulla seconda K, i quali sono omologhi di G'_n in due trasformazioni di 1ª specie l'una inversa dell'altra; queste due trasformazioni della seconda K, riescono così razionalmente coordinate a quelle della prima.

Osserviamo ora che la corrispondenza, supposta data fra le involuzioni γ_n^1 di due K, permette di coordinare razionalmente le trasformazioni di 1^a specie dell'una curva a quelle dell'altra, anche nei casi armonico ed equianarmonico, esclusi dalle precedenti considerazioni; invero, quantunque l'irrazionalità di cui ora si tratta non sia più quadratica (ma dipenda da radicali quadratici e cubici) si può ripetere lo stesso ragionamento, basandosi sul fatto che una γ_n^1 ellittica di una curva ellittica non può avere i suoi gruppi composti di quelli della involuzione ciclica *razionale* g_4^1 o g_3^1, che appartiene alla curva armonica o rispett. equianarmonica. Ciò posto, ricordiamo che sopra la nostra superficie F si ha un fascio ellittico di curve C, che sega su due K qualunque rispett. due involuzioni γ_n^1 riferite biunivocamente tra loro; ne deduciamo che « le trasformazioni di 1^a specie di due K qualunque riescono tra loro razionalmente coordinate, per modo che si hanno ∞^1 trasformazioni birazionali della superficie F in sè stessa, componenti un gruppo continuo (permutabile), di cui le K sono le trajettorie ».

Concludiamo pertanto:

Ogni superficie algebrica F per cui

$$p_g = 0, \qquad p_a = -1,$$

ammette un gruppo algebrico continuo ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè stessa, che ha come traiettorie le curve ellittiche di un fascio razionale.

Il teorema è invertibile, come vedremo più tardi. Intanto si ha:

Ogni superficie con un gruppo ∞^1 G di trasformazioni birazionali, che ha come traiettorie le curve ellittiche K di un fascio (razionale o nò), contiene un secondo fascio ellittico di curve C (n-secanti le K), le quali avranno naturalmente gli stessi moduli.

La cosa si dimostra coll'analisi del § 3, tenendo conto del coordinamento razionale delle trasformazioni di 1^a specie tra due K qualunque. Ma più rapidamente si perviene allo scopo per via trascendente, seguendo la via indicata dal sig. Painlevé nelle sue Lezioni di Stockholm (op. c.). Invero, si consideri la varietà ellittica ∞^1 che ha come elementi le « trasformazioni » del nostro gruppo; e sia u l'integrale di 1^a specie che le appartiene, di cui si designino i periodi con ω, ω'. Sarà u un integrale di Picard di 1^a specie della superficie F. Costruiamo quindi le funzioni ellittiche di Weierstrass

$$\mathrm{p}(u|\omega, \omega'), \qquad \mathrm{p}'(u|\omega, \omega');$$

queste risulteranno funzioni razionali dei punti di F, onde le curve C:

$$u = \text{cost.},$$

saranno algebriche, dando luogo così al fascio ellittico di cui discorre l'enunciato.

Se il fascio delle curve K, trajettorie del gruppo G è irrazionale, il genere della superficie vale

$$p_g > 0;$$

vedremo poi che, quando il fascio sudetto è razionale, risulta sempre

$$p_g = 0 \qquad (\text{e } p_a = -1).$$

§ 5.

Rappresentazione parametrica di Painlevé: questioni d'esistenza.

Le superficie con un gruppo ellittico ∞^1 di trasformazioni birazionali in sè stesse, sono state messe in luce dalla profonda analisi cui il sig. Picard ha sottoposto il problema generale dei gruppi continui algebrici. Il sig. Painlevé, proseguendo lo studio di quelle superficie nelle sue classiche Lezioni citate, è pervenuto ad una rappresentazione parametrica caratteristica, la quale in sostanza esprime l'esistenza dei due fasci di curve C e K sulla superficie.

Si designi con

$$u = \int P\,dX + Q\,dY$$

l'integrale ellittico di 1ª specie, dotato dei periodi ω, ω', che appartiene al fascio delle C; esso costituisce un integrale di Picard di 1ª specie della superficie, riprendente lo stesso valore nei punti di ogni C.

Si costruisca quindi una funzione razionale $v(X\,Y\,Z)$, la quale riprenda lo stesso valore nei punti di ogni curva ellittica K (traiettoria del gruppo); l'equazione

$$v = \text{cost.}$$

rappresenterà *una* o *più* curve K; la prima ipotesi porta che il fascio delle K sia razionale, e viceversa può ritenersi soddisfatta in questo caso (Teorema di Lüroth).

Cerchiamo ora di esprimere le coordinate $X\,Y\,Z$ dei punti della superficie

$$F(X\,Y\,Z) = 0,$$

per mezzo dei parametri u e v.

Sopra una curva C, dove $u = \text{cost.}$, le X, Y, Z, saranno funzioni algebriche di v, cioè funzioni razionali di v, w legate da un'equazione algebrica

$$f(v w) = 0;$$

e, siccome le curve C (trasformate l'una dell'altra) sono birazionalmente identiche, si può supporre che i coefficienti di f non dipendano da u.

