23.

Über die Summation periodischer Reihen und die Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$.

(Von Herrn Prof. *Raabe* in Zürich.)

I.

Es existiren Reihen, die, nach den Potenzen einer Variabeln x geordnet, für alle innerhalb zweier Zahlen a und b fallende Werthe von x convergiren, für den einen oder andern dieser Grenzwerthe hingegen, unbestimmt werden. Bilden nun die im Bereiche dieser Unbestimmtheit fallenden Werthe der Reihe eine Periode, so ist für diesen Grenzwerth der Variabeln, mit Beschränkungen, die wir in der Folge angeben werden, das arithmetische Mittel sämmtlicher unbestimmten Werthe, die die Periode darbietet, der wahre Werth der Reihe. Eine Reihe dieser Art ist folgende:

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \text{etc.},$$

welche für alle Werthe von x, die ächte Brüche sind, convergirt und für $x = 1$ abwechselnd die Werthe 1 und 0 darbietet. Leibnitz, der auf diesen Fall einen Grundsatz der Wahrscheinlichkeits-Rechnung anwandte, folgerte: da man mit gleichem Rechte 1 und 0 als Werthe dieser Reihe für $x = 1$ annehmen kann, so ist das arithmetische Mittel $\frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}$ der wahre Werth derselben. In der That giebt auch der erzeugende Bruch dieser Reihe, nemlich $\frac{1}{1+x}$, für $x = 1$ den Werth $\frac{1}{2}$, welches Resultat mit dem des arithmetischen Mittels übereinstimmt. Diese Übereinstimmung veranlafste Daniel Bernoulli, nach demselben Principe mehrere analoge Reihen anzugeben.

In den folgenden Blättern werden wir zuerst den Grund dieser Übereinstimmung nachweisen und hierauf, als Anwendung, das Integral $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$, welches ebenfalls den Charakter der Unbestimmtheit an sich trägt, durch ein völlig bestimmtes Integral darzustellen suchen.

§. 1.

Summation periodischer Reihen durch das arithmetische Mittel.

2.

Es sei

$$1.\quad y = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_p x^{p-1} + a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + \ldots$$
$$\ldots + a_p x^{2p-1} + a_1 x^{2p} + a_2 x^{2p+1} + \ldots$$

wo a_1, a_2, a_3, ... a_p bestimmte, reelle Werthe haben.

Diese Reihe, welche aus einer unendlich oftmaligen Wiederholung einer p gliedrigen Periode zusammengesetzt ist, wollen wir für jene Werthe von x, für die sie convergirt, summiren. Bezeichnet man zu diesem Zwecke durch P die Summe der p ersten Glieder derselben, so ist auch

$$2.\quad y = Q(1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + \ldots).$$

Allein es ist, von $x = 0$ bis $x = 1$ inclusive,

$$3.\quad \frac{1}{1-x^p} = 1 + x^p + x^{2p} + x^{3p} + \ldots:$$

daher wird, vermöge der zweiten dieser Gleichungen, die Gröfse y für alle Werthe von x, die kleiner als die Einheit sind, endliche Werthe annehmen. Diese Werthe werden gröfser und gröfser, je mehr der Werth von x der Einheit näher kommt. Wird endlich $x = 1$, so wird y unendlich grofs.

Es läfst sich jedoch diesem Unendlich-grofs-werden von y, für $x = 1$, durch eine schickliche Annahme der Coëfficienten a_1, a_2, a_3, ... vorbeugen. In der That zeigen die Gleichungen (2.) und (3.), dafs dieses Unendlich-grofs-werden von y für $x = 1$ von dem in $1 - x^p$ enthaltenen Factor $1 - x$ herrührt. Wählt man daher die Coëfficienten a, a_2, a_3, ... a_p dergestalt, dafs auch P diesen Factor enthalte, so ist, wegen

$$y = \frac{P}{1-x^p},$$

nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $1 - x$ im Zähler und Nenner dieses Bruches, für $x = 1$ die Gröfse y nicht mehr unendlich grofs. Der sich für $x = 1$ ergebende Werth stellt dann die Grenze vor, der sich y ohne Ende nähert, wenn x unendlich nahe der Einheit kommt. Setzt man also

$$P = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_p x^{p-1}$$

und

$$4.\quad 0 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_p,$$

so ist P durch $1 - x$ theilbar, und es besteht, für alle Werthe von $x = 0$ bis $x = 1$, die Gleichung

$$\frac{P}{1-x^p} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_p x^{p-1} + a_1 x^p + a_2 x^{p+1} + \dots$$
$$\dots + a_p x^{2p-1} + a_1 x^{2p} + \dots$$

