

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

№ 1321—1323.

Über die Wärmeveränderungen in den höheren Erdschichten unter dem Einflusse des nicht-periodischen Temperaturwechsels an der Oberfläche, von Herrn *Louis Saalschütz*.

Einleitung.

§ 1.

Die Temperatur der Erdrinde ist im Allgemeinen hauptsächlich aus zwei Summanden zusammengesetzt, einem dauernden und einem veränderlichen. Die Untersuchung des ersteren würde unsere Aufmerksamkeit bis zur Entstehungsgeschichte der Erde zurücklenken. Was aber denselben als wirklich vorhandenen Rest aus jener fernen Periode der Bildung unseres Planeten nachweist, ist die Thatsache, dass die Temperatur, soweit man in die Erde hinabgestiegen ist, an Intensität wächst. Ob nun freilich dieser Umstand auch in grösseren Tiefen fortbestehe, und so auf ein ewiges im Mittelpunkt der Erde glühendes Feuer schliessen lasse; oder ob etwa die Temperatur von aussen in den Erdkörper eingedrungen und nun, in einer kälter gewordenen Umgebung zum Ausstrahlen gezwungen, nach dem Innern der Erde zu noch höher geblieben sei (*Poisson*); oder ob die Entstehung dieser Erdwärme ganz oder theilweise chemischen Veränderungen der Oberfläche (wobei die in ihr enthaltenen Wasseranhäufungen als lösend wirken) zugeschrieben werden könne, — das sind Fragen, die nur durch Veränderungen der jetzigen Temperaturverhältnisse, welche im Laufe von kosmischen Zeiträumen eintreten können, zur Entscheidung zu bringen sein möchten, indem die Bedingungen der einzelnen Hypothesen dem Calcul unterworfen und die hieraus sich ergebenden Folgerungen (über die Zeiten der Abkühlung, Verkürzung des Tages u. s. w.) mit der Beobachtung verglichen werden müssen.

Der Wechsel der Temperatur der Erdoberfläche, welcher von dem veränderlichen Theile herrührt, ist es, der in jeder Zeitperiode beobachtet und somit auch der physikalischen Betrachtung übergeben werden kann. An ihn wollen wir auch die Betrachtungen anknüpfen, welche den Inhalt des Folgenden ausmachen sollen. Er rührt im Allgemeinen von dem Einflusse der Sonne her. Sowie aber die Wirkung der Sonne für die Atmosphäre, in der wir leben, nicht eine nur periodische ist, sondern in verschiedenen Jahren sehr ungleich erscheint, so dass gegen ein ideelles Normaljahr fast jedes wirkliche als unregelmässig erachtet werden muss; so findet

sich eine ganz analoge Veränderlichkeit der Temperatur in den der Oberfläche zu nächst liegenden Erdschichten. Es soll nun im Folgenden dieser Zusammenhang zwischen der Temperatur der Oberfläche der Erde und derjenigen in verschiedenen Tiefen derselben etwas näher betrachtet werden. Dabei soll besonders auch nachgewiesen werden, dass eine unregelmässige Temperatur, welche an der Oberfläche eine Zeit lang fortbesteht, etwa eines vorzüglich kalten oder warmen Jahres, sich auch in die Erde hinein fortpflanzt (und zwar bis in solche Tiefen, welche mitunter schon als unveränderlich galten), und sich daselbst durch die Abweichung der Mitteltemperatur eines späteren Zeitraumes kund giebt. Ich muss dabei die Temperatur der Erdoberfläche zu Grunde legen, nicht die der Atmosphäre — theoretisch werde ich mir gestatten, auch die Temperatur der Umgebung als gegeben anzusehn — weil aus dem Material von Beobachtungen, das bis jetzt vorliegt, noch nicht der Einfluss der Temperatur der Atmosphäre auf die Oberfläche so streng und genau hat dargethan werden können, dass er mit Erfolg hätte in die mathematisch-physikalische Behandlung hineingezogen werden dürfte.

§ 2.

Das experimentale Material, das den Betrachtungen zum physikalischen Anhalte dienen kann, ist eigentlich ziemlich gering. Ausser einigen Beobachtungen, die sich nur bis auf geringe Tiefen (ca. 5 bis 10 Fuss) erstrecken, sind bedeutendere nur in Brüssel und in Königsberg angestellt worden.

Die Beobachtungen in Brüssel, angestellt und bearbeitet von dem Secretair der Akademie daselbst, Herrn *Quetelet* (mitgetheilt in den *Annalen des Brüsseler Observatoriums* in den ersten Bänden, mit einem betrachtenden umfangreichen Resumée im vierten Bande), erstrecken sich bis auf fast acht Meter und reichen im Ganzen von 1834—1843. Die Temperatur der Luft und der obersten Erdschichten ist täglich drei Mal beobachtet worden, die der bedeutenderen Tiefen um 9 Uhr Morgens. Für diese grösseren Tiefen sind auch die Beobachtungen mit Hülfe der vorangehenden Thermometer reducirt worden (wie es scheint indessen nur die Monats-

mittel, wenigstens sind die Tagestemperaturen nur unreducirt mitgetheilt). Leider scheint jedoch der Nullpunkt der einzelnen Thermometer im Laufe der Zeit sich geändert zu haben; denn während die Temperatur im Ganzen nach der Tiefe zu wachsen müsste, so erhält man, wenn man die Tiefen als Abscissen und ihre 10jährigen Jahresmittel als Ordinaten aufträgt, eine Curve, welche in sehr auffallender Weise fortdauernd steigt und fällt. Diese Beobachtungen habe ich daher sehr wenig benutzt; es ist indessen wohl möglich, dass man durch genaueres Eingehen auf dieselben, etwa bei gründlicher Untersuchung der dortigen Localitäten und Bodenverhältnisse, die etwaigen Fehler der einzelnen Thermometer ermitteln und eliminiren könnte: dann würde man allerdings ein zu weiteren Vergleichen sehr geeignetes Material erhalten. Es ist nur noch zu bemerken, dass die beobachteten Jahre immer kälter werden, während ein Schwanken der einzelnen Jahresmittel um die Normaltemperatur wohl wünschenswerther erscheinen möchte.

Die Beobachtungen in Königsberg sind von Herrn Prof. *Neumann* angestellt worden und erstrecken sich bis auf 24 Fuss Tiefe. Die Zeit, in welcher dieselben veranstaltet wurden, umfasst drei Jahre und reicht von September (August) 1836 bis incl. August 1839. Der Ort war eine Stelle im botanischen Garten. Es wurde gleichfalls täglich drei Mal beobachtet (6 Uhr Morgens, 12 Uhr Mittags, 6 Uhr Abends), für die tieferen Stellen 6 Uhr Morgens. Auch hier wurden für die tiefer aufgestellten Thermometer die höheren zur Reduction benutzt, und zwar geschah dieses für jede einzelne Beobachtung. Dieses Material ist später von Herrn Oberlehrer *Schumann* in sehr umfassender Weise bearbeitet worden (dessen Abhandlung mir freundlichst im Manuscripte anvertraut wurde), wobei unter Anderem auch nachgewiesen ist, dass die Fortpflanzung des periodischen Verlaufes der Temperatur in den Boden hinein den *Fourier'schen* Formeln Genüge leistet. — Diejenigen Stellen, an welchen die Thermometer angebracht waren, sind folgende:

5½ Fuss, 1½', ½' über der Oberfläche des Bodens, und ¼', 1½', 3¼', 6½', 7½', 16', 24' unter derselben.

Diese Beobachtungen tragen in sich selbst das Gepräge der Genauigkeit und Zuverlässigkeit, wie man bei der Umsicht und Sorgfalt, mit der sie angestellt wurden, es erwarten konnte. Zu bedauern ist nur der kurze Zeitraum ihrer Dauer, welcher gerade in eine ungewöhnlich kalte Periode fiel. Im Folgenden werden sie uns zur Anwendung des theoretisch Gefundenen dienen.

§ 3.

Aus der schon erwähnten Vergleichung der Beobachtungen mit den *Fourier'schen* Formeln ergaben sich auch die Werthe der Wärmeconstanten, welche gleichfalls in unseren

Betrachtungen angewandt werden müssen. Diese Constanten sind:

die specifische Wärme, die innere Leitungsfähigkeit, die äussere Leitungsfähigkeit.

Die specifische Wärme ist diejenige Wärmemenge, welche nöthig ist, die Volumeneinheit des Körpers um 1° zu erhöhen. Bezieht sich die Bezeichnung *S* für die specifische Wärme auf die Gewichtseinheit und bedeutet *D* die Dichtigkeit des Körpers, so ist nach unserer Erklärung (die sich auf den Raum bezieht) die specifische Wärme durch

$$SD$$

zu bezeichnen, welche Grösse also noch den Cubus einer reciproken Längeneinheit in sich enthält.

Die äussere Leitungsfähigkeit soll durch

$$H$$

bezeichnet werden. Sie enthält das Quadrat einer reciproken Längeneinheit und eine reciproke Zeiteinheit.