Consideriamo una curva K, su cui

$$v(X Y Z) = \text{cost.},$$
$$F(X Y Z) = 0,$$

ed il suo integrale ellittico di 1ª specie

$$U = \int \theta(X Y Z) \, d X,$$

che avrà certi periodi Ω, Ω'; le $X Y Z$ sono, su K, funzioni razionali di

$$\mathfrak{p}(U|\Omega \Omega'), \qquad \mathfrak{p}'(U).$$

Ora l'integrale di PICARD u, è un integrale di 1ª specie sulla curva, K; si avrà quindi

$$\Omega = a \omega + b \omega'$$
$$\Omega' = c \omega + d \omega'$$

ove a, b, c, d sono numeri interi tali che il determinante

$$a d - b c = n \geq 1.$$

E sarà

$$\mathfrak{p}(U|\Omega \Omega') = \mathfrak{p}(u + \lambda \omega + \mu \omega' | a \omega + b \omega', \; c \omega + d \omega'),$$
$$\mathfrak{p}'(U|\Omega \Omega') = \mathfrak{p}'(u + \lambda \omega + \mu \omega' | a \omega + b \omega', \; c \omega + d \omega'),$$

dove λ e μ sono numeri interi.

Pertanto *le coordinate $X Y Z$ dei punti della superficie F si esprimeranno come funzioni razionali di*

$$\mathfrak{p}(u + \lambda \omega + \mu \omega' | a \omega + b \omega', \; c \omega + d \omega'), \qquad \mathfrak{p}',$$

e di v, w legate dall'equazione

$$f(v w) = 0,$$

dove si otterranno n punti $(X Y Z)$ distinti, in corrispondenza alle $n (= a d - b c)$ coppie di valori λ, μ, per cui

$$\lambda \omega + \mu \omega'$$

assume valori incongrui rispetto ad

$$a \omega + b \omega', \qquad c \omega + d \omega'.$$

Questa è in sostanza la rappresentazione parametrica del sig. PAINLEVÉ *), la quale *rappresentazione è caratteristica per le superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè;* infatti se XYZ si esprimono nel modo anzidetto, si ha il gruppo di trasformazioni

$$v' = v, \qquad w' = w, \qquad u' = u + \text{cost.}$$

Avuto riguardo a ciò le superficie con un gruppo ellittico di trasformazioni birazionali in sè, possono designarsi col nome di *superficie ellittiche, di determinante* $n = ad - bc$.

Partendo dalla rappresentazione di PAINLEVÉ delle superficie ellittiche, si potranno ora costruire effettivamente queste superficie in corrispondenza ad un determinante $n = ad - bc$ dato ad arbitrio, e non vi ha dubbio che l'illustre geometra abbia scorto tale possibilità. Però occorre fermare l'attenzione sopra una *circostanza delicata:* se si prende ad arbitrio un'equazione

$$f(vw) = 0,$$

tre funzioni razionali X, Y, Z di

$$\wp(u + \lambda\omega + \mu\omega' | a\omega + b\omega', c\omega + d\omega'), \qquad \wp', \qquad v, \qquad w,$$

non dànno *in generale,* per

$$ad - bc > 1,$$

una superficie irriducibile F, ma l'insieme di $n = ad - bc$ superficie corrispondenti alle n coppie λ, μ per cui

$$\lambda\omega + \mu\omega'$$

assume valori incongrui rispetto ad

$$a\omega + b\omega', \qquad c\omega + d\omega'.$$

Affinchè la superficie F, costruita nel modo anzidetto, non si spezzi, bisogna che l'equazione

$$f(vw) = 0$$

sia opportunamente coordinata all'equazione che lega la

$$\wp(u | a\omega + b\omega', c\omega + d\omega')$$

alla

$$\wp(u | \omega\omega').$$

Noi esamineremo in particolare come tale coordinamento si faccia nel caso in cui le traiettorie ellittiche K formano un fascio razionale,

*) Op. cit., pag. 285.

avvertendo che queste considerazioni potrebbero facilmente estendersi al caso in cui le K formino un fascio irrazionale. Così non soltanto risolveremo la *questione d'esistenza* delle superficie F, in corrispondenza ad ogni determinante $n > 1$, ma ne assegneremo i tipi irriducibili.

§ 6.

I tipi delle superficie ellittiche di genere $p_g = 0$. Caso in cui il determinante è un numero primo.

Ci proponiamo dunque di « costruire effettivamente tutte le superficie ellittiche F, per cui le traiettorie del corrispondente gruppo formano un fascio razionale, assegnandone i tipi irriducibili ».

Supponsgasi data una superficie F.

Fissiamo la nostra attenzione sui due fasci di curve C, K più volte considerati su di essa, e designamo ancora con n il numero delle intersezioni di una C e di una K *(determinante di F)*.

Consideriamo un cilindro ellittico

$$\varphi(xz) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

le cui generatrici sieno coordinate alle curve C (componenti un fascio ellittico cogli invarianti g_2, g_3); facciamo inoltre corrispondere le curve K alle sezioni piane

$$z = \text{cost.}$$

del cilindro suddetto. Si otterrà così una *rappresentazione della superficie F sopra il cilindro ellittico* φ *contato* n *volte, per modo che la curva di diramazione di* φ (non intersecante le $z = \text{cost.}$) *sarà composta di un certo numero di sezioni piane*

$$z = a_1, \quad z = a_2 \ldots z = a_t.$$

Diamoci ora il cilindro n-plo φ e proponiamoci di costruire le superficie F su di esso rappresentate.

Possiamo supporre, non soltanto

$$n > 1,$$

ma anche

$$t > 2,$$

altrimenti la F contiene un fascio di curve razionali (C) e si lascia trasformare in un (nuovo) cilindro ellittico. Di più supporremo che t sia pari, se $n = 2$, escludendo (come è lecito) che la sezione di φ col piano all'infinito, faccia parte della curva di diramazione.

Volendo che da questa ricerca scaturiscano tutti i tipi delle F, osserviamo anzitutto che: due superficie ellittiche F, F' saranno birazionalmente identiche, se due curve C e K di F abbiano gli stessi moduli rispett. di una C e di una K di F'.