Kommt nun x der Einheit unendlich nahe, so nähert sich diese Reihe dem Werthe des Bruches, wenn in demselben $x=1$ angenommen wird. Allein da für diesen Werth von x beim Statthaben der Gleichung (4.) dieser Bruch unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheint, so hat man, nach einem bekannten Satze aus der Differenzialrechnung,

$$y_1 = -\frac{1}{p}\left(\frac{dP}{dx}\right),$$

wo y_1 den Grenzwerth der Reihe vorstellt, falls x ohne Ende der Einheit nahe kommt und $\left(\frac{dP}{dx}\right)$, den Differenzial-Coëfficienten von P nach x bedeutet, wenn nach der Differenziation $x=1$ angenommen wird.

Es ist daher nach vollzogener Differenziation und Substitution:

$$y_1 = -\frac{1}{p}[(p-1)a_p + (p-2)a_{p-1} + (p-3)a_{p-2}) + \dots + 3a_4 + 2a_3 + a_2],$$

oder auch

$$y_1 = -\frac{1}{p}[(p-1)(a_p + a_{p-1} + a_{p-2} + \dots + a_3 + a_2)$$
$$-(a_{p-1} + 2a_{p-2} + 3a_{p-3} + \dots + (p-3)a_3 + (p-2)a_2)];$$

daher, mit Zuziehung der Bedingungsgleichung (4.),

5. $$y_1 = \frac{1}{p}[(p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \dots + 3a_{p-3} + 2a_{p-2} + a_{p-1}].$$

Nun setze man in der Reihe der Gleichung (1.) $x=1$, so ergeben sich mit Voraussetzung der Gleichung (4.) folgende Werthe, die eine Periode bilden:

$$a_1, \quad a_1 + a_2, \quad a_1 + a_2 + a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4, \quad \dots$$
$$\dots \quad a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{p-1}, \quad 0,$$

deren arithmetisches Mittel dem oben gefundenen Werthe von y gleichkommt.

Es ist somit erwiesen, daſs für eine Reihe, die wir so eben untersucht haben, das arithmetische Mittel der periodischen Werthe derselben die Grenze ist, welcher sich ihr Werth ohne Ende nähert, wenn die Variable x um ein unendlich Weniges von dem Werthe absteht, für welchen die Reihe die Periode von Werthen darbietet.

3.

Auch folgendes Verfahren, die Regel des arithmetischen Mittels nachzuweisen, ist der Beachtung werth.

Setzt man der Kürze wegen folgende Gleichungen:

$$P_1 = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{p-3} x^{p-4} + a_{p-2} x^{p-3} + a_{p-1} x^{p-2} + a_p x^{p-1},$$
$$P_2 = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + a_5 x^3 + \ldots + a_{p-2} x^{p-4} + a_{p-1} x^{p-3} + a_p\, x^{p-2} + a_1 x^{p-1},$$
$$P_3 = a_3 + a_4 x + a_5 x^2 + a_6 x^3 + \ldots + a_{p-1} x^{p-4} + a_p\, x^{p-3} + a_1\, x^{p-2} + a_2 x^{p-1},$$
$$P_4 = a_4 + a_5 x + a_6 x^2 + a_7 x^3 + \ldots + a_p\, x^{p-4} + a_1\, x^{p-3} + a_2\, x^{p-2} + a_3\, x^{p-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$P_k = a_k + a_{k+1} x + a_{k+2} x^2 + a_{k+3} x^3 + \ldots + a_p x^{p-k} + a_1 x^{p-k+1} + a_2 x^{p-k+2} + \ldots$$
$$\ldots + a_{k-1} x^{p-1},$$