Die innere Leitungsfähigkeit soll durch

$$K$$

bezeichnet werden. Für dieselbe ergibt sich aus einem Satze von *Fourier*, dass sie eine reciproke Längeneinheit und eine reciproke Zeiteinheit in sich enthalte. Dieser Satz lautet:

Man denke sich in einem unbegrenzten Körper, dessen Temperatur stationär geworden, und in welchem die Wärme nur nach einer Richtung strömt, zwei auf dieser Richtung senkrechte unendliche Ebenen. Die eine besitze an jeder Stelle die Temperatur *v*, die andere *v'*; ihre Entfernung sei *l*. Dann strömt für das Flächenstück *o* von der einen Ebene zur andern in der Zeiteinheit eine Wärmemenge, welche proportional ist dem Unterschiede *v-v'* und umgekehrt proportional der Entfernung *l*; und zwar ist ihr Werth

$$K \cdot \frac{o \cdot (v-v')}{l}.$$

Wir wollen nun sogleich von diesem Satze eine Anwendung machen, die später bei der Bildung der Differentialgleichung gebraucht wird, nämlich die Wärmemenge bestimmen, die bei einer beliebigen Temperaturvertheilung durch die Einheit eines Querschnittes in der Zeiteinheit hindurchströmt. Wir nehmen die Dicke des Querschnitts so gering an, dass innerhalb desselben die Temperatur als lineäre Function der Entfernung angesehen werden kann. Die Temperatur sei im Allgemeinen *v*, so ist der Temperatur-Unterschied der beiden den Querschnitt begrenzenden parallelen Ebenen, wenn die Dicke desselben *dx* ist (die Richtung von *x* soll die der gemeinschaftlichen Normale sein)

$$\frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx;$$

ferner ist

$$l = dx.$$

Die übrigen Grössen sollen Einheiten vorstellen, so dass also mit Ergänzung derselben die durchströmende Menge

$$K \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx \quad \text{oder} \quad K \frac{\partial v}{\partial x}$$

beträgt.

Wird nun die Tiefe mit x , die Mitteltemperatur in derselben mit V_x , die (mittlere) Temperatur des n^{ten} Monats mit $v_{x,n}$, endlich der Zeitraum eines Jahres mit i bezeichnet, so ist nach der *Fourier'schen* Theorie:

$$v_{x,n} = V_x + A e^{-\sqrt{\frac{\pi}{i}} \cdot \frac{x}{k} \sin \left\{ 30^\circ (n - \frac{6}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{i}} \cdot \frac{x}{k} + \alpha) \right\}} \\ + B e^{-\sqrt{\frac{2\pi}{i}} \cdot \frac{x}{k} \sin \left\{ 60^\circ (n - \frac{3}{\pi} \sqrt{\frac{2\pi}{i}} \cdot \frac{x}{k} + \beta) \right\}} \\ + \text{etc.},$$

in welchem Ausdrücke A , B , α , β Constanten sind, und k^2 die Bedeutung hat $k^2 = \frac{K}{SD}$. Begnügt man sich hier mit zwei Gliedern, legt die Formel den Beobachtungen unter (sucht dieselben also auf die Form zu bringen:

$$v_{x,n} = V_x + A' \sin(30n + \alpha') + B' \sin(60n + \beta')$$

was durch die Arbeit von Herrn Oberlehrer *Schumann* geleistet ist) und vergleicht die Resultate für verschiedene Tiefen, so hat man ein Mittel, um die Grösse k zu bestimmen. Hierbei ergibt sich für die Einheiten Fuss und Jahr etwa

$$k^2 = 304.$$

Die äussere Leitungsfähigkeit ist sehr klein und wird ebenso wie etwaige andere Constanten erst, falls sie benutzt werden sollen, angegeben werden.

§ 4.

Als physikalische Voraussetzung der folgenden Betrachtungen soll nun hauptsächlich eine constante Temperatur der Oberfläche gelten, welche entweder immerfort (bis über den äussersten Zeitpunkt der Beobachtung hinaus) wirken, oder nur eine bestimmte Zeit andauern und dann verschwinden kann. Sollten sich andere Annahmen für unsere Betrachtungen als interessant erweisen, so können wir sie an der betreffenden Stelle versuchend, eintreten zu lassen.

Und so will ich es denn wagen, die wohlwollenden Leser einen Weg zu führen, der mir auf der ersten einsamen Wanderung nicht unerquicklich deuchte, und welcher in einigen Stellen interessante Umsichten zu gewähren schien.

I. Die Bedingungen, die Differentialgleichung und ihre Integration. Discussion der Wärmecurve für eine bestimmte Tiefe.

§ 5.

Man denke sich eine Kugel mit sehr grossem Halbmesser, oder einen Körper, begrenzt von einer unendlichen Ebene und von endloser Tiefe. Seine ganze Oberfläche stehe unter der Wirkung einer dauernd festen Temperatur, d. h. also physikalisch: die Stelle (Kreis) der Oberfläche, welche dieselbe Temperatur hat, sei so gross, dass für die in ihrem Mittelpunkt errichtete Verticale die Temperaturen der diese Stelle einschliessenden Ringe ohne Einfluss seien. Die Strömung der Wärme geschehe also nur in einer Richtung, nämlich vertical gegen die Oberfläche. Um das Problem physikalisch zu bestimmen, müsste noch der Temperaturzustand des ganzen Körpers (der jedoch, um das Problem nicht ganz zu verändern, gleichfalls nur in der Richtung der Normale variiren dürfte) für den Beginn der Zeitperiode gegeben sein; für unsere Zwecke genügt es, ihm zu Anfang der (Beobachtungs-) Zeit die Temperatur 0° zu ertheilen und dann plötzlich zugleich mit dem Beginne der Zeitrechnung die constante Temperatur an der Oberfläche eintreten zu lassen. Die Frage ist nun: Wie wird unter diesen Bestimmungen die Temperatur in einer beliebigen Tiefe und in einem beliebigen Zeitpunkte sein?

Wir bezeichnen die Tiefe mit x , die Zeit mit t , die Temperatur mit v . Denkt man sich nun ein Prisma im Innern des Körpers, dessen Oberfläche o parallel der des Körpers ist und mit der Höhe dx , so wird seine Temperatur im Laufe der Zeit höher werden; diese Temperaturerhöhung wollen wir suchen. Dieselbe ist gleich dem Unterschiede der Wärmemengen, welche durch die auf die Richtung des Stromes senkrechten Endflächen in das Prisma hinein- und hinausströmen, dividirt durch die Wärmemenge, welche nöthig ist, den Raum des Prismas um einen Grad zu erhöhen. Die hineinströmende Menge ist (nach der betreffenden Stelle in § 3)

$$K \frac{\partial v}{\partial x}$$

oder vielmehr, weil wir annehmen wollen, der Strom geschehe in der Richtung des zunehmenden x (so dass also die Temperatur mit wachsendem x abnimmt)

$$-K \frac{\partial v}{\partial x}$$

für die Einheit der Fläche und der Zeit, also für die Oberfläche o und das Zeitelement dt

$$-K \frac{\partial v}{\partial x} \cdot o \cdot dt.$$

Setzt man hierin $x + dx$ statt x , so hat man die durch die parallele Endfläche ausströmende Wärmemenge

$$-K \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \delta x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) o \cdot dt.$$

Der Unterschied ist

$$K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot o \cdot dt \cdot \delta x.$$

Die Wärmemenge, welche erforderlich ist, das Prisma um 1° zu erhöhen, ist, wenn $S.D$ die spezifische Wärme bezeichnet,

$$S.D.o.\delta x,$$

folglich die Temperaturerhöhung

$$\frac{K.o.\delta x}{S.D.o.\delta x} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot dt, \text{ d. i. } \frac{K}{S.D} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dt.$$

Dieselbe ist aber für das Zeitelement $\frac{\partial v}{\partial t} dt$, daher hat man die Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} \cdot dt = \frac{K}{S.D} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \cdot dt,$$

oder wenn man $\frac{K}{S.D} = k^2$ setzt und den Factor dt auf beiden Seiten fortlässt,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots \dots \dots (1).$$

Hiezu treten noch die Bedingungen

$$x = o \quad v = C \dots \dots \dots (2)$$

$$t = o \quad v = o \dots \dots \dots (3)$$

Um diese Gleichungen zu integrieren, ist der, so zu sagen, logische Weg, dass man v nach Potenzen von x fortschreiten lässt, die Coefficienten als Functionen der Zeit bestimmt (wobei auch die Bedingungsgleichungen zu benutzen sind) und dann die Reihe durch ein Integral zu summieren sucht. Der hier folgende Weg setzt schon voraus, dass v nur eine Function von $\frac{x}{\sqrt{t}}$ ist, welche Voraussetzung durch den Erfolg gerechtfertigt wird. Man setze:

$$\frac{x}{\sqrt{t}} = y$$

$$\text{und} \quad v = f(y)$$

$$\text{so ist} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = f' y \cdot \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{x}{t\sqrt{t}} \cdot f' y$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f' y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{t}} \cdot f' y$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\partial f' y}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{t} \cdot f'' y.$$

Daher geht die Gleichung (1) über in

$$-\frac{1}{2} \frac{x}{t\sqrt{t}} \cdot f' y = k^2 \cdot \frac{1}{t} f'' y.$$

Hier hebt sich ein t im Nenner auf beiden Seiten fort und man erhält

$$-\frac{1}{2} y \frac{\partial f}{\partial y} = k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Setzt man $\frac{\partial f}{\partial y} = F$, so erhält man, wenn die ersten Buchstaben des Alphabetes Constanten bedeuten:

$$y dy = -2k^2 \frac{dF}{F}$$

$$\log F = -\frac{y^2}{4k^2} + \frac{a}{k^2}$$

$$F = b \cdot e^{-\frac{y^2}{4k^2}}$$

$$\begin{aligned} f &= \int F dy = b \int_0^y e^{-\frac{y^2}{4k^2}} dy + c \\ &= d \int_0^{\frac{y}{2k}} e^{-z^2} dz + c \end{aligned}$$

Also ist:

$$v = c + d \int_0^{\frac{x}{2k\sqrt{t}}} e^{-z^2} dz$$

wo c und d durch die Gleichungen (2) u. (3) zu bestimmen sind.