Infatti le F, F' risulteranno riferite tra loro, punto per punto, quando:

1) i punti di una C di F sieno coordinati ai punti di una C di F';

2) ad ogni trasformazione del gruppo ∞^1 G di F si faccia corrispondere una trasformazione del gruppo G' di F', per modo che le trasformazioni identiche si corrispondono; questo riferimento, per isomorfismo, dei due gruppi è possibile, perchè risulta determinato da una corrispondenza biunivoca posta fra le due curve ellittiche K (traiettorie di G, G').

Ora consideriamo, sopra una superficie F, l'involuzione I_n dei gruppi di n punti (intersezioni delle curve C, K) che corrispondono ai punti del cilindro n-plo φ; sia

$$A_1 A_2 \ldots A_n$$

un gruppo generico di I_n.

Facendo corrispondere A_2 ad A_1 si ottiene, entro il gruppo G, una trasformazione ciclica $(A_1 A_2)$ della F in sè stessa, che lascia invariate le C, K e quindi tutti i gruppi di I_n.

Ma, poichè l'intiero gruppo G è permutabile, anche il sottogruppo finito delle trasformazioni $(A_r A_s)$ sarà *abeliano*. In particolare dunque, per ogni curva C, si avrà un gruppo abeliano di n trasformazioni della C in sè stessa, che scambiano tra loro gli n punti intersezioni di C con una K qualunque.

Ciò posto la costruzione delle superficie F, rappresentata sul cilindro n-plo φ colla curva di diramazione $(z-a_1)(z-a_2) \ldots (z-a_t)=0$, si riconduce a costruire:

1) Una curva irriducibile C, rappresentata sopra una generatrice n-pla di φ (coi punti di diramazione assegnati $z = a_1, \ldots z = a_t$) per modo che gli n punti omologhi ad un punto della generatrice dipendano razionalmente dalle radici di un'equazione abeliana d'ordine n; cioè, una funzione algebrica del punto z della generatrice suddetta, i cui rami si permutino circolarmente quando, nel piano della variabile complessa z, si fà un giro attorno ai punti di diramazione

$$z = a_1, \quad z = a_2, \ldots z = a_t.$$

2) Una curva ellittica K, rappresentata sopra la cubica piana n-pla

$$\varphi(xy) = 0,$$

senza punti di diramazione.

Di K siffatte ve ne sono di irriducibili e di riducibili (almeno una composta di n curve in corrispondenza biunivoca con φ); ma l'ipotesi della riducibilità conduce alle superficie ellittiche, su cui le traiettorie del gruppo di trasformazioni formano un fascio irrazionale ($p_g > 0$), potendosi ritenere esclusa se il fascio delle K è razionale.

Costruite le curve C e K (che sono definite a meno di trasformazioni birazionali) vedremo come sia possibile di scegliere per esse una rappresentazione analitica tale da ottenere, per combinazione opportuna, una superficie F irriducibile, cui le due curve appartengano.

Volendo risolvere effettivamente il problema proposto, supporremo dapprima, per semplicità, che il *determinante n sia un numero primo.* Il caso in cui n sia un numero composto, si ridurrà poi al precedente.

1) *Costruzione della curva C.*

Si tratta di determinare la più generale funzione algebrica $X(z)$ i cui n rami $X_1 X_2 \ldots X_n$, vengano permutati circolarmente per un giro attorno ai punti di diramazione

$$z = a_1 \ldots z = a_t,$$

nel piano della variabile complessa z.

Le sostituzioni prodotte sui rami di X dai suddetti giri saranno le potenze di una medesima sostituzione ciclica, p. es. di

$$S = (X_1 X_2 \ldots X_n).$$

Poniamo che sieno

$$S^{h_1}, \quad S^{h_2}, \ldots S^{h_t} \qquad (h_i < n)$$

le sostituzioni relative ai punti critici

$$z = a_1, \quad z = a_2, \ldots z = a_t.$$

Poichè il punto all'infinito non è di diramazione, avremo

$$S^{h_t} \ldots S^{h_2} S^{h_1} = 1,$$

ossia

$$h_1 + h_2 + \cdots + h_n \equiv 0 \qquad (\text{mod } n).$$

Costruiamo la funzione

$$\sqrt[n]{(z - a_1)^{h_1}(z - a_2)^{h_2} \ldots (z - a_t)^{h_t}};$$

essa dipende da z in modo che i giri attorno ai punti

$$z = a_1, \quad z = a_2, \ldots z = a_t,$$

producono sui suoi rami le stesse sostituzioni

$$S^{h_1}, \quad S^{h_2}, \ldots S^{h_t}.$$

Sarà pertanto X funzione razionale di z e della suddetta $\sqrt[n]{}$ che ha il medesimo gruppo di monodromia.

Dunque la curva C, rappresentata dalla funzione algebrica $X(z)$, si potrà ridurre con una trasformazione birazionale al tipo

$$(1) \qquad X = H\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1}(z-a_2)^{h_2}\ldots(z-a_t)^{h_t}}$$

$$h_i < n, \qquad h_1 + h_2 \cdots + h_t \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\, n),$$

dove H è una costante diversa da 0, che potremmo prendere $= 1$, ma che ci conviene di non fissare in vista dei nostri scopi.

2) *Costruzione della curva ellittica K, rappresentata sulla cubica n-pla*

$$\varphi(xy) = y^2 - 4x^3 - g_3 x - g_3 = 0$$

senza punti di diramazione.

Questa costruzione può effettuarsi:

α) per via trascendente,

β) o per via algebrico-geometrica.

