
ANNALEN

DER PHYSIK UND CHEMIE.

JAHRGANG 1828, SIEBENTES STÜCK.

I. *Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung der elastischen Körper; von Hrn. Poisson.*

(*Ann. de chim. et de phys.* XXXVII. p. 337.)

Das Problem der *Kettenlinie* ist das erste, in welchem die Mathematiker das Gleichgewicht einer biegsamen Curve behandelt haben; denn es besteht, wie bekannt, in der Bestimmung der Curve, welche eine schwere an ihren beiden Enden gehaltene Kette annehmen muß. Die Lösung desselben, bei welcher Galilaei sich geirrt hatte, verdankt man Leibnitz und den Bernoulli's; gegenwärtig ist sie in alle Lehrbücher der Mechanik übergegangen. Sie gründet sich auf die Betrachtung einer Kraft von unbekannter Gröfse, welche nach den beiden Verlängerungen eines jeden Elements der Curve wirkt, und welche man die *Spannung* der Kette in jedem Punkte nennt. Man setzt dabei die Kette als völlig biegsam voraus. In einem andern Probleme, nämlich dem der *elastischen Lamelle*, hat man zum ersten Male die Tendenz, mit der eine aus einem elastischen Stoffe gebildete Curve ihre natürliche Gestalt wieder anzunehmen sucht, in Rechnung gezogen. Die Lösung desselben hat Jacob Bernoulli zu Anfange des vorigen Jahrhunderts gegeben, in einer Abhandlung, die sich in den ältern Denkschriften der Pariser Academie befindet. Er stützt sich

dabei auf einen Satz, der in der Folge von allen Mathematikern, welche diese Aufgabe behandelt haben, angenommen worden ist. Jacob Bernoulli nämlich nimmt an, daß bei einer im Gleichgewicht befindlichen elastischen Lamelle das Moment der Kraft, welche zwei an einander liegende Elemente in eine gerade Linie zurückzuführen sucht, in jedem Punkte der Curve direct dem Winkel der Contingenz, oder umgekehrt dem Krümmungshalbmesser proportional sey. Um den Grund dieser Hypothese einzusehen, muß man mit diesem großen Mathematiker die verschiedenen Fäden einer gebogenen Lamelle betrachten, und Rücksicht nehmen auf die Contractionen der einen und die Dilatationen der andern. Diese kleinen Längenveränderungen geben wirklich zu longitudinalen Kräften Anlaß, die ihnen proportional sind, und deren Resultante Null ist, wenn die mittlere Ausdehnung der Lamelle es gleichfalls ist. Das totale Moment derselben ist aber nicht gleich Null; seinen, dem Winkel zwischen zwei zusammenliegenden Elementen der Curve proportionalen Werth findet man, wenn man als Erfahrungssatz annimmt, daß eine Gerade, welche nach der Dicke der Lamelle gezogen, und ursprünglich senkrecht auf deren Fläche steht, noch nach der Biegung der Lamelle immer perpendicular auf derselben bleibt. Durch die Zerlegung der Lamelle in longitudinale Fäden findet man auch, daß das Moment der elastischen Kraft, bei Gleichheit aller übrigen Umstände, proportional ist dem Cubus der Dicke.

Den Aufgaben über das Gleichgewicht der Saiten und elastischen Lamellen sind natürlich die gefolgt, welche deren Bewegung betreffen, und besonders deren kleine Vibrationen, von denen die verschiedenen, durch sie hervorgebrachten Töne abhängen. D'Alembert war der erste, welcher das Problem von den *schwingenden Saiten* auf eine allgemeine Weise löste; Taylor hatte zuvor nur eine particuläre Lösung von demselben gegeben.

Dieſs Problem iſt eines von denen, welches zur Entſtehung der Rechnung mit partiellen Differentialien Anlaß gegeben hat. Die von d'Âlembert gegebene Löſung gründet ſich auf directe Integration einer ſolchen Gleichung und auf die Betrachtung der willkührlichen Functionen, welche ſein Integral einſchließt. Lagrange hat einige Jahre hernach eine andere Löſung deſſelben Problems gegeben, welche in der jüngſten Zeit die Aufmerkſamkeit der Mathematiker auf's Neue auf ſich gezogen hat. Die willkührlichen Functionen ſind darin durch Reihen von periodiſchen Gröſſen erſetzt, welche deren Werthe für die ganze Länge der Saite vorſtellen, es mögen nun in dieſem Intervalle dieſe Functionen ihre Form nicht ändern, oder es mag ſich um diſcontinuirliche Functionen handeln. Nun giebt es in der Phyſik und Mechanik eine groſſe Anzahl von Aufgaben, bei welchen die Gleichungen mit partiellen Differentialien, von welchen ſie abhängen, nicht unter einer endlichen Form integrirt werden können; man iſt alſo genöthigt zu Löſungen analog mit der Lagrange'schen, welche überdieß die ganze von der Aufgabe verlangte Allgemeinheit beſitzen, und oft bequemer ſind, als die, welche ſich aus den Integralen unter endlicher Form ergeben, in Fällen, wo dieſe uns gegeben ſind. Auf dieſe Weiſe finden ſich die Unbekannten, um deren Beſtimmung es ſich handelt, ausgedrückt durch Summen von Gröſſen, von denen jede für ſich allen Bedingungen des Problems genügt, und eine particuläre Löſung deſſelben iſt. Bei den Aufgaben in der Mechanik iſt dieſe Superpoſition von particulären Löſungen nichts anders, als der Satz von Daniel Bernoulli über die *Coëxiſtenz von kleinen Schwingungen*, und eine Folge der Linearform der Gleichungen von jedem Problem. Die Methode, welche dieſer Mathematiker ſeinerſeits befolgt hatte, um, ausgehend von der particulären Löſung, welche man Taylor verdankt, das Problem von den ſchwingenden Saiten zu löſen, beruht alſo mit der La-

grange'schen Lösung auf demselben Principe. Bernoulli zeigte aber nicht, wie man durch Reihen von periodischen Gröfsen den, ganz willkürlich vorausgesetzten, anfänglichen Zustand der Saite darstellen könne, und darin ist die Analyse von Lagrange wesentlich nöthig, um die Auflösungen von Taylor und D. Bernoulli zu vervollständigen.