wo k was immer für eine ganze Zahl von 1 bis p vorstellen kann: so ist jede der folgenden Gleichungen mit der Gleichung (1.) gleich bedeutend:

$$y = \frac{P_1}{1-x^p},$$
$$y = \frac{x P_2}{1-x^p} + a_1,$$
$$y = \frac{x^2 P_3}{1-x^p} + a_1 + a_2 x,$$
$$y = \frac{x^3 P_4}{1-x^p} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y = \frac{x^{p-1} P_p}{1-x^p} + a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 + \ldots + a_{p-1} x^{p-2}.$$

Wird nun die Gleichung (4.) vorausgesetzt, so erscheint der Factor $1-x$ in jeder der durch P_1, P_2, P_3, ... vorgestellten Functionen von x, und die sämmtlichen eben aufgestellten Gleichungen geben denselben Werth für y, wenn x einen innerhalb 0 und 1 liegenden Werth annimmt. Wird $x = 1$ vorausgesetzt, so erscheinen sämmtliche Brüche dieser Gleichungen unter der Form $\frac{0}{0}$, da sowohl die Zähler als die Nenner derselben den Factor $1-x$ enthalten. Addirt man hingegen diese Gleichungen, welches giebt:

$$p y = \frac{P_1 + P_2 x + P_3 x^2 + P_4 x^3 + \ldots + P_p x^{p-1}}{1-x^p} + (p-1) a_1 + (p-2) a_2 x$$
$$+ (p-3) a_3 x^2 + \ldots + 2 a_{p-2} x^{p-2} + a_{p-1} x^{p-1},$$

so erscheint im Zähler dieses Bruches der Factor $1-x$ wenigstens in der zweiten Dimension; und da der Nenner diesen Factor nur in der ersten Dimension enthält, so erübriget im Zähler, nach vollzogener Vereinfachung des Bruches, wenigstens die erste Potenz von $1-x$. Es ist somit die Null der Grenzwerth dieses Bruches, wenn x ohne Ende der Einheit nahe kommt. Behält daher y_1 die obige Bedeutung, so ist:

$$p y_1 = (p-1)a_1 + (p-2)a_2 + (p-3)a_3 + \dots + 2a_{p-2} + a_{p-1};$$

welche Gleichung ebenfalls die Regel des arithmetischen Mittels darstellt.

Dafs der Zähler des so eben betrachteten Bruches den Factor $1-x$ wenigstens in der zweiten Dimension enthält, beweisen wir dadurch, indem wir zeigen, dafs das Differenzial dieses Zählers nach x diesen Factor wenigstens noch in der ersten Dimension enthält.

In der That: bezeichnet man diesen Zähler durch z, so ist

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dP_1}{dx} + x\frac{dP_2}{dx} + x^2\frac{dP_3}{dx} + \dots + x^{p-1}\frac{dP_p}{dx} + P_2 + 2xP_3 + 3x^2P_4 + \dots$$
$$\dots + (p-1)x^{p-2}P_p.$$

Soll nun der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen den Factor $1-x$ enthalten, so mufs er für $x=1$ verschwinden. Nun ist

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0, \quad \dots \quad P_p = 0,$$

wenn $x=1$ angenommen wird. Es erübriget daher noch nachzuweisen, dafs für denselben Werth von x die Summe

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \dots + \frac{dP_p}{dx}$$

ebenfalls verschwindet. Allein nach den oben für P_1, P_2, P_3 etc. aufgestellten Werthen hat man für $x=1$:

$$\frac{dP_1}{dx} = a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \dots + (p-3)a_{p-2} + (p-2)a_{p-1} + (p-1)a_p,$$
$$\frac{dP_2}{dx} = a_3 + 2a_4 + 3a_5 + \dots + (p-3)a_{p-1} + (p-2)a_p + (p-1)a_1,$$
$$\frac{dP_3}{dx} = a_4 + 2a_5 + 3a_6 + \dots + (p-3)a_p + (p-2)a_1 + (p-1)a_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{dP_{p-1}}{dx} = a_p + 2a_1 + 3a_2 + \dots + (p-3)a_{p-4} + (p-2)a_{p-3} + (p-1)a_{p-2},$$
$$\frac{dP_p}{dx} = a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \dots + (p-3)a_{p-3} + (p-2)a_{p-2} + (p-1)a_{p-1},$$

daher:

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \dots + \frac{dP_p}{dx} = \frac{p(p-1)}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_p),$$

also, vermöge der Gleichung (4.):

$$\frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \frac{dP_3}{dx} + \dots + \frac{dP_p}{dx} = 0,$$

w. z. b. w.

§. II.

Reduction des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$ auf ein anderes, in welchem die oberste Grenze endlich ist.

4.

Bevor wir die Lösung des allgemeinen Falles geben, wollen wir zur leichtern Übersicht des Verfahrens einen speciellen Fall voranschicken.

Stellt man durch w eine unendlich klein werdende, durch p eine unendlich groſs werdende ganze Zahl vor, setzt dann $pw = 2\pi$, wo π das Verhältniſs des Umfanges eines Kreises zu seinem Durchmesser bedeutet, so convergirt die ohne Ende fortlaufende Reihe

$$\begin{aligned} & w\sin w + xw\sin 2w + x^2 w \sin 3w + \ldots + x^{p-1} w \sin pw \\ & + x^p w \sin w + x^{p+1} w \sin 2w + x^{p+2} w \sin 3w + \ldots + x^{2p-1} w \sin pw \\ & + x^{2p} w \sin w + x^{2p+1} w \sin 2w + x^{2p+2} w \sin 3w + \ldots + x^{3p-1} w \sin pw \\ & + x^{3p} w \sin w + \ldots \\ & + \ldots, \end{aligned}$$

die wir der Kürze durch y verstellen wollen, für alle Werthe von x, welche kleiner als die Einheit sind. Nähert sich x ohne Ende der Einheit, so nähert sich in demselben Maaſse der Werth dieser Reihe dem des bestimmten Integrals $\int_0^\infty \sin x\,dx$. Allein für denselben Werth von x nähert sich y dem Werthe von y_1 aus der Gleichung (5.), wenn man nur die Gleichung (4.) voraussetzen darf.

Es ist somit, wegen

$$a_1 = w\sin w, \quad a_2 = w \sin 2w, \quad a_3 = w \sin 3w, \quad \ldots \quad a_p = w \sin pw,$$

$$\int_0^\infty \sin x\,dx =$$

$$\frac{1}{p}[(p-1)w\sin w + (p-2)w\sin 2w + (p-3)w\sin 3w + \ldots + 2w\sin(p-2)w + w\sin(p-1)w],$$

wenn man nach Gleichung (4.)

$$[\sin w + \sin 2w + \sin 3w + \sin 4w + \ldots + \sin pw]\,w = 0$$

hat. Nun ist der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen dieser Gleichung gleichbedeutend mit dem bestimmten Integrale $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$, dessen Werth gleich Null ist: daher besteht auch die unmittelbar vorangehende Gleichung, welche übrigens noch auf folgende Form gebracht werden kann:

$$\int_0^\infty \sin x\,dx =$$

$$\begin{aligned} & [\sin w + \sin 2w + \sin 3w + \ldots + \sin pw]\,w - w\sin pw \\ & - \frac{1}{p}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw] + w\sin pw. \end{aligned}$$

Wird von dieser Gleichung die vorangehende abgezogen, so hat man

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{p}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw].$$

Nun ist $pw = 2\pi$, also $\frac{1}{p} = \frac{w}{2\pi}$, daher

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}[w\sin w + 2w\sin 2w + 3w\sin 3w + \ldots + pw\sin pw]\,w.$$

Wird endlich der Ausdruck links vom Gleichheitszeichen in ein bestimmtes Integral umgesetzt, so ist

$$\int_0^\infty \sin x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\sin x\,dx = 1.$$

Ganz auf dieselbe Weise wird man auf folgende Gleichung geführt:

$$\int_0^\infty \cos x\,dx = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x\cos x\,dx = 0.$$

5.