α) Volendo seguire la prima via, consideriamo l'integrale ellittico

$$u = \int \frac{ds}{\sqrt{4s^3 - g_2 s - g_3}},$$

che avrà certi periodi $\omega\omega'$ (esprimibili nel modo noto per $g_2 g_3$); risulterà

$$x = \wp(u \mid \omega\omega'),$$

$$y = \wp'(u \mid \omega\omega').$$

Ora, essendo n un numero primo, si hanno $n+1$ trasformazioni non equivalenti di determinante n

$$\Omega = n\omega, \qquad \Omega' = \omega'$$

$$\Omega = \omega - \nu\omega', \qquad \Omega' = n\omega'$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1).$$

Designamo rispett. con $\wp_\infty$ e $\wp_\nu$ ($\nu = 0, 1, \ldots n-1$) le funzioni ellittiche trasformate, coi periodi Ω, Ω'; allora le curve ellittiche K, rappresentate sulla cubica n-pla φ, saranno birazionalmente riducibili ai tipi:

$$(a) \qquad \begin{cases} X = \mathfrak{p}_\nu(u), \\ Y = \mathfrak{p}'(u), \end{cases}$$

dove $\nu = \infty, 0, 1, 2, \ldots n-1$; ad ogni punto u di φ, corrisponderanno su K gli n punti

$$u, \qquad u+\omega, \qquad u+2\omega, \ldots u+(n-1)\omega,$$

per $\nu = \infty$, e

$$u, \qquad u+\omega', \qquad u+2\omega', \ldots u+(n-1)\omega',$$

per $\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

Possiamo trasformare la curva (a) (per $\nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1$) in un'altra, sostituendo ad X una qualsiasi funzione razionale di $\mathfrak{p}_\nu$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$, la quale non resti invariata quando si aumenti u di ω e di ω', e assuma quindi n valori distinti in corrispondenza a $\mathfrak{p}(u)$, $\mathfrak{p}'(u)$.

In vista dei nostri scopi, ci conviene di trasformare le equazioni (a) nel modo seguente:

Ricordiamo che

$$\mathfrak{p}_\infty(u+\omega), \qquad \mathfrak{p}_\nu(u+\omega') \qquad (\nu = 0, 1, \ldots n-1)$$

sono funzioni razionali di

$$\mathfrak{p}(u), \qquad \mathfrak{p}'(u)$$

e di

$$\mathfrak{p}_\infty(u) \qquad \text{o} \qquad \mathfrak{p}_\nu(u)$$

rispettivamente.

Formiamo quindi l'espressione

$$H_\infty(\mathfrak{p}_\infty) = \mathfrak{p}_\infty(u) + \varepsilon\mathfrak{p}_\infty(u+\omega) + \varepsilon^2\mathfrak{p}_\infty(u+2\omega) + \cdots + \varepsilon^{n-1}\mathfrak{p}_\infty[u+(n-1)\omega],$$

o

$$H_\nu(\mathfrak{p}_\nu) = \mathfrak{p}_\nu(u) + \varepsilon\,\mathfrak{p}_\nu(u+\omega') + \varepsilon^2\,\mathfrak{p}_\nu(u+2\omega') + \cdots + \varepsilon^{n-1}\,\mathfrak{p}_\nu[u+(n-1)\omega']$$
$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots n-1),$$

dove ε è una radice n^{ma} immaginaria dell'unità; sarà

$$H_\nu \quad \text{per} \quad \nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1,$$

una funzione razionale di $\mathfrak{p}_\nu(u)$ [e di $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}'(u)$] ad n valori distinti, sicchè potremo prendere come curva K, in luogo della (a), una delle $n+1$ curve

$$(2) \qquad \begin{cases} X = M H_\nu[\mathfrak{p}_\nu(u)] \\ Y = \mathfrak{p}'(u), \end{cases}$$

dove M è una costante arbitraria.

La H_ν è una funzione algebrica ad n valori di $\mathfrak{p}(u)$, i cui rami subiscono una moltiplicazione per ε allorchè si cambia u in $u + \omega$ o in $u + \omega'$ (rispett. per $\nu = \infty$ o per $\nu = 0, 1, \ldots n - 1$); essa si può dunque esprimere (come è noto) mediante un radicale n^{mo} portante sopra una funzione razionale di $\mathfrak{p}(u)\mathfrak{p}'(u)$ *). Sarebbe anzi facile assegnare l'espressione effettiva, la quale ci darebbe la rappresentazione di X per mezzo di un radicale n^{mo} portante su una funzione razionale delle x, y legate dall'equazione cubica

$$\varphi(xy) = 0.$$

β) Ad una siffatta soluzione algebrica del nostro problema, si può anche pervenire direttamente col seguente procedimento geometrico:

Si costruiscano le curve, d'ordine $3n$, che hanno colla cubica φ, 9 contatti n-punti; esse si distribuiscono in $n + 1$ famiglie che corrispondono agli $n + 1$ valori incongrui della somma dei parametri relativi ai punti di contatto:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = \frac{a\omega + b\omega'}{n},$$

cioè

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = \frac{\omega'}{n}$$

oppure

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_9 = \frac{\omega - r\omega'}{n}.$$

Designamo con

$$f_\nu(xy) = 0$$

una delle suddette curve 9 tangenti, distinguendo coll'indice

$$\nu = \infty, 0, 1, \ldots n - 1$$

la famiglia a cui essa appartiene. La curva

$$(2') \qquad \begin{cases} X = M\sqrt[n]{f_\nu(xy)} \\ \varphi(xy) = 0 \end{cases}$$

(dove M è una costante arbitraria, non nulla) è evidentemente una curva ellittica rappresentata sulla φ, contata n volte; si ottengono così $n + 1$ curve, birazionalmente distinte, corrispondenti ai tipi (2).