Die Schwingungen der elastischen Lamellen sind von Euler und D. Bernoulli bestimmt worden, für alle möglichen Umstände, worin die Enden der schwingenden Lamelle sich befinden können. Ihre Lösungen sind ebenfalls gebildet aus der Superposition einer beliebigen Anzahl von particulären Lösungen, und es fehlt denselben der Beweis, wie sie immer den anfänglichen Zustand der Lamelle darstellen können. Diefs hat indess keinen Einfluß auf die Gesetze der Schwingungen, welche sie daraus abgeleitet haben; diese stimmen mit denen überein, welche die Physiker durch Versuche gefunden haben.

Diefs sind, in wenig Worten, die Hauptresultate über das Gleichgewicht und die Bewegung der elastischen Körper, welche zur Zeit bekannt waren, als ich, in einer 1814 im Institute gelesenen *Abhandlung über die elastischen Flächen* weiter zu gehen versuchte. Ich habe angenommen, dafs die Punkte einer elastischen, beliebig gekrümmten Scheibe sich gegenseitig abstofsen nach einer Function des Abstandes, die schnell abnimmt, und unmerklich wird, sobald die Variable eine merkliche Gröfse erreicht. Diese Hypothese hat mich hinsichtlich des Gleichgewichts elastischer Flächen zu einer Gleichung geführt, welche gleiche Form annimmt mit der für eine blofse, in einer Richtung gekrümmten Lamelle, wenn man sie auf diesen besondern Fall anwendet. Allein diese Art, die Aufgabe zu betrachten, paßt streng genommen nur auf eine Scheibe ohne Dicke, in welcher die materiellen Punkte an einander stofsen oder sehr wenig von einander entfernt sind. Wenn man dagegen auf die Dicke

der gekrümmten Scheibe Rücksicht nimmt, so sind unter deren Theilchen zweierlei Arten zu unterscheiden. Die einen stoßen sich wirklich ab, vermöge der Contraction, die an der concaven Seite statt findet; die andern dagegen ziehen sich an, vermöge der Dilatation auf der gegenüberliegenden Seite. Es war also nöthig, diese Aufgabe von Neuem vorzunehmen; und, damit sie vollständig gelöst sey, mußte man die Bedingungen bestimmen, welche sie, in Bezug auf eine elastische Platte von gegebener Dicke, sowohl in allen deren Punkten, als besonders an deren Rändern zu erfüllen hatte, damit die auf dieselbe angelegten Kräfte und die gegenseitigen Actionen ihrer Theilchen im Gleichgewicht seyen. Auch war es wünschenswerth, daß die Mathematiker die Hauptaufgaben der Mechanik unter diesem physikalischen und mit der Natur übereinstimmenden Gesichtspunkt wieder vornähmen. Man hat sie auf eine ganz abstracte Weise behandeln müssen, um die allgemeinen Gesetze des Gleichgewichts und der Bewegung zu entwickeln, und in dieser Gattung von Allgemeinheit und Abstraction ist Lagrange so weit als nur denkbar gegangen, als er die physischen Bindemittel der Körper durch Gleichungen zwischen den Coordinaten ihrer verschiedenen Punkte ersetzte. Diels ist es, was seine *Mécanique analytique* ausmacht; aber neben diesem bewundernswürdigen Werke könnte man gegenwärtig eine *Mécanique physique* aufstellen, deren einziger Zweck darin bestünde, Alles auf Molecular-Actionen zu beziehen, welche die Wirkung gegebener Kräfte von Punkt zu Punkt verpflanzen und das Vermittelnde ihres Gleichgewichts sind. Auf diese Weise hätte man, bei Anwendung der allgemeinen Regeln der Mechanik auf besondere Fälle, keine specielle Hypothesen zu machen.

So würde bei dem Probleme des Gleichgewichts von biegsamen Saiten, die Spannung, welche man zu dessen Lösung einführt, das unmittelbare Resultat der gegenseiti-

gen Actionen der Theilchen seyn, sobald diese ein wenig aus ihrer natürlichen Lage gebracht sind.

Bei dem Falle mit der elastischen Lamelle würde das Moment der Elasticität durch Biegung von denselben Actionen, in der ganzen Dicke der Lamellen betrachtet, herrühren, und sein Ausdruck wäre ohne irgend eine Hypothese bestimmt.

Endlich würde der Druck, welchen die Flüssigkeiten in ihrem Inneren und gegen die Wände der Gefäße ausüben, ebenfalls die Resultante seyn von den Actionen ihrer Theilchen auf die gedrückten Flächen oder vielmehr auf eine unendlich dünne, mit jeder Fläche in Berührung stehende, flüssige Schicht.