Es sei nun, welche Bezeichnung wir auch später beibehalten wollen:

$$X_1 \dots \dots \dots \frac{x}{2k\sqrt{t}} = \sigma$$

und

$$X_2 \dots \dots \dots \sqrt{\pi} \int_0^{\sigma} e^{-z^2} dz = G(\sigma)$$

wo also

$$X_3 \dots \dots \dots G(o) = o; G(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

ist. Dann ist

$$v = c + e G(\sigma).$$

Nun ist nach (2) für $x = o$ oder $\sigma = o : v = C$, also

$$C = c$$

nach (3) für $t = o$ oder $\sigma = \infty : v = o$, also

$$o = C + e \cdot \frac{\pi}{2}; \quad e = -\frac{2C}{\pi}$$

Daher ist

$$\odot \dots \dots \dots v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G(\sigma) \right)$$

§ 6.

Wir wollen nun eine bestimmte Tiefe nehmen und die Zeit allmählich wachsen lassen; welchen Verlauf wird dann die Wärmecurve nehmen?

Es ist also

$$v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G(\sigma) \right).$$

Für $t = o$ ist auch $v = o$, für $t = \infty$ ist $\sigma = o$, also $v = C$.

Jede Tiefe nimmt also nach unendlich langer Zeit die Temperatur der Oberfläche an.

Tragen wir nun t als Abscisse auf und das zugehörige $\frac{\pi}{2} - G(\sigma)$, was wir mit $g(\sigma)$ bezeichnen wollen, als Ordinate, so bilde die Curve $g(\sigma)$ mit der Ordinate in jedem Punkte den (variablen) Winkel α ; dann ist:

$$\cotang \alpha = \frac{dg(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{dG(\sigma)}{d\sigma}.$$

Nun ist

$$\frac{dG(\sigma)}{d\sigma} = \frac{dG(\sigma)}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt}$$

d. i. nach den Gleichungen X § 5:

$$\begin{aligned} \frac{dG(\sigma)}{dt} &= -\sqrt{\pi} e^{-\sigma^2} \frac{x}{4kt \cdot \sqrt{t}} \\ &= -\frac{\sqrt{\pi} \sigma}{2t} e^{-\sigma^2} \end{aligned}$$

also

$$\cotang \alpha = \frac{\sqrt{\pi} \sigma}{2t} e^{-\sigma^2} \dots \dots \dots (1)$$

Die Cotangente ist also positiv, daher ist der Winkel α immer ein spitzer, die Curve $g(\sigma)$ hat also kein Maximum, sondern wächst von 0 bis $\frac{\pi}{2}$. Die Cotangente kann aber ein Maximum erreichen, denn, setzt man ihren Differentialquotienten nach der Zeit gleich 0, so erhält man:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\sigma^2} \left(\frac{1-2\sigma^2}{t} \cdot \frac{d\sigma}{dt} - \frac{\sigma}{t^2} \right) = 0,$$

d. i. mit Weglassung der gleichen Factoren (deren Verschwinden nur den Anfangs- und End-Werth der Curve angibt):

$$-\frac{1-2\sigma^2}{2} - 1 = 0.$$

Hieraus folgt:

$$\sigma_w^2 = \frac{3}{2},$$

indem wir jeder Grösse, die sich auf diese Stelle bezieht den Index w zufügen wollen. Für diese Stelle hat die Cotangente den grössten, also der Winkel α den kleinsten Werth. Dies ist also ein Wendepunkt der Curve. Die Ordinate dieses Punktes hat den Werth:

$$\frac{\pi}{2} - G(\sqrt{\frac{3}{2}});$$

sie ist also unabhängig von Zeit und Tiefe.

Nun ergibt sich folgender Verlauf der Wärmecurve:

$$v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G(\sigma) \right).$$

Am Anfange der Wirkung ist die Temperatur in jeder Tiefe 0. Dann steigt sie, und zwar am Anfange langsam, dann immer schneller (der Winkel α wird immer kleiner) bis die Temperatur $\frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G(\sqrt{\frac{3}{2}}) \right)$, d. i. etwa $\frac{1}{12}C$, erreicht ist.

Von da an nimmt sie wieder in langsamerer Art zu, bis sie endlich die Grenze C erreicht.

Dieser Wendepunkt tritt aber nicht in allen Tiefen zur selben Zeit ein, sondern es ist:

$$\sigma_w^2 = \frac{x^2}{4k^2 t_w}$$

also:

$$t_w = \frac{x^2}{4k^2 \sigma_w^2} = \frac{x^2}{6k^2} \dots \dots \dots (2)$$

Die Zeit ist also proportional mit dem Quadrat der Tiefe.

Ebenso ist auch der Winkel, den die Curve mit der Ordinate bildet immer ein verschiedener, nämlich:

$$\cotg \alpha_w = \frac{\sqrt{\pi} \sigma_w}{2t_w} e^{-\sigma_w^2}$$

oder

$$\tan \alpha_w = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\pi} e^{\frac{1}{2}} \cdot t_w \dots \dots \dots (3)$$

also proportional mit der Zeit oder auch proportional mit dem Quadrate der Tiefe.

§ 7.

Soll nun die Wirkung von C an der Oberfläche zur Zeit

$$t = d$$

aufhören, so kann man sich vorstellen, dass von da an zur Temperatur C noch die entgegengesetzte $-C$ hinzutrete. Dann ist der Theil von v , der von dem alten C herrührt:

$$\frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right),$$

und hierzu kommt dann noch:

$$-\frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) \right).$$

Folglich ist für Zeiten später als d :

$$v = \frac{2C}{\pi} \left\{ G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right\} \dots \dots (1)$$

Für den Augenblick, dass $t = d$ ist, hat die erste G -Function in der Formel (1) das Argument ∞ , ist also (§ 5, X)

dem Werthe nach $\frac{\pi}{2}$, so dass also während an der Oberfläche der Sprung von C zu 0 Statt findet, im Innern der continuirliche Verlauf nicht gestört wird.

An die Formel (1) lässt sich eine interessante Frage*) anknüpfen:

*) Des leichteren Überblicks wegen werde ich solche Fragen (und Thesen), die sich selbstständiger aus dem allgemeinen Raisonnement herausheben, auch durch die Schrift und durch Nummern etwas kenntlicher machen.

- 1) Wenn die Temperatur C an der Oberfläche eine Zeit lang gewirkt hat und nun aufhört, wird dann im Innern des Körpers in diesem Momente das Maximum der Wirkung eingetreten sein, oder zu welcher Zeit wird dieses in einer bestimmten Tiefe erreicht werden?

Zur Beantwortung dieser Frage ist es förderlich, eine kleine bildliche Darstellung für die Temperaturveränderung zu entwerfen. Es ist, wenn $t \leq d$ ist:

$$v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G \left(\frac{x}{2k\sqrt{t}} \right) \right);$$

wenn $t \geq d$ ist,

$$v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G \left(\frac{x}{2k\sqrt{t}} \right) \right) - \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G \left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}} \right) \right).$$

Zeichnet man also die Curve $\frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G \left(\frac{x}{2k\sqrt{t}} \right) \right)$ als Ordinate (zur Abscisse t) hin und wiederholt sie noch einmal von dem Punkte $t = d$ an (Fig. 1), so wird v dargestellt zuerst durch die Ordinaten der einen Curve, und von $t = d$ an durch die Differenz der Ordinaten. Bis zu $t = d$ wächst die Temperatur, von da an aber ist zu untersuchen, ob und wo die Differenz ein Maximum erreicht.

Trete zuerst die zweite Curve vor dem Wendepunkte der ersten ein, so dass also d kleiner ist, als das zu dieser Tiefe gehörende t_w ; dann nehmen kurz nach dem Wendepunkte der ersten Curve ihre Ordinaten schneller zu, als die der andern, also wächst die Differenz; kurz vor dem Wendepunkte der zweiten Curve (diese beiden Wendepunkte sind ebenso wie die Fusspunkte der Curven um die Zeit d von einander entfernt), nehmen die Ordinaten der ersten Curve langsamer zu, als die der anderen, also nimmt die Differenz ab: sie wird am Grössten sein an der Stelle, wo die beiden Curven (welche im Allgemeinen zwischen den Wendepunkten gegen einander gewölbt sind) parallel erscheinen. Die Abscisse, welche dieser Ordinaten-Differenz entspricht, ist also die Zeit der höchsten Temperatur (in der betrachteten Tiefe). Sie möge im Folgenden durch T bezeichnet werden.