3) *Costruzione della superficie F.*

Possiamo ora costruire facilmente una superficie F, assegnando la

*) Cfr. p. es. BIANCHI, *Lezioni sulla teoria delle funzioni*, etc. (Pisa, Spoerri, 1901), § 167, pag. 438.

espressione parametrica delle coordinate X, Y, Z, dei punti di essa per mezzo di z, u, in guisa che: per

$$X = \text{cost.}, \qquad Y = \text{cost.}$$

si ottengano curve, *di un fascio ellittico, birazionalmente identiche* ad una delle curve C, innanzi costruite; per

$$Z = \text{cost.}$$

si abbiano su F, curve ellittiche (di un fascio razionale) identiche ad una delle curve K. Le superficie F così costruite ci porgeranno i *tipi* delle classi che vogliamo determinare.

Per costruire F, basterà combinare le formule (1) (2), supponendo che la quantità designata nella (1) con H (costante rispetto a z) sia rimpiazzata da $H_\nu \mathfrak{p}_\nu(u)$, e la quantità designata nelle (2) con M (costante rispetto ad u) sia rimpiazzata con

$$\sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1} \ldots (z-a_t)^{h_t}}.$$

Si ottengono così le formule

$$(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = z \qquad Y = \mathfrak{p}'(u \,|\, \omega\,\omega') \\ X = H_\nu [\mathfrak{p}_\nu(u)] \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1} (z-a_2)^{h_2} \ldots (z-a_t)^{h_t}} \\ = \left\{ \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \varepsilon^\lambda \mathfrak{p}_\nu(u+\lambda\omega_\nu) \right\} \sqrt[n]{(z-a_1)^{h_1} (z-a_2)^{h_2} \ldots (z-a_t)^{h_t}} \\ h_i < n, \quad \sum_1^t h_i \equiv 0 \pmod n \quad \nu = \infty, 0, 1, \ldots n-1 \\ \varepsilon^n = 1, \qquad \varepsilon \neq 1, \\ \omega_\nu = \omega \qquad \text{per} \qquad \nu = \infty, \\ \omega_\nu = \omega' \qquad \text{per} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots n-1, \end{array} \right.$$

che rappresentano superficie *irriducibili*, perchè i due fattori H_ν e $\sqrt[n]{\;}$, che entrano in X, sono ugualmente determinati a meno di una moltiplicazione per ε^λ, diguisachè i rami della funzione possono essere scambiati tra loro, tenendo fermo z, e variando u, o reciprocamente.

Le formule (I) *dànno i tipi delle superficie ellittiche di determinante primo n, rappresentate sopra il cilindro ellittico n-plo*

$$x = \mathfrak{p}(u), \qquad y = \mathfrak{p}'(u).$$

Le formule (I), per $t = 2$, rappresentano, come già si è osservato, una superficie con un fascio di curve C di genere 0, riferibile quindi ad un *nuovo* cilindro ellittico; per $t > 2$ ci dànno superficie ellittiche, con un fascio di C irrazionali, che perciò non sono riferibili a rigate.

In luogo di combinare le formule (1), (2), possiamo combinare nel medesimo modo le (1), (2'); otteniamo *così i seguenti tipi di superficie ellittiche equivalenti a quelli rappresentati dalle formule* (I):

$$
(\mathrm{I}') \qquad \left\{ \begin{array}{c} Z = z, \qquad Y = z \\ X = \sqrt[n]{f_\nu(xy)\cdot(z - a_1)^{h_1} \dots (z - a_t)^{h_t}} \\ h_i < n, \quad \sum h_i \equiv 0 \pmod n \\ \varphi(xy) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0. \end{array} \right.
$$

Osserviamo che è lecito di sostituire nelle (I') f_ν^λ, con $\lambda < n$, ad f_ν, sostituendo in pari tempo λh_i ad h_i; ciò corrisponde ad eseguire la trasformazione della superficie, che si ottiene ponendo $\overline{X} = X^\lambda$.

È pur lecito, dopo eseguito il cambiamento indicato, di sostituire agli esponenti λh_i, i rispettivi resti rispetto al modulo n, ciò che equivale ad una nuova trasformazione della superficie.

§ 7.

Caso in cui il determinante sia un numero composto.

Vediamo ora come la costruzione delle superficie ellittiche il cui determinante n sia un numero composto, si riduca a quello già trattato.

Sia p. es.

$$n = pq,$$

dove p e q sono numeri primi.

Una superficie ellittica F di determinante n si lascia rappresentare sopra un'altra superficie ellittica F', contata p volte, e questa alla sua volta sul cilindro φ contato q volte.

Riferendoci alle formule (I') del precedente §, si ottengono quindi facilmente i tipi delle superficie ellittiche di determinante

$$n = pq$$

mediante equazioni della forma:

$$Z = z, \qquad Y = y,$$

$$X = \sqrt[p]{(z - a_1)^{s_1} \dots (z - a_i)^{s_i} \psi(xy) \sqrt[q]{(z - a_{i+1})^{h_{i+1}} \dots (z - a_t)^{h_t} f(xy)}},$$

$$\varphi(xy) = y^2 - 4x^3 - g_2 x - g_3 = 0,$$

dove $f = 0$ e $\psi = 0$ sono due curve aventi con $\varphi = 0$ dei contatti rispett. q-punti e p-punti.