Der Satz von der Gleichheit des Drucks nach allen Richtungen, welcher gegenwärtig der ganzen Hydrostatik zum Grunde liegt, und welcher von der Erfahrung entlehnt ist, wird wirklich eine Folgerung seyn dieser Kenntniß des Molecular-Drucks und der vollkommenen Beweglichkeit der flüssigen Theilchen. Man ziehe nämlich durch einen beliebigen Punkt *A* einer flüssigen Masse eine Gerade, beliebig klein, aber dennoch sehr groß in Bezug auf die Abstände zwischen den Theilchen und auf den Radius ihres Wirkungskreises, so daß diese Gerade eine sehr große und gleichsam unendliche Anzahl materieller Punkte treffen würde. Nun nehme man an, daß diese Zahl beinahe gleich sey nach allen Richtungen um den Punkt *A*; eine Bedingung, welche hinreichen wird, damit der Druck, wie wir ihn so eben definirten, ebenfalls nach allen Richtungen um denselben Punkt gleich sey. Wenn man nun, dieß vorausgesetzt, auf einen freien Theil der Oberfläche der Flüssigkeit einen beliebigen Druck ausübt, so werden sich die Theilchen derselben einander nähern, und, wie es einer flüssigen Masse als Hauptverschiedenheit von einem starren elastischen Körper eigen ist, werden sich die flüssigen Theilchen, vermöge ihrer vollkommenen Beweglichkeit, rings um jeden

Punkt A so lagern, wie wir es eben angenommen haben. Daraus geht hervor, daß der Molecular-Druck in Folge des Aneinanderrückens der Theilchen erhöht wird, ohne daß er dabei aufhört gleich zu seyn, nach allen Richtungen um jeden Punkt der flüssigen Masse. Der Grad der Zusammendrückbarkeit hat keinen Einfluß auf diese Folgerung; die Flüssigkeit braucht nur in einem ganz beliebig schwachen Grade zusammendrückbar zu seyn; und dieß ist ja auch wirklich der Fall, selbst bei denjenigen Flüssigkeiten, deren Volumen gegen äußere Kräfte am meisten Widerstand leistet. Jener Schluss hängt auch nicht von dem kleinen Zeitraum ab, innerhalb welches die Theilchen in die, von der Gleichheit des Drucks nach allen Seiten geforderte, Lage um den Punkt A gerathen. Obgleich aber dieser Zeitraum sehr kurz und ohne Zweifel bei den vollkommenen Flüssigkeiten, bei denen man diese Gleichheit des Drucks beobachtet hat, un wahrnehmbar ist, so kann er dennoch sehr verschieden bei verschiedenen Flüssigkeiten seyn. Diese Verschiedenheit hat nun zwar keinen Einfluß auf das Gleichgewicht, welches sich nach Ablauf des erwähnten Zeitraums einstellt; wird dieß aber auch bei der Bewegung einer Flüssigkeit der Fall seyn? Diese Frage werden wir bei einer andern Gelegenheit untersuchen.

Ueberhaupt muß man bei den Anwendungen der Mechanik so viel wie möglich Rücksicht nehmen auf die physischen Umstände, welche von der Natur der Körper abhängen. Die Nothwendigkeit dazu hat man schon lange gefühlt, um die Unbestimmtheit bei gewissen Fragen in der abstracten Mechanik zu verbannen; eine Unbestimmtheit, die in der Natur nicht statt finden kann, wo wirklich Alles bestimmt ist und Alles nur eine einzige Lösung zuläßt.

Das einfachste Beispiel einer solchen Abstraction ist dasjenige, welches der Stoß von harten Körpern darbietet, wenn man dieselben als durchaus unzusammendrück-

bar annimmt. Der Stofs ist alsdann augenblicklich; und die einzige Bedingung, welche man zu erfüllen hat, ist die, dafs bei dem Körper, der vorangeht, die Geschwindigkeit nicht gröfser sey als bei dem, der hinterher folgt. Diese Bedingung, welcher auf unzählige Weisen genügt werden kann, läfst den Zustand der beiden beweglichen Körper nach dem Stofs in Unbestimmtheit. Wenn man aber annimmt, dafs diese Körper zusammendrückbar seyen, wenn auch nur ganz wenig, so hat der Stofs eine gewisse Dauer, und er hört genau in dem Augenblick auf, wo die beiden Körper, vermöge ihrer gegenseitigen Zusammendrückung, zu einer gleichen Geschwindigkeit gelangt sind, und also nicht mehr auf einander wirken. Diese Bedingung der Gleichheit beider Geschwindigkeiten nach dem Stofse, bestimmt vollkommen diejenige, welche die Körper hernach besitzen werden.

Ein anderes Beispiel liefert der Fall, wo ein Gewicht auf einen durch drei Füfse getragenen Tisch gelegt wird. Betrachtet man den Tisch als eine in aller Strenge unbiegsame Ebene, so werden die Lasten, welche seine Füfse zu tragen haben, eine Unendlichkeit verschiedener Werthe haben können, deren Summe dem gegebenen Gewichte gleich ist. Diefs kann nichts Unbegreifliches haben, wenn man erwägt, dafs es sich hier nur um eine blofse Zerlegung von Kräften handelt, und dafs jene Angabe nichts anders sagt, als dafs eine gegebene Kraft auf unendlich verschiedene Weisen in mehr als drei andere, mit ihrer Richtung parallele Kräfte zerlegt werden kann. Dennoch würde die Annahme abgeschmackt seyn, dafs in Wirklichkeit die Belastung eines jeden Fusses mehrere Werthe haben könnte; auch verschwindet diese Unbestimmtheit in der That, sobald man den der Substanz des Tisches zugehörigen Grad von Elasticität und die Biegung, die, sey sie auch noch so klein, derselbe erleidet, in Rechnung zieht. In meiner Abhand-

lung findet man eine Lösung dieses Problems der physikalischen Mechanik für den besonderen Fall, wo eine kreisrunde Platte zugleich in ihrem Mittelpunkt und an ihrem Umfang unterstützt ist, und wo man fragt, nach welchem Verhältniß die Last ihres Gewichts sich unter diese beiden Stützen vertheile. Ich habe für dieses Verhältniß einen bestimmten Werth erhalten, welcher weder vom Durchmesser, noch von der Dicke der Platte, noch auch von dem Grade ihrer Elasticität abhängt, welcher aber verschieden ausfällt, je nachdem der Umfang eingefügt, oder bloß vertical gestützt ist.