Tritt nun die zweite Curve nach dem Wendepunkte der ersten ein, so wird — besonders wenn dieser Eintritt nach verhältnissmässig langer Zeit geschieht — die Zeit des Maximums weiter zurück nach dem Anfange dieser zweiten Curve rücken, und bei noch längerer Wirkungsdauer sich kaum merklich von derjenigen, in der die Wirkung an der Oberfläche aufhört, unterscheiden. Will man nun die Zeit des Maximums genau finden, so muss man die Cotangenten der Winkel gleich setzen, den die beiden Curven mit derselben Ordinate bilden, d. i. also, wenn man das auf die zweite Curve Bezügliche mit dem Index 1 versteht:

$$\cotang \alpha = \cotang \alpha_1,$$

d. i., wenn man dafür den Werth setzt (§ 6, Gleichung (1)):

$$\frac{\sqrt{\pi} \sigma}{2t} e^{-\sigma^2} = \frac{\sqrt{\pi} \sigma_1}{2(t-d)} e^{-\sigma_1^2} \dots \dots \dots (2)$$

worin:

$$\sigma^2 = \frac{x^2}{4k^2 t}, \quad \sigma_1^2 = \frac{x^2}{4k^2 (t-d)}$$

bedeutet. Multiplicirt man beide Seiten der Gleichung (2)

mit $\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{x^2}{2k^2}$, so lässt sie sich noch bequemer schreiben:

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} = \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2} \dots \dots \dots (3)$$

Hat man ein t gefunden, das der Gleichung (3) genügt, so ist dies die Zeit des Maximums T .

Ist aber bei dem eingesetzten Werthe von t

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} > \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2}$$

und daher auch

$$\cotang \alpha > \cotang \alpha_1,$$

so ist — weil $\cotang \alpha$ (nach dem Wendepunkte) mit wachsendem t abnimmt, $\cotang \alpha_1$ (vor demselben) mit wachsendem t zunimmt — der Werth von t zu vergrössern; umgekehrt wenn sich ergibt, dass

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} < \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2},$$

so ist der Werth von t zu verkleinern.

Um noch ein wenig mehr über die Lage von T zu erfahren, wollen wir sehen, ob es wohl eine Wirkungsdauer d geben kann, bei der T gerade in die Mitte zwischen beide Wendepunkte fällt.

Dann ist also:

$$T = t_w + \frac{d}{2}, \quad T-d = t_w - \frac{d}{2} \dots \dots \dots (4)$$

Nun schreibe man die Gleichung (3) in folgender Form:

$$e^{-(\sigma_1^2 - \sigma^2)} = \frac{\sigma^3}{\sigma_1^3} \dots \dots \dots (5)$$

Hierin ist:

$$\frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} = \frac{t_w - \frac{1}{2}d}{t_w + \frac{1}{2}d} \quad \sigma_1^2 - \sigma^2 = \frac{x^2}{4k^2} \cdot \frac{d}{t_w^2 - \frac{1}{4}d^2}.$$

Nun ist aber (§ 6, Gleichung (2)):

$$t_w = \frac{x^2}{6k^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{4k^2},$$

also ist, wenn man der Kürze wegen

$$\frac{x^2}{4k^2} = z$$

setzt:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^2}{\sigma_1^2} &= \frac{\frac{2}{3}z - \frac{1}{2}d}{\frac{2}{3}z + \frac{1}{2}d} & \sigma_1^2 - \sigma^2 &= z \cdot \frac{d}{\frac{2}{9}z^2 - \frac{1}{4}d^2} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{4}\frac{d}{z}}{1 + \frac{3}{4}\frac{d}{z}} & &= 3 \cdot \frac{\frac{3}{4}\frac{d}{z}}{1 - \left(\frac{3}{4}\frac{d}{z}\right)^2} \end{aligned}$$

Um nun einen leichteren Überblick über die Gleichung (5) zu erhalten, ist es gut, zu setzen:

$$\frac{3}{2} \frac{d}{z} = \cos \varphi \dots \dots \dots (6)$$

Dann ergibt sich:

$$e^{-3 \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \tan \frac{1}{2} \varphi$$

oder:

$$e^{-\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \tan^3 \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots (7)$$

Diese Gleichung hat nur zwei Wurzeln: *)

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Für die ersten haben beide Seiten den Werth 0, für die letzten den Werth 1. Dazwischen ist immer:

$$e^{-\frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} < \tan \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots (8)$$

Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist $d = 0$, also wenn d sehr klein ist, wird die Zeit des Maximums nahe in die Mitte zwischen beide Wendepunkte fallen.

Setzt man nun in die Ungleichung (8) die früheren Zeichen zurück, so ergibt sich (vergl. Gleichung (5)):

$$e^{-(\sigma_1^2 - \sigma^2)} < \frac{\sigma^3}{\sigma_1^3} \dots \dots \dots (9)$$

und zwar geschieht dies unter der Annahme (4):

$$T = t_w + \frac{d}{2}.$$

Nun folgt aus der Ungleichung (9):

$$\sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2} < \sigma^3 e^{-\sigma^2}$$

oder:

*) Nimmt man die etwas allgemeinere Gleichung:

$$e^{-\alpha \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} = \tan \frac{1}{2} \varphi \dots \dots \dots (7a)$$

und betrachtet man beide Seiten als Curven:

$$e^{-\alpha \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi}} = L \quad \tan \frac{1}{2} \varphi = R,$$

so ist ihr Verlauf (wie man aus dem Differentialquotienten nach φ [dem Werthe der Cotangenten ihres spitzen Winkels mit der Verticalen] leicht sieht) folgender: Beide Curven beginnen mit dem Werthe 0; dann bleibt L unterhalb R , und verharrt auch in dieser Lage wenn $\alpha \geq 1$ ist, bis sich beide Curven wieder im Werthe 1 für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ vereinigen. Ist indess α ein ächter Bruch, so beginnt zwar L wieder unterhalb R , erhebt sich aber über R und erreicht in dieser Lage (ohne etwa über ein Maximum hinauszusteigen) mit R gleichzeitig den Werth 1; so dass also in diesem Falle ($\alpha < 1$) die Gleichung (7a) noch eine Wurzel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ hat.

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} > \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2},$$

folglich ist nach der früher angegebenen Regel die Zeit zu vergrössern und daher muss immer:

$$T > t_w + \frac{1}{2} d$$

sein.. (Der Werth $\varphi = 0$, d. i. $d = 2 t_w$, ist nicht zu benutzen, indem für diesen beide Seiten der Gleichung (7) verschwinden und sie sich nicht ohne Fehler auf die Gleichung (5) zurückführen lässt.)

Man könnte nun also etwa Folgendes als Antwort auf die Frage nach der Zeit des Maximums erwidern:

1a) Die Zeit des höchsten Temperaturwerthes liegt zwischen den Wendepunkten der beiden Curven, und zwar immer näher demjenigen der zweiten; ist die Wirkungsdauer ziemlich klein, so fällt sie nahe in die Mitte der Wendepunktszeiten; übersteigt dieselbe das Doppelte der Zeit, des ersten Wendepunktes, so unterscheidet sich die Zeit des Maximums wenig von der Endzeit der Wirkungsdauer.

II. Darstellung der Tagestemperatur in einer gewissen Tiefe nach Beobachtungen an der Oberfläche des Bodens.

§ 8.

Die Betrachtungen dieser Arbeit beziehen sich auf einen Körper, der von einer unendlichen Ebene begrenzt wird, und deren Temperatur zwar mit der Zeit sich ändern kann, indessen für die ganze Oberfläche immer dieselbe ist. Die Eigenthümlichkeit dieser letzten Bedingung zeigt sich darin, dass die Strömung der Wärme nur in einer Richtung, normal gegen die Oberfläche geschieht. Für die physikalische Anwendung wird es daher genügen, wenn statt der ganzen Oberfläche nur ein Theil derselben sich in gleicher Temperatur befindet, indem wenn dieser nur genügend gross ist, die etwaigen Seitenströmungen der Wärme gegen den Normalstrom für die Beobachtung verschwindend klein sein werden. Mit dieser Ansicht im Zusammenhang ist es dann auch nur erforderlich, dass derjenige Theil der Oberfläche, der dieselbe Temperatur besitzt, eben sein muss.

Man wird nun annehmen dürfen, dass unser Erdboden die Eigenschaften der eben geschilderten Oberfläche besitzt, und insofern der Erdkörper für die Anwendung der theoretischen Principien nicht ungeeignet ist. Ist daher die Temperatur des Erdbodens an einer Stelle, die aber in gehörigem Umfange denselben Bedingungen rücksichtlich der Wärmeempfangniss ausgesetzt sein muss, durch Beobachtungen festgestellt, so muss hieraus die Temperatur in einer beliebigen Tiefe mittelst der früheren Formeln gefunden werden können. Dieses soll jetzt versucht werden.

§ 9.

Für eine nur zeitweise andauernde Temperatur gilt die Formel (§ 7, (1)):

$$v = \frac{2C}{\pi} \left\{ G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right\}.$$

Tritt nun an Stelle der verschwundenen Temperatur $-C$ — eine andere $-C_1$ —, welche die Zeit d_1 hindurch anhält, so tritt noch ein ähnliches Glied additiv hinzu, worin statt der Zeit t $t-d$, und statt der Zeitdauer d d_1 zu schreiben ist, also:

$$\frac{2C_1}{\pi} \left\{ G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d-d_1}}\right) - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) \right\}.$$

Ebenso kann man weiter gehen, und also z. B. die Wirkung der zehn ersten Tage eines Monats auf den zehnten (in einer bestimmten Tiefe) zusammensetzen aus der Temperaturwirkung des zehnten selbst und der neun verflossenen Tage. Nur muss man nicht ausser Acht lassen, dass die wirkliche Temperatur dieses zehnten Tages, ausser diesen Factoren noch die Wirkung der ganzen vorangegangenen Periode in sich trägt.