Sostituendo, nelle formule precedenti, ψ^q a ψ, ed eseguendo le sostituzioni corrispondenti sugli esponenti, secondo ciò che abbiamo avvertito in fine al precedente §, le formule suddette si riducono alla forma

$$\text{(II)} \qquad \left\{ \begin{array}{c} Z = z, \qquad Y = y \\ X = \sqrt[n]{(z - a_1)^{h_1} \ldots (z - a_t)^{h_t} \psi(xy) . f(xy)} \\ \varphi(xy) = 0 \\ x = pq, \quad h_i < n, \quad \sum h_i \equiv 0 \pmod{n}. \end{array} \right.$$

Le formule (II) sono affatto analoghe alle (I') e lasciano scorgere immediatamente l'estensione al caso in cui il determinante n abbia più di due fattori primi.

Giova avvertire che, essendo n un numero composto, si presenta una distinzione relativa all'*ordine* delle curve di diramazione

$$z = a_i$$

del cilindro n-plo φ. Per es. nel caso:

$$n = pq,$$

la $z = a_i$ avrà l'ordine n se h_i è primo con n, ed invece avrà l'ordine

$$r_i = p \quad \text{se} \quad h_i \equiv 0 \pmod{q}$$
$$r_i = q \quad \text{se} \quad h_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

§ 8.

I plurigeneri delle superficie ellittiche e le condizioni perchè una superficie possa trasformarsi in una rigata.

Proponiamoci ora di determinare il genere p_g ed i plurigeneri P_2, $P_3, \ldots,$ delle superficie ellittiche F di determinante $n > 1$, in cui le traiettorie del gruppo G formano un fascio razionale; il primo resultato di questa determinazione sarà che

$$p_g = 0,$$

come già abbiamo annunziato.

Il calcolo di $p_g = P_1$, e in generale dei plurigeneri P_i di F, si può compiere valendosi della rappresentazione indicata di F sopra un cilindro ellittico n-plo

$$\varphi(xz) = 0.$$

Moviamo perciò dal seguente LEMMA *). — Due superficie φ, F sieno in corrispondenza $[1, n]$, per modo che si abbia su φ una curva di diramazione D_1; sia L_1 una curva di φ ed L'_1 una curva aggiunta ad L_1; ad L_1, L'_1 (contate ciascuna n volte) corrispondano su F due curve, che indichiamo rispett. con L, L', e alla D_1 (presa semplicemente) corrisponda su F una curva (di coincidenza) D; allora la curva

$$L' + D$$

è aggiunta alla

$$L$$

sopra la superficie F.

Per dimostrare l'enunciato, si avverta anzitutto come esso si giustifichi quando L_1 appartenga ad un sistema lineare $|L_1|$, ∞^2 almeno, non contenente ∞^1 curve spezzate. Infatti allora, la stessa condizione venendo soddisfatta per $|L|$, le curve aggiunte alle L su F, sono definite dalla proprietà di segare gruppi canonici sulle L stesse, e questa proprietà spetta appunto alle curve $L' + D$, in forza di un teorema di CASTELNUOVO **).

Si passa poi al caso in cui la precedente restrizione non sia soddisfatta, valendosi della proprietà fondamentale delle curve aggiunte.

Applichiamo il lemma anzidetto, alla corrispondenza $[1, n]$ tra il cilindro φ e la superficie ellittica F. La curva di diramazione D_1, su φ, è costituita dalle sezioni piane

$$z = a_1, \qquad z = a_2, \ldots z = a_t,$$

dove si può supporre

$$t \geqq 3,$$

escludendo il caso in cui la F sia riferibile ad un nuovo cilindro semplice.

La curva

$$z = a_i,$$

deve essere contata, come facente parte di D_1, $r_i - 1$ volte, se r_i de-

*) Questo lemma generalizza la relazione fra i sistemi canonici di due superficie in corrispondenza $[1, n]$ da me stabilita nelle *Ricerche di Geometria sulle superficie algebriche,* cap. VI (Memorie Acc. Torino, 1893). In un altro senso, assai notevole, quella relazione è stata estesa dal sig. SEVERI (Rendic. Istituto Lombardo, 1903).

**) Atti Accad. dei Lincei, 1891.

signa l'*ordine* di essa, se cioè ad ogni suo punto corrispondono su $F \frac{n}{r_i}$ punti distinti, ciascuno dei quali è un punto di coincidenza r_i-plo. Perciò, designando genericamente con K, le curve ellittiche di F che corrispondono alle sezioni piane

$$z = \text{cost.}$$

di φ (contate n volte), potremo designare la curva D col simbolo:

$$D = \sum_{i=1}^{i=t} \frac{K_i}{r_i}(r_i - 1),$$

dove le K_i sono particolari curve del fascio

$$|K_i| = |K|.$$

Ciò posto si consideri una curva L di F rappresentata sul cilindro n-plo φ da due sezioni piane $z = \text{cost.}$ e da un certo numero di generatrici $x_1, x_2, \ldots x_s$.

Il sistema aggiunto $|L'|$ (all'infuori di eventuali componenti eccezionali fisse, rappresentate da punti di φ o dalle generatrici all'infinito) resta definito dalla curva che ha per immagine su φ

$$D_1 + x_1 + x_2 + \cdots + x_s.$$

Segue di qui, che se si considerano su F le curve ellittiche K (del fascio razionale), il sistema $|2K|$ ammette come sistema aggiunto quello definito dalla curva:

$$D = \sum_i \frac{K_i}{r_i}(r_i - 1).$$

Ma, stante la supposta irriducibilità delle K generiche, ciascuna delle curve $\frac{K_i(r_i - 1)}{r_i}$ appartiene ad un sistema lineare completo di dimensione 0, cioè nessuna di esse può variare in un fascio; e, poichè codeste curve non s'incontrano fra loro, anche la D (composta di t parti sconnesse) appartiene ugualmente ad un sistema lineare di dimensione 0, il quale non può dunque contenere $|2K|$. Resta così provato che *il genere*

$$p_g = 0.$$

Collo stesso metodo si può cercare se esista e quale sia in generale il sistema m canonico di F (di dimensione $P_m - 1$).