Ich komme jetzt zum Hauptgegenstand meiner Abhandlung, wo ich mir besonders vorgenommen habe, die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung elastischer Stäbe und Platten, aus der Betrachtung der gegenseitigen Actionen ihrer Theilchen, zu bilden. Es ist jedoch wichtig zuvor eine Bemerkung zu machen, ohne welche die Berechnung der von dieser Ursache herrührenden Kräfte illusorisch werden würde. In allen den Fällen, in welchen man bis jetzt die Molecular-Action betrachtet hat, z. B. in der Theorie der Capillarität und der Wärme, hat man die Kräfte, welche aus dieser Action entstehen, stets durch bestimmte Integrale ausgedrückt; und doch ist diese Weise sie darzustellen auf sie nicht anwendbar, wie man dieß aus den folgenden Betrachtungen ersehen wird.

Wenn ein Körper sich in seinem natürlichen Zustande befindet, d. h. wenn er durch keine Kraft zusammengedrückt ist, sich im Vacuo befindet, und man selbst von seinem Gewichte absieht, so ist nicht bloß ein jedes Theilchen in seinem Innern und auf seiner Oberfläche im Gleichgewicht, sondern es ist auch, wie man aus meiner Abhandlung ersehen wird, die Resultante der Molecular-Actionen für sich auf beiden gegenüberstehenden Seiten von jedem kleinen Theile des Körpers gleich

Null *). In diesem Zustande müssen die Abstände, welche die Theilchen trennen, von der Art seyn, dafs diese Bedingung erfüllt werde, wenn man auf deren gegenseitigen Attractionen, so wie auf die Wärme-Abstofsung, welche wir gleichfalls mit in die Molecular-Actionen aufnehmen, Rücksicht nimmt. Wie hart und fest ein Körper auch seyn mag, so ist dennoch die Kraft, welche sich der Trennung seiner Theile widersetzt, in dem von uns erwähnten Zustand entweder Null oder gar nicht vorhanden; sie tritt nur erst dann auf, wenn wir diese Trennung auszuführen, und die Abstände zwischen den Moleculen, wenn auch nur ganz wenig, zu ändern suchen. Wenn man nun diese Kraft durch ein Integral auszudrücken sucht, so geschieht es, dafs dessen Werth, welcher für den natürlichen Zustand des Körpers Null ist, es auch nach irgend einer Veränderung in dem Abstände zwischen den Moleculen seyn kann, so dafs demzufolge der Körper bei der Trennung seiner Theilchen keinen Widerstand leisten würde, was eine Ungereimtheit wäre. Es folgt daraus, dafs die Summe, welche die totale Action einer Reihe getrennter Theilchen ausdrückt, sich nicht in ein bestimmtes Integral verwandeln kann, was von der Natur der Function der Abstände herrührt, welche die

*) Man sieht dieses leicht für den Fall eines blofsen, aus einer Reihe von Moleculen gebildeten Fadens. Man theile ihn in Theile, die sehr klein, aber dennoch gegen den Wirkungsradius der Molecule sehr grofs sind, und bezeichne mit $A_0, A_1, A_2, A_3 \dots$ die auf einander folgenden Theilungspunkte. Da, zufolge der Hypothese, kein äufserer Druck auf das Ende A_0 wirkt, so mufs, damit der Theil $A_0 A_1$ im Gleichgewicht sey, die Wirkung des übrigen Fadens auf diesem Theil ebenfalls Null seyn. Die Wirkung von $A_0 A_1$ auf diesen Rest oder auf den Theil $A_1 A_2$ wird es also ebenfalls seyn. Damit also dieser letztere Theil im Gleichgewicht sey, ist es nöthig, dafs der Rest des Fadens in seiner Wirkung auf $A_1 A_2$ ebenfalls Null sey; und fährt man so nach einander fort, so kommt man zu dem Schlusse, dafs die Molecular-Actionen, welche an den beiden Seiten irgend eines Theiles stattfinden, für sich 0 sind, in der ganzen Länge des Fadens, wie an den beiden Enden desselben.

Action eines jeden Moleculs darstellt. Die Molecular-Kräfte, für die man die Ausdrücke in dem ersten Paragraphen meiner Abhandlung findet, sind nach diesem Principe berechnet, und dennoch auf die möglichst einfache Form gebracht.

Die folgenden Paragraphen enthalten die Gleichungen des Gleichgewichts und der Bewegung, hergeleitet aus diesen Kräften und bezogen, sowohl auf alle Punkte, wie auf die Enden, von elastischen Saiten, Stäben, Membranen und Platten. Unter diesen Gleichungen sind diejenigen, welche sich auf den Umfang einer beliebig gebogenen elastischen Platte beziehen, und die, welche zu den Punkten einer eben gebliebenen Membrane oder Platte gehören, vorher noch nicht gegeben worden; die übrigen fallen mit den schon früher auf verschiedene Weisen gefundenen Gleichungen zusammen. Um die Gesetze der Schallschwingungen aus diesen Gleichungen herzuleiten, habe ich, wie oben gesagt, bei deren Integration die Integrale durch Reihen von particulären Lösungen einer jeden Aufgabe ausgedrückt. Die Coëfficienten dieser Reihen sind nach einer Methode bestimmt, die ich schon in einer andern Abhandlung gebraucht und, was ihre ganze Allgemeinheit und Gleichförmigkeit beweist, zu den verschiedenartigsten Anwendungen benutzt habe. Ein Vortheil dieser Methode ist: daß sie zugleich ein Mittel liefert zum Beweise der Realität aller Wurzeln der transcendenten Gleichungen, von welchen die Coëfficienten der Zeit unter den Sinus und Cosinus, nach welchen die Reihen geordnet sind, abhängen. Dieß ergibt sich übrigens auch aus der Stabilität des Gleichgewichts aus welchem die Körper abgelenkt werden.