Für die Rechnung habe ich mir zwei vierstellige Tafeln entworfen, eine, in der man zu dem Brigg. Logarithmus von x den Brigg. Logarithmus von e^{-x} findet (Tafel I.), und die andere für das Integral $G(\sigma)$ (Tafel II.). Es giebt eine siebenstellige Tafel für das Integral

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma e^{-u^2} du$$

in *Encke's* Astr. Jahrbuch für 1834, worin σ von 0,00 bis 2,00 durch alle Hundertheile zunimmt. Für unsern Gebrauch ist aber diese vierstellige Tafel bequemer, indem sie als Argument den Brigg. Logar. von σ^2 enthält, und dieser von 1,00 bis 8,00—10 abnimmt, auch bei uns das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\sigma e^{-u^2} du$ immer zur Anwendung kommt. (In Bezug auf kleinere Argumente, sowie für den Gebrauch überhaupt vergl. die Anmerkungen zu diesen Tafeln.)

Als erstes Beispiel wollen wir Beobachtungen in Brüssel, als zweites Beobachtungen in Königsberg nehmen. In beiden wollen wir aber eine geringe Tiefe als Oberfläche betrachten, was für die Behandlung des Problems von keinem weitem Einflusse sein kann, da ja nicht die Ausstrahlung in Rechnung gezogen, sondern die Temperatur der Oberfläche selbst als bestimmt angenommen wurde.

§ 10.

Brüssler Beobachtungen.

Zuerst müssen wir die Grösse k^2 zu erhalten suchen. Dies geschieht durch die Benutzung der *Fourier'schen* Formel für die periodische Temperatur (s. Einl. § 3):

$$v_{x,n} = V_x + A' \sin(30n + \alpha') + B' \sin(60n + \beta').$$

Es ergibt sich nun aus den Brüsseler Beobachtungen (Ann. Bd. IV., S. 173) nach unserer Bezeichnung:

$\log A' = 0,82152 - 0,03992 x$; $\log B' = 1,77702 - 0,07766 x$,
worin x in Pariser Fuss ausgedrückt werden muss.

Aus diesen Formeln folgt:

$$\sqrt{\frac{\pi}{i}} \frac{1}{k} = 0,03992 - \log e; \quad \sqrt{\frac{2\pi}{i}} \frac{1}{k} = 0,07766 - \log e$$

und man findet daraus:

$$\sqrt{\frac{\pi}{i}} \frac{1}{k} = 0,093 \quad \sqrt{\frac{\pi}{i}} \frac{1}{k} = 0,286$$

in Pariser Fuss. in Meter.

Daraus hat man dann weiter für verschiedene Einheiten:

$$\lg\left(\frac{1}{4k^2}\right) = 7,8144 \quad \lg\left(\frac{1}{4k^2}\right) = 8,8936 \quad \lg\left(\frac{1}{4k^2}\right) = 0,3767$$

in Meter u. Jahr. in Meter u. Monat in Meter u. Tag

Wir nehmen nun statt der Oberfläche die Temperatur in der Tiefe $0^m 19$, — in diesen Beobachtungen ist das Längenmaass der Meter, und die Thermometerscala die hunderttheilige, — und wollen berechnen:

die Temperatur im Juni 1835 in der Tiefe $0^m 75$.

Die Rechnung zerfällt in zwei Theile. Der erste bestimmt die Nachwirkung des Jahres Juni 1834 bis Mai 1835; der zweite die Wirkung der Tage des Monats Juni selbst. (Noch weiter als ein Jahr zurückzugehen, zeigt sich als unnöthig.) Ferner habe ich wegen der Weitläufigkeit der Rechnung nur die Temperatur am Ende jedes dritten Tages gesucht. Als Tiefe endlich ist anzunehmen:

$$x = 0,75 - 0,19 = 0,56$$

$$\log x = 9,7482.$$

1) Es würde durchaus nicht statthaft sein, die Mitteltemperatur des ganzen vorigen Jahres hierbei in Anwendung zu bringen, sondern es müssen die einzelnen Monatsmittel genommen werden (und für die ersten Tage des Juni könnte man eigentlich noch specieller verfahren). Die Zeiteinheit ist also hier der Monat, so dass eine Periode von drei Tagen als $\frac{1}{10}$ der Einheit erscheint.

Soll nun die Endtemperatur des Mai 1855 gefunden werden, so tritt als erster Summand auf: die Wirkung der Mai-Temperatur nach einmonatlicher Dauer also:

$$\frac{2C_1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{0,56}{3,575 \cdot 1}\right) \right)$$

oder, wie wir, wenn kein Missverständniss entstehen kann, schreiben wollen:

$$\frac{2C_1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G\{1\} \right).$$

Hiezu tritt die Wirkung des April nach monatlicher Zwischenzeit, also:

$$\frac{2C_2}{\pi} (G\{1\} - G\{2\}),$$

weiter noch:

$$\frac{2C_3}{\pi} (G\{2\} - G\{3\})$$

und in ähnlicher Weise weiter fort bis endlich zum Juni des vorigen Jahres:

$$\frac{2C_{12}}{\pi} (G\{11\} - G\{12\}).$$

Soll nun die Wirkung des vorangegangenen Jahres auf die Endtemperatur des 3^{ten} Juni untersucht werden, so reicht die Wirkungsdauer an der Oberfläche (unter diesem Ausdrucke ist hier immer die Tiefe 0^m,19 zu verstehen) nicht unmittelbar an diesen Termin heran, daher ist das betreffende Glied,

d vom Mai abhängt, nicht $\frac{2C_1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G\{1,1\} \right)$, sondern $\frac{2C_1}{\pi} (G\{0,1\} - G\{1,1\})$.

Der zweite Summand ist ebenso $\frac{2C_2}{\pi} (G\{1,1\} - G\{2,1\})$

und so weiter fort bis $\frac{2C_{12}}{\pi} (G\{11,1\} - G\{12,1\})$.

Ganz ähnlich ist nun auch die Wirkung auf den 6^{ten}, 9^{ten} Juni etc. zusammenzusetzen, nur dass im Argument zu den Ganzen nicht $\frac{1}{10}$, sondern $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ u. s. w. hinzutreten. — Für den 30^{sten} Juni sind die verschiedenen Summanden:

$$\frac{2C_1}{\pi} (G\{1,0\} - G\{2,0\})$$

$$\frac{2C_2}{\pi} (G\{2,0\} - G\{3,0\})$$

.....

$$\frac{2C_{12}}{\pi} (G\{12,0\} - G\{13,0\})$$

die Wirkung des Jahres Juni 1834 bis Mai 1835 auf die Endtemperatur des Mai $14,982 \frac{2}{\pi}$

3 ^{ten} Juni	:	7,119	:
6 ^{ten}	:	4,922	:
9 ^{ten}	:	3,897	:
12 ^{ten}	:	3,275	:
15 ^{ten}	:	2,778	:
18 ^{ten}	:	2,474	:
21 ^{sten}	:	2,245	:
24 ^{sten}	:	2,042	:
27 ^{sten}	:	1,874	:
30 ^{sten}	:	1,750	:

Die ersten neun Zahlen der ersten Horizontalreihe finden für uns hier keine Anwendung: sie geben die Wirkung nach 3-, 6-, 9-..., 27tägiger Dauer an. Interessant ist es indess, was man aus dem Vergleich der beiden ersten Zahlen in der ersten und zweiten Horizontalreihe sieht, dass für diese Tiefe (0^m,56) eine dreitägige Wirkungsdauer noch von grösserem Einflusse ist, als eine monatliche, wenn seit dem Ende

Die Werthe dieser Monatsmittel selbst sind nun (Annal. Bd. 1 oder 4):

Mitteltemp. d. Juni 1834 i. d. Tiefe 0^m,19 d. i. $C_{12} = 15,52^\circ \text{C.}$

Juli	$C_{11} = 17,97^\circ$
Aug.	$C_{10} = 17,60^\circ$
Sept.	$C_9 = 14,78^\circ$
Octbr.	$C_8 = 11,09^\circ$
Novbr.	$C_7 = 6,79^\circ$
Decbr.	$C_6 = 5,21^\circ$
Jan. 1835	$C_5 = 4,54^\circ$
Febr.	$C_4 = 5,54^\circ$
März	$C_3 = 5,23^\circ$
April	$C_2 = 7,61^\circ$
Mai	$C_1 = 10,42^\circ$

Die für die Rechnung erforderlichen Differenzen habe ich in der ersten Tabelle so zusammengestellt, dass man sie immer unter der grösseren der beiden Zeiten findet, und zwar sind als Eingänge zur Tafel von oben nach unten die Ganzen, von links nach rechts die Zehntel eingeführt. Es ist ferner noch eine Columnne mit den hier angegebenen Monatsmitteln hinzugefügt, so dass aus der Multiplication derselben (in derselben Horizontalen)

mit d. 1^{sten} Verticalreihe d. Wirkung auf d. Endtemp. d. 3^{ten} Juni
 2^{ten} 6^{ten} Juni

 10^{ten} 30^{sten} Juni

sich ergibt. Nur um die Temperatur von Ende Mai (0^{ten} Juni) zu erhalten, muss man sie um eine Stelle heraufschieben und mit der 10^{ten} Verticalreihe multipliciren. Auf diese Weise erhält man

der Wirkung schon 3 Tage verflossen sind, vorausgesetzt, dass dieselbe Temperatur in beiden Fällen wirkt.