Esso viene rappresentato dal simbolo

$$\left| \sum_{i=1}^{i=t} \frac{m K_i (r_i - 1)}{r_i} - 2mK \right|.$$

Se dunque esistono ∞^d curve m canoniche,

$$d = P_m - 1 > 0,$$

queste si comporranno di d curve K e di una curva fissa, composta delle $\frac{K_i}{r_i}$ prese un certo numero h_i di volte:

$$\sum_1^t \frac{h_i K_i}{r_i},$$

dove

$$0 \leqq h_i < r_i.$$

Pertanto avremo

$$\left|\sum_1^t \frac{m K_i (r_i - 1)}{r_i} - 2mK\right| = \left|dK + \sum_1^t \frac{h_i K_i}{r_i}\right|,$$

cioè

$$|mtK - 2mK - dK| = \left|\sum_1^t \frac{m + h_i}{r_i} K_i\right|,$$

$$|[m(t-2) - d]K| = \left|\sum_1^t \frac{m + h_i}{r_i} K_i\right|.$$

Una siffatta relazione porta che $\frac{m + h_i}{r_i}$ sia un numero intero ρ_i, tale che

$$\frac{m}{r_i} \leqq \rho_i < \frac{m}{r_i} + 1,$$

ed allora si ha

$$m(t-2) - d = \sum_1^t \rho_i,$$

$$d = P_m - 1 = m(t-2) - \sum_1^t \rho_i.$$

Il numero $-\rho_i$ è l'intero che immediatamente precede, in ordine di grandezza algebrica, la frazione $-\frac{m}{r_i}$; esso può quindi designarsi, secondo l'uso, con

$$-\rho_i = \left[\frac{-m}{r_i}\right].$$

Allora la formula precedente si scrive:

$$P_m = 1 + m(t-2) + \sum_1^t \left[\frac{-m}{r_i}\right].$$

Questa formula dà l'espressione dello m genere P_m della superficie ellittica F, in quanto si prenda $P_m = 0$ tutte le volte che il secondo membro risulti negativo.

Per $m = 1$, si ha

$$P_1 = p_g = 0,$$

mentre la formula precedente darebbe il valore del genere aritmetico

$$p_a = -1.$$

Per $m = 2$, si ha

$$\left[\frac{-2}{r_i}\right] = -1 \qquad (r_i \geqq 2),$$

quindi *il bigenere vale*

$$P_2 = t - 3,$$

e si ha

$$P_2 > 0, \qquad \text{per} \qquad t > 3.$$

Risulta anche

$$P_m > 0$$

per ogni valore di $m > 2$.

Calcoliamo ora i primi plurigeneri in corrispondenza al valore minimo di t:

$$t = 3.$$

(Per $t = 2$, come abbiamo detto, la superficie F è riferibile ad una rigata ellittica, e naturalmente la formula dà sempre

$$P_m = 0).$$

Designando con $\pi\,(> 0)$ il genere delle curve C, rappresentate dalle generatrici n-ple di φ, si ha

$$\sum_1^t \frac{n(r_i - 1)}{r_i} = 2n + 2\pi - 2,$$

quindi

$$n\left\{\sum_1^t \frac{r_i - 1}{r_i} - 2\right\} \geqq 0,$$

$$\sum_2^t \frac{r_i - 1}{r_i} \geqq 2.$$

La sommatoria contiene nel nostro caso tre termini; sviluppando la diseguaglianza che precede si ha

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leqq 1.$$

In corrispondenza alle soluzioni di questa diseguaglianza, prendendo

$$r_1 \leqq r_2 \leqq r_3,$$

si trova:

a) per $r_1 = 2$, $(r_2 \geqq 3)$

$$P_2 = P_3 = 0,$$

ed inoltre

$$P_4 = P_5 = 0, \qquad P_6 = 1 \qquad (r_2 = 3, \ r_3 \geqq 6),$$

oppure

$$P_4 = 1 \qquad (r_3 \geqq r_2 \geqq 4);$$

b) per $r_1 = 3$ $(r_2 \geqq 3)$

$$P_2 = 0, \qquad P_3 = 1, \qquad P_6 \geqq 1;$$

c) per $r_1 \geqq 4$ $(r_3 \geqq r_2 \geqq r_1 \geqq 4)$

$$P_2 = 0, \qquad P_3 = 1, \qquad P_4 = 2, \qquad \text{ecc.}$$

Risulta di qui la conseguenza importante che « per ogni superficie ellittica non riferibile ad una rigata, si ha sempre

$$P_4 > 0 \qquad \text{o} \qquad P_6 > 0 \text{ ».}$$

I resultati precedenti ci permettono quindi di affermare che: *le condizioni perchè una superficie sia riferibile ad una rigata di genere* $p \geqq 1$, *sono*

$$P_4 = P_6 = 0, \qquad p_a = -p.$$

Ora osserviamo che, se

$$P_4 = P_6 = 0,$$

segue

$$p_g = P_2 = 0, \qquad p_a \leqq 0;$$

ma, nel caso $p_a = 0$, l'annullarsi del bigenere P_2 dà la condizione di razionalità (Castelnuovo); pertanto si ha il teorema generale seguente:

Le condizioni perchè una superficie algebrica sia riferibile ad una rigata (razionale o nò) sono espresse dall'annullarsi del quadrigenere e del sestigenere :

$$P_4 = P_6 = 0.$$

§ 9.