Die durch meine Analyse erhaltenen Resultate über die Messung der Töne und die Lage der Knotenlinien habe ich so viel wie möglich mit der Erfahrung zu vergleichen gesucht, und dazu die Versuche angewandt, welche die HH. Savart und Cagniard-Latour die Güte

hatten mir mitzutheilen. Man hat schon aus zwei Notizen im 36. Bande der *Annales de chimie et de physique* ersehen, wie merkwürdig die Rechnung mit der Erfahrung übereinstimmt *); fernere Belege dazu findet man weiter unten in dieser Abhandlung. Diese Uebereinstimmung bei den entscheidensten Punkten liefert eine gewichtige Bestätigung der Theorie, so wie zugleich einen neuen Beweis von der Geschicklichkeit der Beobachter und von der Genauigkeit ihrer Beobachtungen.

Ich will dieser zu meiner Abhandlung gehörenden Einleitung noch eine Anzahl der Resultate hinzufügen, welche den Physikern von Interesse seyn können.

I. Ich habe die Töne und die Knotenflächen einer Kugel bestimmt, in der alle Punkte, die gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind, in jedem Augenblick eine gleiche Bewegung in Richtung ihrer respectiven Radien besitzen.

II. Wenn ein elastischer Draht nach der Länge ausgezogen wird, und er sich dadurch in dem Verhältnisse $1:1+x$ verlängert, so nimmt zugleich sein Volumen in dem Verhältnisse $1:1+\frac{1}{2}x$ zu, und seine Dichte also umgekehrt in demselben Verhältnisse ab. Diese Volumensvergrößerung bei der Verlängerung hat schon Hr. Cagniard-Latour bei einem Messingdrahte bemerkt, und man kann daraus (dies. Ann. vorig. Bd. S. 516.) ersehen, wie genau das Resultat seines Versuchs mit dem unserer Rechnung übereinstimmt.

III. Es sey l die Länge einer ausgespannten Saite oder der Abstand zwischen den beiden festen Punkten, in denen sie sich endigt; α sey die Verlängerung in Folge der die Spannung bewirkenden Kraft oder eines entsprechenden Gewichts; n sey die Anzahl ihrer longitudinalen

*) Die eine derselben ist den Lesern schon im vorigen Bande dieser Annalen, S. 516., mitgetheilt; die andere folgt auszugsweise am Schlusse dieser Abhandlung.

Schwingungen innerhalb der Zeiteinheit, und n' die Anzahl ihrer transversalen Schwingungen in derselben Zeit; dann wird man haben:

$$\frac{n}{n'} = \sqrt{\frac{l}{a}}.$$

Bei einem von Hrn. Cagniard-Latour angestellten Versuche war:

$$l = 14^m, 8; a = 0^m, 05 \quad \frac{n}{n'} = 16, 87,$$

welches Verhältniß nur wenig von 17,204 abweicht, das zufolge der obigen Formel stattfinden muß.

IV. Es sey a die Geschwindigkeit des Schalls in einem sehr dünnen und unendlich langem Stabe, und n die Anzahl der longitudinalen Schwingungen, welche ein an beiden Enden freier Stab von gleicher Substanz und der Länge l innerhalb der Zeiteinheit vollführt, so hat man:

$$a = \frac{2l}{n}.$$

Diese Formel war schon bekannt; aber es muß hinzugesetzt werden, daß die Geschwindigkeit des Schalls nicht dieselbe ist in einem Körper, bei dem man alle drei Dimensionen betrachtet. Bei gleicher Substanz wird sie dann im Verhältnisse $\sqrt{5}:\sqrt{6}$ vermehrt, und dieß veranlaßt eine wesentliche Verschiedenheit zwischen der Fortpflanzung des Schalls nach der Länge einer starren Stange mit freier Oberfläche, und der nach der Länge einer in einem Kanale enthaltenen flüssigen Säule. Im letztern Falle ist nämlich die Geschwindigkeit dieselbe, wie in einer sich nach allen Richtungen bis in's Unbestimmte erstreckenden Masse von derselben Flüssigkeit. Die Geschwindigkeit a kann auch, wie schon Laplace bemerkt hat, aus der Contraction hergeleitet werden, welche ein Stück der Stange durch ein gegebenes Gewicht erleidet.

V. Man habe einen cylindrischen Stab, der an einem

Ende eingeklemmt und mit dem andern frei ist, und es bezeichne E das Moment einer Kraft, die an dem freien Ende, in einer gegen den Stab senkrechten Ebene wirkt. Ferner sey ε der Radius und ϱ die Dichte des Cylinders, so wie a die Geschwindigkeit des Schalls in einer Stange von gleicher Substanz. Ueberdiß bezeichne x den Abstand irgend eines Punkts von dem festen Ende, ψ den Drehungswinkel an demselben Punkt, und π das Verhältniß des Kreisumfangs zum Radius; dann wird man haben:

$$\psi = \frac{5Ex}{\pi \varepsilon^4 a^2 \varrho}$$

VI. Wenn, in demselben Falle, der Stab successiv um seine Axe und im Sinne seiner Länge schwingt, so wird das Verhältniß der beiden Töne unabhängig seyn von der Substanz und von den Dimensionen des Stabes. Bezeichnet dann, für eine gleiche Zeit, n_1 die Zahl der drehenden und n die Zahl der longitudinalen Schwingungen, so hat man:

$$\frac{n}{n_1} = \frac{1}{2} \sqrt{10}.$$

Schon früher ist die Beständigkeit dieses Verhältnisses von Chladni bemerkt, aber nach ihm würde es gleich $\frac{3}{2}$ seyn. Nach den neuern Versuchen von Hrn. Savart würde es dagegen den Werth 1,6668 erhalten. Das Mittel aus beiden Resultaten der Erfahrung weicht wenig von 1,5811 ab, welches die Rechnung giebt.