2) Als mittlere Tagestemperatur habe ich die um 12 Uhr Mittags beobachtete angenommen, indem Quetelet angiebt (Bd. IV., S. 152, 153), dass im Monat Juni in der Tiefe 0^m,19 (die wir als Oberfläche betrachten) das Minimum um 9,6 Uhr Morgens, das Maximum um 6,9 Uhr Abends eintrete, und

daher unter den Stunden der Beobachtung (9, 12, 4) die angenommenene noch die günstigste scheint. Da ferner für die Tagestemperatur keine reducirte Beobachtungen angegeben sind, so war noch eine Reduction nöthig. Auf diese Weise erhält man als angenommene Mitteltemperaturen des Tages folgende:

Juni 1	10,48	Juni 16	15,61
2	11,66	17	16,16
3	13,20	18	16,34
4	14,63	19	15,49
5	15,60	20	14,33
6	16,48	21	15,34
7	17,17	22	14,94
8	17,33	23	15,63
9	17,68	24	14,39
10	18,24	25	13,60
11	18,65	26	12,53
12	18,31	27	11,92
13	17,35	28	11,23
14	15,80	29	11,33
15	15,95	30	11,83

Ferner habe ich (mit dem Tage als Zeiteinheit) berechnet die Wirkung einer eintägigen Temperatur-Dauer auf das Ende dieses Tages (der Wirkung) selbst, auf das Ende des 2^{ten}, 3^{ten} . . . 30^{ten} Tages (s. d. 2^{te} Tab.). Auf diese Weise setzt sich z. B. die Wirkung auf den 30^{ten} Juni aus 30 Termen zusammen, nämlich aus der Wirkung des 30^{ten} Juni selbst, der des 29^{ten} (nach der Zwischenzeit von einem Tage) und so fort bis zur Wirkung des 1^{ten} Juni (nach der Zwischenzeit von 29 Tagen). Die Wirkung auf den 27^{ten} Juni wird aus 27 Termen bestehn u. s. w.

Der Gang der Rechnung lässt sich am Kürzesten durch Zeichen darstellen. Bezeichnet man:

die Temperatur des 1^{ten} Juni (an der relativen Oberfläche) mit C_1 (also $C_1 = 10,48$), die des 2^{ten} Juni mit C_2 und so fort bis zur Temperatur des 30^{ten} Juni (C_{30});

bezeichnet man ferner:

das 1^{te} Glied der berechneten Tabelle mit v_1 (also $v_1 = 0,348$), das 2^{te} Glied mit v_2 und auch so fort bis an's Ende;

so setzt sich die Wirkung auf den 30^{ten} Juni zusammen aus:

$$C_{30} \cdot v_1 + C_{29} \cdot v_2 + C_{28} \cdot v_3 + \dots + C_2 \cdot v_{29} + C_1 \cdot v_{30}.$$

Die Wirkung auf den 27^{ten} Juni besteht aus den Gliedern:

$$C_{27} \cdot v_1 + C_{26} \cdot v_2 + \dots + C_2 \cdot v_{26} + C_1 \cdot v_{27}.$$

In ähnlicher Weise geht es weiter fort. Die Wirkung auf den 3^{ten} Juni enthält nur die 3 Glieder:

$$C_3 \cdot v_1 + C_2 \cdot v_2 + C_1 \cdot v_3.$$

Auf diese Weise erhält man die Wirkung der Tagestemperatur des Juni auf diejenige in der angenommenen Tiefe in folgenden Zahlen. Es ist die Wirkung auf das Ende des

Juni 3	$9,168 \frac{2}{\pi}$	Juni 18	$19,797 \frac{2}{\pi}$
6	14,543 :	21	19,279 :
9	17,814 :	24	19,289 :
12	20,049 :	27	17,540 :
15	19,516 :	30	16,483 :

Um nun die wirkliche Temperatur zu erhalten, ist noch das betreffende Glied aus der Wirkung des vorigen Jahres hinzuzufügen; und dann noch die Summe der beiden Glieder mit $\frac{2}{\pi}$ zu multipliciren. — Als günstigste Beobachtung, mit der die hier gewonnenen Resultate zu vergleichen wären, erschien mir die Morgenbeobachtung des folgenden Tages (9 Uhr Morgens), welche auch noch reducirt werden musste. Endlich vermehrte ich die berechnete Temperatur immer um 1 Grad, indem sich für das Jahresmittel 1835 eine ähnliche Differenz zwischen der relativen Oberfläche (0^m19 Tiefe) und der hier betrachteten Tiefe (0^m75) ergibt (es ist das Jahresmittel 1835 für 0^m19 : 9°60, für 0^m75 : 10°50); was anderweitigen Ursachen (in der Temperatur der betreffenden Erdschicht oder Verschiedenheit des 0-Punktes bei den angewandten Thermometern) zuzuschreiben sein mag. Auf diese Weise ergeben sich folgende Zahlen zur Vergleichung:

Red. Beob. um 9 Uhr Morg.		Berechn. (und um 1° vermehrte) für das Ende	
1835 Juni 1	10,6	des Mai	10,5
4	11,5	Juni 3	11,4
7	13,2	6	13,4
10	14,3	9	14,8
13	15,3	12	15,9
16	15,2	15	15,2
19	15,3	18	15,2
22	15,1	21	14,7
25	14,9	24	14,6
28	13,7	27	13,4
Juli 1	13,2	30	12,6
4	13,8	Juli 3	13,7

(die wenigen zur Berechnung des 3^{ten} Juli noch fehlenden Zahlen sind in der dritten Tabelle zusammengestellt.)

Wenn nun auch die einzelnen Zahlen in den beiden Reihen nicht mit einander übereinstimmen, so ist doch der Gang der Temperatur entsprechend; und ich denke, dass man bei der schwankenden Natur der nothwendigen Voraussetzungen, wobei eine genaue Kenntniss der Eigenthümlichkeit des Bodens noch nicht zur Unterstützung benutzt werden konnte, sich mit dieser Art Übereinstimmung vorläufig begnügen könnte.

§ 11.

Königsberger Beobachtungen.

Wir wollen nun noch eine ähnliche Betrachtung an die Beobachtungen anknüpfen, welche in Königsberg während der Jahre 1836—1839 angestellt sind. Man könnte natürlich hierbei ganz denselben Gang der Rechnung verfolgen, den wir so eben angewandt haben. Ich bin indess in einzelnen Punkten davon abgewichen. Als Oberfläche betrachtete ich die Tiefe von 3 Zollen — ich bemerke sogleich, dass hier die Längenheit der preuss. Fuss und die Thermometerscala die *Réaumur'sche* ist — und wählte zum Objecte der Rechnung:

Die Temperatur vom 9^{ten} April bis 8^{ten} Mai 1838
in der Tiefe $1\frac{1}{3}$ '.

Hier ist für Fuss und Jahr: $k^2 = 291^*$) und für Fuss und Tag:

$$\log\left(\frac{1}{4k^2}\right) = 9,4963 - 10.$$

Als Tiefe ist hier anzunehmen:

$$x = 1\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{12}$$

und daraus ergibt sich:

$$\log\left(\frac{x^2}{4k^2}\right) = 9,5631.$$

Der Winter 1837/38 war äusserst strenge, so dass im Februar die Erde bis 4 Fuss hinein gefroren war und die oberste Schicht ($\frac{1}{2}$ Fuss) erst am 9^{ten} April aufzuthauen begann. Wir haben nun diesen Process der Steigerung der Temperatur von 0° an, in der Tiefe $1\frac{1}{3}$ Fuss zu verfolgen. Diese Tiefe befand sich schon geraume Zeit vor dem 9^{ten} April zugleich mit der Erdschicht von 3 Zoll auf dem Frostpunkte, so dass ein etwaiger Wärmeüberschuss des vorigen Jahres mir in dieser Tiefe gleichsam aufgezehrt schien und ich wohl annehmen konnte, die Resultate würden durch Berücksichtigung der vorjährigen Temperatur nicht merklich gewinnen. Es fiel daher hier der erste Theil der für die Brüsseler Beobachtungen nothwendigen Berechnung fort. Ferner habe ich hier nicht die Temperatur von Tage zu Tage wechseln lassen, sondern ich habe angenommen, dass die Temperatur des ersten Tages den ganzen Monat hindurch wirke, dass dann vom zweiten Tage ab der Unterschied der Temperatur vom zweiten gegen den ersten Tag mit einer 29tägigen Wirksamkeit in Kraft trete, dann vom dritten Tage ab wieder seine Temperaturdifferenz gegen den zweiten Tag auftrete und 28 Tage andauere, und so die Temperaturquellen sich in ähnlicher Weise von Tage zu Tage um eine vermehren.

*) Erst später nahm ich $k^2 = 304,4$ an (vgl. § 26, 3)).

Diese Unterschiede sind am Anfange sämmtlich positiv, später sind auch einige vom entgegengesetzten Zeichen. Endlich habe ich als Mitteltemperatur des Tages bei Benutzung! der Beobachtungen das Mittel zwischen den beiden um 6 Uhr Morg. und um 6 Uhr Abends angestellten angesehen, bei den Resultaten der Rechnung das arithmetische Mittel zwischen der Endtemperatur des betreffenden Tages und der Endtemperatur des vorhergehenden.

