

Ueber die richtige Werthbestimmung der Constante des Integrallogarithmus.

(Von Herrn *L. Oettinger* zu Freiburg i. B.)

Die Constante des Integrallogarithmus und der harmonischen Reihe hat bekanntlich denselben Werth. Dennoch werden hierfür von *Mascheroni*, *Gauss*, *Soldner* u. A. verschiedene Werthe angegeben. *Euler* (Act. Acad. Scient. Petrop. p. A. 1781 P. II, pg. 45 et sqq.) giebt folgenden an

$$C = 0,5772156649015325,$$

Mascheroni (Adnot. ad *Euleri* calc. integr., welches Werk mir aber nicht zugänglich ist, weswegen ich auf *Lacroix* Traité d. calc. diff. et int. T. III, Pg. 521 und auf *Bessels* Aufsatz (Königsberger Archiv S. 4) verweise)

$$C = 0,57721566490153286061811209008239,$$

Soldner (Théor. d'une nouv. fonct. transc. Munic. 1809, pg. 13)

$$C = 0,5772156649015328606065,$$

Gauss (Comm. soc. reg. Scient. Gott. rec. V. II ad. A. 1811–13 T. II, p. 36)

$$C = 0,57721566490153286060653.$$

Ausserdem findet sich dort folgender, auf seine Aufforderung von *Fr. B. G. Nicolai* doppelt berechneter Werth

$$C = 0,5772156649015328606065120900824024310421.$$

Bretschneider giebt in diesem Journal Bd. 17, S. 260 den von *Mascheroni* mitgetheilten Werth mit der Bemerkung an, dass er von *Kramp* aufgefunden sei, ohne den Ort, wo er sich findet, zu bezeichnen.

Euler, *Soldner* und *Gauss* haben den Werth aus der Summe der 10 ersten Glieder der harmonischen Reihe berechnet, *Mascheroni* aus den 100 ersten, *Nicolai* doppelt aus den 50 und 100 ersten Gliedern. Die Gleichung, welche zur Rechnung dient, ist bekanntlich

$$(1.) \quad C = S_n - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4.n^4} + \frac{B_3}{6.n^6} - \frac{B_4}{8.n^8} + \dots,$$

wenn $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ und $B_1, B_2, B_n \dots$ die *Bernoullischen* Zahlen bezeichnen.

Die Werthberechnung ist mit grosser Mühe verbunden, weil man die Summe der ersten 100 Glieder der harmonischen Reihe darzustellen hat, um mit Sicherheit eine Entscheidung geben zu können. Die Arbeit lässt sich jedoch nach folgender Methode sehr abkürzen.

Bezeichnet man die Summe der n ersten ungeraden Glieder der harmonischen Reihe durch

$$S_{1,2n-1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

und die der n ersten geraden durch $\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}$, so hat man folgende Beziehungen

$$(2.) S_{2n} = S_{1,2n-1} + \frac{1}{2}S_n \quad \text{und} \quad (3.) S_{2n+1} = S_{1,2n+1} + \frac{1}{2}S_n.$$

Nach diesen Gleichungen reducirt sich die Summirung der 100 ersten Glieder der Reihe nahe zu auf die Hälfte der Arbeit. Man kann nämlich von den sechs ersten Gliedern (S_6) und den 6 ersten ungeraden ($S_{1,11}$) auf S_{12} , hierauf nach N°. 3 auf S_{25} , und dann nach N°. 2 auf S_{50} und S_{100} übergehen. Die Rechnung wird dadurch erleichtert, dass nur wenige Glieder auf Decimalbrüche von sehr grossen Perioden führen.

Da bisher die Summen, worauf die Glieder der harmonischen Reihe führen, mit Ausnahme von S_{10} , so viel mir bekannt, nicht mitgetheilt sind, so sollen folgende, auf 42 Stellen berechnet, hier stehen, wodurch Gelegenheit geboten ist, die Richtigkeit der von mir gefundenen Resultate mit geringer Mühe nach N°. 1 prüfen zu können

$$(4.) \begin{cases} S_{10} = 2,928968253968253\dots, \\ S_{20} = 3,597739657143681911483769068908387793836711, \\ S_{25} = 3,815958177753506869134813676474734490618190, \\ S_{50} = 4,499205338329425057560471792964769091970601, \\ S_{100} = 5,187377517639620260805117675658253157908971. \end{cases}$$

Hieraus habe ich nach N°. 1 folgende Werthe durch die Summe der 10, 20, 50 und 100 ersten Glieder der Reihe gefunden

$$(5.) \begin{cases} C = 0,577215664901532860581 \\ C = 0,577215664901532860606512083 \\ C = 0,577215664901532860606512090082402419 \\ C = 0,577215664901532860606512090082402431042155. \end{cases}$$

Der erste Werth ist auf 18, der zweite auf 25, der dritte auf 34, der letzte auf 40 Stellen richtig. Die vorliegenden Werthe stimmen bei vierfacher Rechnung unter sich und mit den von *Gauss*, *Soldner* und *Nicolai* berechneten überein. Hiervon weicht der von *Mascheroni*, *Bessel*, *Lacroix* und der in diesem Journal angegebene in der 20—22 Stelle ab. Er ist daher wohl als unrichtig zu bezeichnen.

Freiburg, im October 1861.