VII. Es sey l die Länge eines cylindrischen an beiden Enden freien Stabes, ε sein Radius, n die Anzahl seiner longitudinalen Schwingungen in der Zeiteinheit, und n' die Anzahl seiner transversalen Schwingungen in derselben Zeit; dann wird man haben:

$$\frac{n'}{n} = (3,5608) \frac{\varepsilon}{l}.$$

Man kann aus der Notiz am Schlusse dieses Aufsatzes ersehen, wie merkwürdig diese Formel mit dem Versuche des Hrn. Savart übereinstimmt. In dieser

Formel, wie in den vorhergehenden, gehört die angegebene Schwingungsanzahl jedesmal zum tiefsten Ton, und muß aus diesem nach den gewöhnlichen Regeln der Akustik abgeleitet werden.

VIII. Ich habe die verschiedenen Töne einer nach allen Richtungen gleichmäfsig ausgespannten und transversal schwingenden Membrane bestimmt, für den Fall, daß diese Membrane ein Rechteck sey, dessen vier Seiten man befestigt habe. Ich habe auch für denselben Fall alle Systeme von Knotenlinien bestimmt, und gezeigt, daß ihre Anzahl unendlich seyn kann, obgleich der Ton derselbe bleibt, sobald die Seiten der Membrane gleich sind oder ein gemeinschaftliches Maafs haben.

IX. Es sey p das Gewicht einer kreisrunden Membrane, P die an allen Punkten ihres Umfangs wirkende und nach allen Richtungen eine gleiche Spannung hervorbringende Kraft, g das Maafs der Schwerkraft, und n die Anzahl der transversalen Schwingungen der Membrane in der Zeiteinheit, in Bezug auf deren tiefsten Ton, und in der Voraussetzung, daß die gleich weit vom Mittelpunkt entfernten Punkte derselben in jedem Augenblick eine gleiche Bewegung besitzen; dann wird man haben:

$$n = (0,6784) \sqrt{\frac{Pg}{p}}$$

Da P und p sich gleich bleiben, so ist diese Zahl, wie man sieht, unabhängig von dem Radius der Membrane. Beim Uebergange von dem tiefsten Ton zu dem nächstfolgenden, wächst sie in einem etwas geringeren Verhältnisse, als dem von 2:5. Der letztere Ton wird von einer Knotenlinie begleitet, deren Radius 0,4347 ist, den Radius der Membrane dabei als Eins gesetzt. Versuche, mit denen ich diese Resultate der Theorie hätte vergleichen können, habe ich nicht gefunden.

X. Ich habe die Töne und Knotenlinien einer kreisrunden Scheibe bestimmt, auf der alle, gleich weit vom Mittelpunkt entfernte, Punkte in jedem Augenblick die-

selbe Geschwindigkeit besitzen für die Fälle, daß der Umfang der Scheibe entweder eingeklemmt oder bloß gestützt oder ganz frei sey. Im letztern Fall ist das Verhältniß zwischen den beiden tiefsten Tönen einer und derselben Scheibe $=4,316$. Hr. Savart hat für dieß Verhältniß eine Zahl erhalten, die zwar etwas größer ist als 4, aber um einen merklich kleineren Bruch als den von mir gefundenen. Derselbe glaubt indeß, daß der Unterschied zwischen der Rechnung und Erfahrung nicht außer den Gränzen der bei diesen Beobachtungen möglichen Fehler liege.

XI. In demselben Falle ist der tiefste Ton von einer Knotenlinie begleitet, und der nächst höhere von zwei ähnlichen Linien. Nimmt man den Radius der Scheibe zur Einheit, und nennt r den Radius der ersten Knotenlinie, r_1 und r_2 die Radien der beiden andern, so giebt die Rechnung:

$$r=0,6806; r_1=0,3915; r_2=0,835.$$

Hr. Savart hat diese Radien bei drei Kupferscheiben von verschiedener Größe gemessen und folgende Werthe gefunden:

$$1) r=0,6819; r_1=0,6798; r_2=0,6812,$$

welche sehr wenig von einander abweichen, und im Mittel sehr nahe mit dem berechneten übereinstimmen; ferner

$$2) r_1=0,3855; r_1=0,3876; r_1=0,3836;$$

Resultate, die sowohl unter sich, als auch mit dem Resultate der Rechnung dieselbe Uebereinstimmung zeigen; und endlich:

$$3) r_2=0,8410; r_2=0,8427; r_2=0,8406,$$

welche gleichfalls auf eine sehr merkwürdige Weise mit dem von der Rechnung gelieferten Werth von r_2 übereinkommen.

XII. Endlich sey n die Zahl der Schwingungen entsprechend dem tiefsten Ton, welchen ein an beiden Enden freier Stab in der Zeiteinheit zu geben vermag, ϵ der Ra-

Radius und $2l$ die Länge dieses Stabes. Man bezeichne ferner mit n_1 die Anzahl der Schwingungen, welche für dieselbe Zeit dem tiefsten Tone einer kreisrunden Scheibe entspricht, die aus gleicher Materie besteht, am Rande gänzlich frei ist, die Dicke 2ε und den Radius l besitzt; dann wird man haben:

$$\frac{n_1}{n} = (3,3746) \frac{\varepsilon}{l};$$

eine Formel, zu deren Verificirung es nöthig ist, daß man die Dicke der Platte und den Durchmesser des Stabes mit großer Genauigkeit messe, weil diese Elemente auf die Schwingungen beider Körper Einfluß haben.