So ergeben sich aus den Beobachtungen in der angenommenen Oberfläche ($\frac{1}{4}$ Tiefe), welche alle bereits mit der nöthigen Reduction aufgezeichnet worden, folgende Mitteltemperaturen und Unterschiede gegen die Temperatur des vorhergehenden Tages:

Tag	Mitteltemp.	Unterschied
April 8	0,00	
9	0,08	0,08
10	0,47	0,39
11	0,87	0,40
12	1,94	1,07
13	0,83	—1,11
14	0,80	—0,03
15	1,30	0,50
16	1,54	0,24
17	1,90	0,46
18	1,97	0,07
19	2,05	0,08
20	2,58	0,53
21	3,26	0,68
22	4,84	1,58
23	5,29	0,45
24	6,74	1,45
25	5,79	—0,95
26	6,93	1,14
27	6,83	—0,10
28	7,19	0,36
29	4,72	—2,47
30	4,94	0,22
Mai 1	5,06	0,12
2	7,70	2,64
3	10,54	2,84
4	11,48	0,94
5	12,04	0,56
6	12,83	0,79
7	12,28	—0,55
8	10,86	—1,42

Um nun die Wirkung derselben auf die betrachtete Tiefe zu erhalten, ist nur die Formel anzuwenden:

$$v = \frac{2C}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - G(\sigma) \right),$$

nicht die andere, die sich auf das Verschwinden der Temperatur bezieht. Diese Grösse $\left(\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right)$ ist für diese Tiefe mit wachsender Zeit in der 4^{ten} Tabelle aufgestellt.

Bezeichnet man dieselbe mit $v_1, v_2, v_3 \dots$ und die Temperaturunterschiede mit $C_1, C_2 \dots$, so ist die äussere Art der Berechnung ganz so, wie bei den Brüsseler Beobachtungen. Addirt man die betreffenden Glieder (s. S. 19) und multiplicirt jede Summe mit $\frac{2}{\pi}$, so erhält man die Temperaturen am Ende des ersten, zweiten bis zum Ende des 30^{ten} Tages (s. d. 5^{te} Tab.); bestimmt man hieraus (auf die oben angegebene Weise) die Mitteltemperatur des betreffenden Tages, so ergeben sich folgende Zahlen zur Vergleichung:

Mitteltemperatur.

Tag	$\frac{1}{4}$ (Oberfl.)	$1\frac{1}{3}$ beob.	$1\frac{1}{3}$ ber.	Differenz
April 9	0,08	0,02	0,02	
10	0,47	0,02	0,11	
11	0,87	0,02	0,31	
12	1,94	0,01	0,68	
13	0,83	0,01	0,82	
14	0,80	0,02	0,68	
15	1,30	0,02	0,74	
16	1,54	0,03	0,91	
17	1,90	0,03	1,13	
18	1,97	0,05	1,33	
19	2,05	0,14	1,46	1,32
20	2,58	0,21	1,65	1,44
21	3,26	0,49	2,18	1,69
22	4,84	1,02	2,58	1,56
23	5,29	1,32	3,24	1,92
24	6,74	2,02	3,92	1,90
25	5,79	2,58	4,34	1,76
26	6,93	2,74	4,67	1,93
27	6,83	3,36	4,99	1,63
28	7,19	3,80	5,24	1,44
29	4,72	3,69	4,99	1,30
30	4,94	3,25	4,50	1,25
Mai 1	5,06	3,43	4,40	0,97
2	7,70	4,30	4,91	0,61
3	10,54	5,88	6,18	0,30
4	11,48	6,97	7,45	0,48
5	12,04	8,19	8,31	0,12
6	12,83	8,96	9,02	0,06
7	12,28	9,46	9,45	0
8	10,86	9,33	9,34	0

In dem ersten Theile ist hier zwischen den beobachteten und den berechneten Temperaturzahlen ein bedeutender Unterschied zu bemerken. Derselbe kann indess erklärt werden, und zwar aus dem Umstande, dass der Erdboden bis auf eine bedeutende Tiefe gefroren war. Diese Verhältnisse des Frierens und Thauens bieten indess an sich ein so bedeutendes Interesse dar, dass ich mir erlauben werde, diesen Gegenstand im nächsten Abschnitte etwas näher zu betrachten, und hier vorwegzunehmen, was zur Erklärung des erwähnten Unterschiedes dienen könnte.

Der Calcul, dem die angegebenen Zahlen entsprangen, setzt eine ungestörte Mittheilung der Wärme von der Oberfläche an die tieferen Schichten voraus. Es ist aber bis zu dem Augenblicke, dass die Temperatur der Oberfläche sich über den Gefrierpunkt erhebt, auch die darunter belegene Erdschicht, oder, genauer gesprochen, das darin enthaltene Wasserquantum im festen Zustande. So wie nun die Temperatur der Oberfläche sich über 0° erhebt, so wird diese Wärme dazu verbraucht, um die starr gewordenen Wassertheile wieder flüssig zu machen. Es ergibt sich — sowohl durch theoretische Betrachtungen, als vorzüglich durch die Beobachtung — dass die belebende Macht der Wärme am 18^{ten} April bis zur Tiefe von $1\frac{1}{3}$ Fuss gedrungen ist. Die Temperatursumme der Oberfläche bis zu diesem Zeitpunkte ist also vollständig durch den Process des Aufthauens für die betrachtete Tiefe als verloren anzusehen. Daher ist nicht nur für die ersten zehn Tage der Rechnung ihre Wirkung als nicht vorhanden anzusehen, sondern sie müsste auch für die späteren Tage in Abrechnung gebracht werden, indem sie in der obigen Tafel mit berücksichtigt worden war. Denkt man sich nun (da es hier nur auf die Vorstellung im Allgemeinen ankommt), dass die ersten zehn Tage die constante Temperatur 1,17° (das zehntägige Mittel) gewirkt hätte, so ist dieselbe nun in den Resultaten der späteren Tage fortzunehmen oder, was für die Rechnung dasselbe ist, die Wirkung einer zehntägigen Temperatur von -1,17° hinzuzufügen. Dies gäbe (nach den früheren Differenzformeln) z. B. für den 11^{ten} Tag noch das Glied:

$$-\frac{2}{\pi} \cdot 0,6351 \cdot 1,17,$$

$$\text{für den 12^{ten} Tag: } -\frac{2}{\pi} \cdot 0,4080 \cdot 1,17,$$

$$\text{für den 13^{ten} Tag: } -\frac{2}{\pi} \cdot 0,3000 \cdot 1,17,$$

u. s. w.

$$\text{für den 29^{sten} Tag: } -\frac{2}{\pi} \cdot 0,0459 \cdot 1,17,$$

$$\text{für den 30^{sten} Tag: } -\frac{2}{\pi} \cdot 0,0431 \cdot 1,17.$$

Man sieht also, dass die Unterschiede zwischen der berechneten und der wahren Temperatur immer kleiner werden müssen, wie dies auch sich beim Vergleich zwischen Beobachtung und Rechnung kund giebt. Für die ersten Tage zeigt sich indess auch bei der Hinzufügung der obigen negativen Grössen noch immer die berechnete Zahl als zu gross. Dies ist vielleicht dem Umstande zuzuschreiben, dass ich mit der mittleren Leitungsfähigkeit des Jahres rechnete, für diesen durchfeuchteten Boden indess eine kleinere zu wählen gewesen wäre.

Geht man nun von den absoluten Zahlen zu ihrem gegenseitigen Verhältnisse über, so sieht man, dass dasselbe im Ganzen der Beobachtung entsprechend ist. So findet man Steigen und Fallen der Temperatur, bis auf eine Stelle, immer gleichzeitig in Beobachtung und Rechnung. Nur der 1^{ten} Mai giebt in der Rechnung ein Sinken von 4,50 auf 4,40; in der Beobachtung ein Steigen von 3,25 auf 3,43 an. Die Differenz zwischen Beobachtung und Rechnung am 4^{ten} Mai: 0,48 inmitten 0,30 und 0,12 ist vielleicht einer zu niedrig angenommenen Mitteltemperatur in der Beobachtung zuzuschreiben, indem an diesem Tage die Mittagstemperatur — für die betrachtete Tiefe der Regel nach die niedrigste — sich bedeutend über die die Morgentemperatur erhob:

(1 $\frac{1}{2}$ Fuss tief, 4. Mai Morg. 6 Uhr 5,36; Mitt. 12 Uhr 6,91; Abends 6 Uhr 7,50).

Besonders interessant ist es, wenn die Temperatur in der behandelten Tiefe sich gegensätzlich gegen die Oberfläche bewegt. Dies geschieht z. B. am 25^{ten} April:

	Oberfl. ($\frac{1}{4}$ T.)	1 $\frac{1}{2}$ ' beob.	1 $\frac{1}{2}$ ' ber.
April 24	6,74	2,02	3,92
25	5,79	2,58	4,34

und auch sonst öfters, wie man leicht aus unserer Tafel entnehmen kann.

III. Über das Wachsen und Abnehmen der Dicke einer gefrorenen Wasser- oder Erdschicht.

§ 12.

Wir wollen in Hinsicht auf den Process des Zufrierens und Aufthauens folgende einfache Vorstellung zu Grunde legen:

Ein Wasserteich sei bis auf den Grund hin fest zugefroren. Die Temperatur der Oberfläche sei aber bereits bis auf 0° gestiegen und erhebe sich nun plötzlich bis auf die Temperatur von +C, in welcher sie andauernd verharret. In demselben Moment mit dem Eintritte dieser positiven Temperatur wird das Eis an der Oberfläche zu schmelzen beginnen und diese Veränderung des Aggregatzustandes sich immer weiter in das Innere des erstarrten Wasserkörpers fortpflanzen. Es ist die Frage, nach welcher Norm diese Fortpflanzung des Schmelzpunktes vor sich gehen, und welche Temperatur die darüber entstandene Wasserschicht nach und nach annehmen wird.