Superficie di bigenere zero.

La discussione aritmetica accennata nel precedente § permette di ottenere tutti *i tipi di superficie di bigenere zero, non appartenenti alla famiglia delle rigate* ($P_4 > 0$ o $P_6 > 0$ e quindi, in ogni caso, $P_{12} > 0$).

Queste superficie sono rappresentate sul cilindro ellittico n-plo $\varphi = 0$, con tre sezioni piane di diramazione

$$z = a_1, \qquad z = a_2, \qquad z = a_3,$$

aventi certi ordini r_1, r_2, r_3, divisori di n; i numeri r_1, r_2, r_3 soddisfano alle diseguaglianze

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \leqq 1,$$

$$2 \leqq r_1 \leqq r_2 \leqq r_3,$$

$$n\left(1 - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3}\right) = 2\pi - 2,$$

dove si designa con π ($\geqq 1$) il genere delle curve del fascio ellittico, aventi come immagini le generatrici di φ.

Si hanno 4 *famiglie* di superficie che possono distinguersi secondo i valori dei primi plurigeneri, come indica il seguente quadro, nel quale vengono completati i resultati già esposti nel prec. §:

$$P_2=0\begin{cases} P_3=0\begin{cases} P_4=0, & P_5=0, & P_6=1, & (r_1=2, r_2=3, r_3\geqq 6) \\ P_4=1, & P_5=0, & P_6=0,1,2, & (r_1=2, r_2=4, r_3\geqq 4) \end{cases} \\ P_3=1\begin{cases} P_4=0,1, & P_5=0,1,2, & P_6=1,2,3, & (r_1=3, r_2\geqq 3, r_3\geqq r_2) \\ P_4=2, & P_5=0,1,2, & P_6=1,2,3, & (r_1\geqq 4, r_3\geqq r_2\geqq r_1). \end{cases} \end{cases}$$

A ciascuna delle prime tre famiglie appartengono superficie con un fascio ellittico di curve ellittiche ($\pi = 1$), il cui determinante n è un numero qualunque della forma

$$n = 6m \qquad (r_1 = 2,\ r_2 = 3,\ r_3 = 6)$$

o rispettivamente

$$n = 4m \qquad (r_1 = 2,\ r_2 = r_3 = 4),$$

$$n = 3m \qquad (r_1 = r_2 = r_3 = 3).$$

In ogni famiglia trovansi poi superficie con un fascio ellittico di curve di genere $\pi > 1$ e determinante n dove $2\pi - 2$ è il prodotto di $1 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)$ per un numero intero

$$n = \frac{2\pi - 2}{1 - \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right)}.$$

Fra le superficie corrispondenti a $\pi = 1$ notiamo in particolare quelle con un fascio ellittico di curve armoniche o equianarmoniche. Le prime (corrispondentemente al caso del determinante massimo $n = 8$) si presentarono al sig. Castelnuovo ed a me fino dal 1900, come « rigate ellittiche del 4° ordine doppie, con una curva di diramazione L_4 di ordine 8, quadrisecante le generatrici ».

In generale una rigata ellittica del 4° ordine $\varphi_4(xyz) = 0$, non contiene una curva (ellittica) L_m, d'ordine $2m$, m-secante le generatrici La condizione perchè ciò accada si può esprimere nel modo seguente: sia u l'integrale ellittico (coi periodi ω, ω') appartenente alla rigata; la somma dei valori di u per le generatrici uscenti da un punto di una direttrice è costante; essa può supporsi $\equiv 0$ per una delle due direttrici, $\equiv \chi$ per l'altra. Allora l'esistenza della curva L_m è data dalla condizione

$$m\chi \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega,\ \omega').$$

Ora per qualunque valore di m si può ottenere una rigata φ_4 possedente una curva L_m irriducibile; ma resta a vedere quando possa costruirsi effettivamente una superficie rappresentata sulla φ_4, multipla secondo un dato numero, in guisa che L_m sia la curva di diramazione.

Prendendo

$$\chi = \frac{\omega}{4},$$

si vede che per la L_4 (di 8° ordine) passano infinite superficie del 4° ordine secanti φ_4 in gruppi di 8 generatrici

$$u, \quad -u, \quad -u + \frac{\omega}{4}, \quad u - \frac{\omega}{4},$$
$$-u + \frac{\omega}{2}, \quad u + \frac{\omega}{2}, \quad -u + \frac{3\omega}{4}, \quad u - \frac{3\omega}{4};$$

quindi, facendo

$$u = 0,$$

si trova una superficie quartica

$$\psi_4(xyz) = 0$$

secante φ_4 secondo L_4 e tangente ad essa secondo 4 generatrici. Allora la superficie

$$X = x, \qquad Y = y, \qquad Z = z, \qquad U = \sqrt{\psi_4}$$
$$\varphi_4(xyz) = 0,$$

dello spazio S_4, viene rappresentata sulla φ_4 doppia colla curva di diramazione L_4.

Si ottiene un altro esempio (che pure avevamo effettivamente costruito) prendendo

$$\chi = \frac{\omega}{6};$$

esiste allora una superficie rappresentata doppiamente su φ_4, che possiede un fascio ellittico di curve di genere due, ecc.

La questione generale, d'esistenza delle φ_4 p-ple con curva di diramazione L, composta in generale di s m-secanti da contarsi ciascuna secondo l'ordine p, resta ormai decisa implicitamente dai resultati precedenti; le superficie ellittiche che così si ottengono corrispondono al caso particolare

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_s = p,$$

$$r_{s+1} = r_{s+2} = m,$$

dove il determinante

$$n = mp.$$

Bologna, 3 marzo 1905.

F. Enriques.