Die Discussion, welche sich nach Vorlesung meiner Abhandlung in der Academie erhoben hat, nöthigt mich zu der Bemerkung, daß dieselbe aus zwei Theilen besteht, von welchen der eine, ganz specielle, sich auf akustische Aufgaben bezieht, die übersichtlich in dem Vorhergehenden enthalten, und bisher noch von Niemanden behandelt worden sind; der andere enthält allgemeine Betrachtungen über die Molecular-Actionen und über den Ausdruck für die aus ihnen entspringenden Kräfte. Es ist darin gezeigt, daß es zur Erlangung dieser Ausdrücke nöthig sey, der Function des Abstandes, welche die gegenseitige Action zweier Molecule ausdrückt, einige Beschränkung zu geben, und daß es nicht hinreicht, wie man bisher angenommen hatte, daß diese Function zu denen gehöre, welche bei einer merklichen Gröfse der Variablen unmerklich werden. Es ist auch darin gezeigt, daß die Summe, welche die totale Resultante der Molecular-Actionen nach allen Richtungen ausdrückt, nicht von der Art sey, daß sie in ein Integral verwandelt werden könne. Diefs ist gleichfalls noch nicht bemerkt worden, und dennoch wesentlich, weil die Darstellung dieser Resultante durch ein bestimmtes Integral den Coëfficienten derselben, nach der Veränderung, welche die

Form des Körpers durch gegebene Kräfte erleidet, Null machen, also auch die Bildung der Gleichgewichtsgleichungen für denselben unmöglich machen würde. Nachdem endlich die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht eines elastischen Körpers von beliebiger Form, unter Berücksichtigung der verschiedenen von mir nachgewiesenen Umstände, aufgestellt sind, habe ich diejenigen aus ihnen abgeleitet, welche sich auf elastische Saiten, Stäbe, Membranen und Platten beziehen. Diese Herleitung, welche meines Wissens bisher noch Niemand versucht hat, erfordert analytische Transformationen, deren Auffindung mir, selbst für den einfachsten Fall, nämlich den der elastischen Saite, viele Zeit gekostet hat.

Auszug aus der auf S. 394. erwähnten Notiz über die Schwingungen tönender Körper.

Ein und derselbe elastische Stab kann auf vier verschiedene Weisen schwingen. Er macht: 1) *longitudinale* Schwingungen, wenn man ihn der Länge nach auszieht oder zusammendrückt, 2) *normale* Schwingungen, wenn dasselbe senkrecht gegen seine größte Dimension geschieht, 3) *drehende* Schwingungen, wie Chladni sie nennt, welche vermöge einer Drehung um die Axe stattfinden, und endlich 4) *transversale* Schwingungen, welche durch Biegungen hervorgerufen werden. Diese vier Arten von tönenden Schwingungen hängen von der Steifigkeit einer und derselben Masse ab, und müssen daher mit einander in Zusammenhang stehen, so daß sich, wenn der Ton, welcher den Schwingungen einer Art entspricht, bekannt ist, daraus der Ton einer jeden der drei andern Schwingungsarten herleiten lassen muß. Diefes ist eins der Probleme, dessen vollständige Lösung man in meiner Abhandlung findet.

Die Gesetze der longitudinalen Schwingungen sind dieselben, wie die der Luft in den Flöten, wenigstens

dann, wenn man beim Stabe den Einfluss der Dicke vernachlässigt. Die normalen Schwingungen sind zu verwickelt, als daß ich die Gesetze derselben in dieser Notiz angeben könnte; ich bemerke daher nur, daß sie die longitudinalen begleiten, und daß man ihnen die Menge von Knoten zuschreiben muß, die, wie wir es durch Hrn. Savart wissen, von der Dicke abhängig sind. Was die drehenden Schwingungen betrifft, so hat Chladni gefunden, daß, wenn ein Stab mit einem Ende eingeklemmt und mit dem andern frei ist, derselbe, beim Schwingen durch Drehung, einen um eine Quinte tieferen Ton giebt, als bei den Schwingungen nach der Länge *); oder mit andern Worten, daß der Ton, welchen er im ersten Falle giebt, derselbe ist, welchen er im zweiten Falle gäbe, wenn er in dem Verhältnisse 2:3 verlängert würde. Ich beweise nun, daß dieses Verhältniß gleich $2:\sqrt{10}$ seyn muß, was kaum um ein Zwanzigstel von dem von Chladni gefundenen Resultate abweicht; der Unterschied kann auch um so mehr vernachlässigt werden, wenn man erwägt, daß Chladni sich begnügte, das Resultat in runden Zahlen anzugeben.

Das Verhältniß der transversalen Schwingungen zu den longitudinalen hängt von der Form des Stabes ab. Ich habe es bestimmt sowohl für den Fall, daß die Stäbe cylindrisch, als auch für den, daß sie parallelepipedisch seyn. Handelt es sich z. B. um einen Stab, der an beiden Enden frei ist und seinen möglichst tiefsten Ton giebt, und bezeichnet man: mit l seine Länge, mit n die Zahl seiner longitudinalen Schwingungen, mit n' die seiner transversalen, und endlich mit e seine Dicke, im Fall er parallelepipedisch ist, oder seinen Durchmesser, im Fall er cylindrisch ist, so hat man:

*) Bei Anstellung dieses Versuches muß man vorzugsweise cylindrische Stäbe anwenden, und vermeiden, daß neben den drehenden Bewegungen zugleich transversale Schwingungen entstehen. Man sehe Chladni's Akustik, S. 110.

im ersten Falle: $n' = (2,05610) \frac{ne}{l}$

und im letzten Falle: $n' = (1,78063) \frac{ne}{l}$

von den zwischen den Parenthesen befindlichen Zahlen ergibt sich die zweite aus der ersten durch Multiplication derselben mit $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Da ich begierig war, diese Formeln mit der Erfahrung zu vergleichen, so konnte ich mich an Keinen besser wenden, als an Hrn. Savart, welcher die Güte hatte, mir die folgenden, mit Stäben von verschiedenen Substanzen und Dimensionen angestellten Beobachtungen mitzutheilen. Die longitudinalen Schwingungen wurden an der ganzen, beinahe einen Meter betragenden, Länge der Stäbe beobachtet; man führte diese Länge auf ihr Achtel zurück, durch das bekannte Gesetz, daß die Zahl dieser Schwingungen sich umgekehrt wie die Längen verhalten. Mit diesem Achtel wurden die transversalen Schwingungen beobachtet. Die Zahlen n und n' leitete man aus dem Tone ab, der in beiden Fällen entstand, und der mit großer Genauigkeit festgesetzt wurde. Die folgende Tafel enthält nun diese Versuche verglichen mit den obigen Formeln.