Stellen a und b beliebige ganze oder gebrochene Zahlen vor; behält man für w und p die Bedeutungen der vorhergehenden No. bei, und ist, wenn m was immer für eine ganze Zahl bedeutet, $\varphi(\sin maw, \cos mbw)$ irgend eine Function von $\sin maw$ und $\cos mbw$, deren Product mit w unendlich klein bleibt: dann convergirt die ohne Ende fortlaufende periodische Reihe:

$$\begin{aligned}
&w\varphi(\sin aw, \cos bw) + xw\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + x^2w\varphi(\sin 3aw, \cos 3bw) + \ldots + x^{p-1}w\varphi(\sin paw, \cos pbw)\\
&+ x^p w\varphi(\sin aw, \cos bw) + x^{p+1}w\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + x^2 w\varphi(\sin 3aw, \cos 3bw) + \ldots + x^{2p-1}w\varphi(\sin paw, \cos pbw)\\
&+ x^{2p} w\varphi(\sin aw, \cos bw) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

für alle Werthe von x, die ächte Brüche sind. Setzen wir noch

$$paw = ka.2\pi \quad \text{und} \quad pbw = kb.2\pi,$$

wo k völlig willkürlich und an die einzige Bedingung gebunden ist, die Producte ka und kb in ganze positive Zahlen zu verwandeln: so stellt die obige Reihe, wenn x unendlich nahe der Einheit kommt, den Werth des Integrals $\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)\,dx$ dar. Allein für denselben Werth von x geht diese Reihe nach Gleichung (5.) über in

$$\frac{w}{p}[(p-1)\varphi(\sin aw, \cos bw) + (p-2)\varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + \ldots + \varphi(\sin(p-1)aw, \cos(p-1)bw)],$$

wenn nach Gleichung (4.) folgende Gleichung besteht:

$$0 = w[\varphi(\sin aw, \cos bw) + \varphi(\sin 2aw, \cos 2bw) + \ldots + \varphi(\sin paw, \cos pbw)].$$

Es ist daher, im Falle des Statthabens dieser letzten Gleichung, mit Berücksichtigung des Werthes von $\frac{1}{p}$:

$$\int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx =$$
$$-\frac{1}{2\pi k}[w\Phi(\sin aw, \cos bw) + 2w\Phi(\sin 2aw, \cos 2bw) + \ldots + pw\Phi(\sin paw, \cos pbw)]w.$$

Setzt man diese Reihe in bestimmte Integrale um, so ist beim Stattfinden der Gleichung

$$\int_0^{pw} \Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = 0$$

auch folgende Gleichung richtig:

$$\int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = -\frac{1}{2k\pi}\int_0^{pw} \Phi(\sin ax, \cos bx)\,x\,dx.$$

Läſst man in den Integralen, die sich von 0 bis pw erstreckten, x in kx übergehen, so hat man, wegen $\frac{pw}{k} = 2\pi$,

$$6.\quad \int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = -\frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx,$$

wenn die Bedingungsgleichung

$$7.\quad \int_0^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,dx = 0$$

realisirt wird.

Diese zwei Gleichungen, die bereits die beabsichtigte Reduction darstellen, sind noch einer Umformung fähig, die wir sogleich beifügen wollen.

Es ist nemlich

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx$$
$$= \int_0^{\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx + \int_\pi^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx.$$

Setzt man in dem Integrale, das von π bis 2π sich erstreckt, $2\pi - x$ statt x, so hat man, da ak und bk ganze Zahlen sind,

$$\int_\pi^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx$$
$$= 2\pi\int_0^{\pi} \Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,dx - \int_0^{\pi} \Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx.$$

Es ist somit

$$\int_0^{2\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,x\,dx = 2\pi\int_0^{\pi} \Phi(-\sin akx, \cos bkx)\,dx$$
$$+ \int_0^{\pi} [\Phi(\sin akx, \cos bkx) - \Phi(-\sin akx, \cos bkx)]\,x\,dx.$$