	Beobachtet	Berechnet.	Diff.
1. Parallelepipedischer Stab v. Messing; $l = \frac{1}{3}(0^m,825)$; $e = 3^{mm},92$; $n = 34133$; $n' =$	2667	2668	+ 1
2. Cylindrischer Stab von Messing; $l = \frac{1}{3}(0^m,825)$; $e = 4^{mm},8$; $n = 34133$; $n' =$	2844	2829	-15
3. Cylindrischer Stab von Kupfer; $l = \frac{1}{3}(0^m,825)$; $e = 3^{mm},4$; $n = 36864$; $n' =$	2133	2164	+31
4. Cylindrischer Stab von Eisen; $l = \frac{1}{3}(0^m,880)$; $e = 5^{mm},0$; $n = 45514$; $n' =$	3686	3683	- 3
5. Parallelepipedischer Stab von Glas; $l = \frac{1}{3}(0^m,967)$; $e = 6^{mm},4$; $n = 42667$; $n' =$	4608	4645	+37
6. Parallelepipedischer Stab von Glas; $l = \frac{1}{3}(0^m,967)$; $e = 2^{mm},6$; $n = 42667$; $n' =$	1843	1887	+44
7. Parallelepipedischer Stab v. Büchenholz; $l = \frac{1}{3}(0^m,8925)$; $e = 2^{mm},8$; $n = 40960$; $n' =$	2048	2114	+66

Bei den fünf ersten Versuchen sind die Unterschiede zwischen der Rechnung und Beobachtung sehr unbedeutend, weil der grösste sich nicht bis zum $\frac{1}{70}$ Theil des berechneten n' erhebt. Beim sechsten ist der Unterschied etwas grösser, aber dennoch steigt er nicht bis zum $\frac{1}{40}$ Theil von n' . Man kann diesen Umstand den Ungleichheiten in der Dicke zuschreiben, welche einen grösseren Einfluss hatten, weil der Stab unter den angewandten der dünnste war. Da die Substanz, die Gestalt und die Länge dieselben waren wie beim fünften Versuch, so müssen die Werthe von n' proportional den Dicken seyn, und dieß giebt, aus dem Resultate des fünften Versuches abgeleitet, 1872 für den sechsten Werth von n' , welche Zahl nur um $\frac{1}{20}$ von der durch Rechnung gefundenen 1887 abweicht. Bei dem siebenten Versuch ist der Unterschied zwischen der Rechnung und Beobachtung am grössten, indem er hier auf $\frac{1}{32}$ von n' steigt. Man könnte ihn auch hier noch den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern zuschreiben, da z. B. ein Fehler von nur 0,1 Millimeter in dem Werthe von e hinreichte, ihn gänzlich zu tilgen; allein es ist auch möglich, dafs unsere Formeln nicht auf einen Stab von Holz anwendbar sind, da man diesen als ein System von Längenfaseren betrachten darf, welches im Sinne der Dicke nicht gleiche Rigidität wie im Sinne der Länge hat. Da diese Rigidität in ersterer Richtung schwächer ist als in der zweiten, so begreift man, dafs auch die Zahl der transversalen Schwingungen geringer seyn mufs, als wir sie aus der Zahl der Längenschwingungen hergeleitet haben. Dieß stimmt mit dem letzten Versuche überein.

Man bemerke endlich, dafs in den beiden ersten Versuchen die Länge l und die Substanz des Stabes gleich waren, und dafs also die Zahl n' der transversalen Schwingungen in beiden Fällen proportional seyn würden den Dicken e , wenn der Stab dieselbe Form gehabt hätte. Der zweite Werth von n' , aus dem ersten

hergeleitet, würde dann 3265 seyn, statt 2844, wie ihn die Beobachtung gegeben hat. Der Unterschied, welcher zwischen beiden Zahlen da ist, zeigt deutlich den Einfluß der Form des Stabes; und wirklich muß man nach Theorie, wenn man, bei Gleichheit aller übrigen Umstände, von parallelepipedischen Stäben zu cylindrischen übergehen will, die Zahl n' in dem Verhältnisse $2:\sqrt{3}$ vermindern, und dies reducirt die erste Zahl 3265 auf 2828, welche nur sehr wenig von der beobachteten abweicht.

Weil man die Töne, welche elastische Stäbe bei ihrem Schwingen geben, mit sehr großer Genauigkeit schätzen kann, so folgt daraus, daß dies ein Mittel zur Bestimmung der Rigidität verschiedener Substanzen liefert, und daß man aus der Biegung und Dehnung ihre Resistenz ableiten kann *). Ich werde in meiner Abhandlung dies Verfahren mit der Erfahrung vergleichen, und zeigen, daß es eines gleichen Grades von Genauigkeit fähig ist.

II. *Versuche über die Dichtigkeit, Elasticität, Schmiedbarkeit und Stärke des gewalzten und geschmiedeten Eisens;* *von Lagerhjelm.*

Diese Versuche, welche von dem Verfasser auf Kosten der hüttenmännischen Gesellschaft (Bruks-Societet) in Stockholm angestellt, und in einem im vorigen Jahre unter dem Titel: *Försök at bestämma valsadt och smidt jerns tät-het etc.*, erschienenen Werke ausführlich beschrieben sind, haben zwar zunächst eine practische Beziehung, indem sie hauptsächlich beabsichtigen, den Einfluß der verschiedenen Bereitungsarten des Eisens auf die Güte desselben zu ermitteln; da sie indess mit großer Genauigkeit ange-

*) Man sehe S. 409.