Verfährt man auf gleiche Weise mit der Bedingungsgleichung (7.), so ist

$$6'.\quad \int_0^\infty \Phi(\sin ax, \cos bx)\,dx = k\int_0^{\pi} \Phi(\sin akx, \cos bkx)\,dx$$
$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^{\pi} [\Phi(\sin akx, \cos bkx) - \Phi(-\sin akx, \cos bkx)]\,x\,dx,$$

wenn man

$$7'. \quad \int_0^\pi [\varphi(\sin akx, \cos bkx) + \varphi(-\sin akx, \cos bkx)]\,dx = 0$$

voraussetzen darf. Diese Darstellungsweise des Integrals

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax, \cos bx)$$

gewährt den Vortheil, die Integrale $\int_0^\infty \varphi(\cos bx)\,dx$, $\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx$ unter sehr einfachen Formen darzustellen.

In der That geben diese zwei Gleichungen:

$$8. \quad \int_0^\infty \varphi(\cos bx)\,dx = 0,$$

wenn man

$$9. \quad \int_0^\pi \varphi(\cos bkx)\,dx = 0$$

voraussetzen darf, wo k willkürlich und bk eine ganze Zahl sein mufs.

Um einen ganz besondern Fall vor Augen zu haben, sei das bestimmte Integral $\int_0^\infty \log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos x)\,dx$ vorgelegt. Poisson findet, wenn $\alpha < 1$ ist,

$$\int_0^\pi \log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos x)\,dx = 0;$$

daher ist auch für denselben Werthzustand von α:

$$\int_0^\infty \log(1 + \alpha^2 + 2\alpha\cos x)\,dx = 0.$$

Ferner geben die Gleichungen (6'.) und (8'.)

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx$$

$$= k\varphi(\sin akx)\,dx - \frac{k}{2\pi}\int_0^\pi [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx)]\,x\,dx,$$

wenn man

$$\int_0^\pi [\varphi(\sin akx) + \varphi(-\sin akx)]\,dx = 0$$

hat. In diesen zwei Gleichungen zerfälle man die von 0 bis π zu nehmenden Integrale in andere, die von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ und von $\frac{\pi}{2}$ bis π gehen. In diesen letzteren setze man $\pi - x$ statt x, so ist:

$$\int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx = \frac{k}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx]\,dx$$

$$-\frac{k}{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) - \varphi(-\sin akx) + \varphi((-1)^{ka}\sin akx) - \varphi(-(-1)^{ka}\sin akx)]\,x\,dx,$$

wenn die Bedingungsgleichung

$$10. \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\varphi(\sin akx) + \varphi(-\sin akx)]\,dx = 0$$

Statt hat. Da ferner k ganz willkürlich ist, so kann man ak ganz und ungerade annehmen, wodurch, mit Zuziehung der eben aufgestellten Bedingungsgleichung, die Gleichung

$$11. \quad \int_0^\infty \varphi(\sin ax)\,dx = k\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(\sin akx)\,dx$$

gefunden wird.

Als Anwendung dieser zwei Gleichungen hat man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)+\log(1+\alpha^2-2\alpha\sin x)]\,dx = 0,$$

wenn α kleiner als 1 vorausgesetzt wird; daher ist für denselben Werth von α:

$$\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\,dx.$$

Ferner findet man, wenn $\alpha < 1$ vorausgesetzt wird,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\,dx = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^5 + \dots,$$

daher

$$\int_0^\infty \log(1+\alpha^2+2\alpha\sin x)\,dx = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^3 + \frac{1}{5}\cdot\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^5 + \dots$$

Beim Ableiten der vorhergehenden Gleichung wird man auch auf folgende Gleichung geführt:

$$\log(1+\alpha^2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^6 + \dots,$$

die ebenfalls für alle Werthe von α, welche kleiner als die Einheit sind, besteht. Vertauscht man demnach α mit $\frac{1}{\alpha}$, so ist für alle Werthe von α, die >1 sind:

$$\log(1+\alpha^2) - \log\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^4 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4\,6}\left(\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}\right)^6 + \dots,$$

welche Gleichung, wie die vorhergehende, noch für $\alpha = 1$ Statt hat.