Wir haben also hier es nur mit der Temperatur der in Wasser verwandelten einstmaligen Eisschicht zu thun. Bezeichnet man diese Temperatur mit v , die veränderliche Tiefe innerhalb der oben gelagerten Wasserschicht mit x , die Zeit vom Eintritte der Temperatur +C an gerechnet mit t , so ist die Differentialgleichung über die Bewegung der Wärme in ihr dieselbe mit der früher abgeleiteten. Als Bedingung tritt dann auch hinzu, dass die Temperatur der Oberfläche constant und zwar +C sein soll, und dass — wenn es zur Anwendung kommen sollte — für den Augenblick des Beginnes von t die Temperatur 0 sein möge. Hierzu tritt noch die Forderung, dass für die Grenze von Wasser und Eis die Temperatur gleichfalls 0 ist; dieser Grenzpunkt ist aber nicht constant, sondern wird — und dies ist das Eigenthümliche dieses Problems — durch eine Differentialgleichung definiert.

Bezeichnet man nämlich die Dicke einer während des Zeitelementes geschmolzenen Eisschicht mit ζ , und mit λ die

latente Wärme des Wassers, das ist diejenige Wärmemenge, welche erforderlich ist, um ein Prisma von Eis mit der Flächeneinheit als Basis und der Längeneinheit als Höhe in ein ebenso grosses Prisma Wasser zu verwandeln: dann ist die Wärmemenge, welche die Eisschicht mit der Dicke ζ schmilzt:

$$\lambda \cdot o \cdot \zeta,$$

wo mit o die Grösse der Oberfläche (Basis der Eisschicht) bezeichnet wird. Diese Wärmemenge wird aus der übergelagerten Wassermasse gezogen und muss gleich derjenigen sein, welche durch den letzten Querschnitt hindurchströmt. Mit wachsendem x nimmt die Temperatur v ab, daher ist die in der Richtung x durch denselben im Zeitelemente durchströmende Wärmemenge:

$$-K \cdot o \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dt,$$

worin K die innere Leitungsfähigkeit bezeichnet. Wir wollen nun die (veränderliche) Grenztiefe mit z bezeichnen, so dass ζ der Zuwachs von z und daher durch dz zu bezeichnen ist, so muss also (mit Fortlassung des Factors o auf beiden Seiten) sein:

$$\lambda \cdot dz = -K \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dt,$$

wo nach der Differentiation für x z zu setzen ist.

Hierdurch erhalten wir folgende Gleichungen zur Lösung unseres Problems, wobei wir die Zeit vom Eintritte der Ursache an der Oberfläche rechnen:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$t = 0] \quad z = 0 \dots \dots \dots (2)$$

$$x = 0] \quad v = C \dots \dots \dots (3)$$

$$x = z] \quad \left\{ \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{K}{\lambda} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=z} \dots\dots\dots (4) \right.$$

$$v = o \dots\dots\dots (5)$$

Ich werde nun diesmal zeigen, wie man wirklich allmählig zu der Auflösung dieser Gleichungen in geschlossenem Ausdruck gelangen kann, ohne eine, nicht vollständig motivirte, Voraussetzung zu Hülfe nehmen zu müssen.

Wir gehen näherungsweise zu Werke. 1) Es sei der Temperaturzustand zwischen o und z schon stationär geworden, so würde sein:

$$v = C - C \frac{x}{z}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (4), so erhält man:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{CK}{\lambda} \frac{1}{z}.$$

Hieraus folgt, da zur Zeit $t = 0$ auch $z = o$ ist:

$$z = \sqrt{\frac{2CK}{\lambda}} \sqrt{t}$$

oder wenn man statt K $S.D.k^2$ schreibt und

$$\frac{S.D.}{2\lambda} \cdot C = a^2 \dots\dots\dots (6)$$

setzt:

$$z = 2k.a.\sqrt{t}.$$

2) Denkt man sich v nach Potenzen von x entwickelt, deren Coefficienten Functionen der Zeit sind, so findet man durch Substitution in die Gleichung (1) und Vergleichung der gleichen Potenzen von x für v den Werth:

$$v = C + \frac{x}{k^2} \cdot \psi + \frac{x^3}{1.2.3.k^4} \frac{d\psi}{dt} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.k^6} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \dots\dots (7)$$

(wobei auch die Gleichung (3) bereits benutzt wurde), in welchem Ausdrücke die Grösse ψ eine noch unbekannte Function der Zeit ist.

Substituirt man diesen Werth in die Gleichung (5) und benutzt für z den vorhergefundenen Werth, so erhält man:

$$o = C + \frac{2a}{k} \sqrt{t} \left\{ \psi + \frac{(2a)^2 t}{1.2.3} \frac{d\psi}{dt} + \frac{(2a)^4 t^2}{1.2.3.4.5} \frac{d^2\psi}{dt^2} + \dots\dots \right\} (8)$$

Dieser Gleichung kann genügt werden durch die Form:

$$\psi = \frac{b}{\sqrt{t}}.$$

Setzt man nämlich diesen Werth in (8) ein, so erhält man:

$$o = C + \frac{2ab}{k} \left\{ 1 - \frac{2a^2}{2.3} + \frac{4a^4}{2.4.5} - \frac{8a^6}{2.4.6.7} + \frac{16a^8}{2.4.6.8.9} \mp \dots \right\}$$

Wird nun für den Augenblick die Parenthese in ein Zeichen zusammengefasst:

$$1 - \frac{2a^2}{2.3} + \frac{4a^4}{2.4.5} - \frac{8a^6}{2.4.6.7} \pm \dots = R(a) \dots (10)$$

so folgt:

$$o = C + \frac{2ab}{k} R(a)$$

also:

$$b = -\frac{Ck}{2aR(a)}.$$

Ferner folgt durch Substitution von (9) in dem Ausdruck für v (7)

$$v = C + \frac{bx}{k^2\sqrt{t}} \left\{ 1 - \frac{x^2}{2k^2t} \cdot \frac{1}{1.2.3} + \frac{x^4}{4k^4t^2} \cdot \frac{1}{1.2.4.5} \mp \dots \right\}$$

und man überzeugt sich leicht, dass die Parenthese sich durch

$$R\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)$$

summiren lässt, so dass man erhält:

$$v = C \left\{ 1 - \frac{\frac{x}{2k\sqrt{t}} R\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}{aR(a)} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

Nun war also:

$$R(a) = 1 - \frac{2a^2}{2.3} + \frac{(2a^2)^2}{2.4.5} - \frac{(2a^2)^3}{2.4.6.7} \mp \dots$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit a und differentiirt dann noch a , so erhält man:

$$\frac{d\{a.R(a)\}}{da} = 1 - \frac{2a^2}{2} + \frac{(2a^2)^2}{2.4} - \frac{(2a^2)^3}{2.4.6} \pm \dots$$

$$= 1 - a^2 + \frac{a^4}{1.2} - \frac{a^6}{1.2.3} \pm \dots \quad \text{d. i.}$$

$$= e^{-a^2}$$

Also

$$aR(a) = \int_0^a e^{-a^2} da$$

oder da nach unserer früheren Bezeichnung:

$$\sqrt{\pi} \int_0^u e^{-x^2} dx = G(u)$$

war, so folgt aus (12):

$$v = C \left\{ 1 - \frac{G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}{G(a)} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

3) Würde man nun diesen Werth wieder in die Gleichung (4) setzen, so erhielte man eine neue Annäherung für z , worin jedoch nur für a eine andere Constante a' auftritt. Setzt man dies z in die Gleichung (5) und bestimmt dann v , ähnlich wie hier geschehen, so erhält man:

$$v = C \left\{ 1 - \frac{G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}{G(a')} \right\}$$

wo also auch nur statt a das neue a' zu setzen ist. Statt nun aber in dieser Art die Näherung weiter zu treiben, wollen wir nun die Form annehmen, auf die wir gekommen

sind und daraus direct mit Hülfe der Gleichung (4) die unbekannte Constante finden.

Es sei also:

$$v = C \left\{ 1 - \frac{G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}{G(\alpha)} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

$$z = 2k \cdot \alpha \cdot \sqrt{t}$$

Dass der Ausdruck für v der Differentialgleichung genügt, wissen wir bereits aus dem Früheren (§ 5). Ebenso genügt er der Gleichung (3), da

$$G(0) = 0$$

ist. Ferner ist für $x = z$:

$$\frac{x}{2k\sqrt{t}} = \alpha,$$

also:

$$v = 0,$$

wie es sein soll. Es bleibt also nur die Gleichung (4) übrig. Mit deren Hülfe erhält man:

$$\frac{kx}{\sqrt{t}} = \frac{CK}{\lambda} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2k\sqrt{t}} \cdot \frac{e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}}{G(\alpha)} \Bigg]_{x=z}$$

daher

$$\alpha = \frac{a^2 \sqrt{\pi} e^{-a^2}}{G(\alpha)}$$

also:

$$\frac{\alpha \cdot G(\alpha)}{\sqrt{\pi} e^{-a^2}} = a^2 \dots\dots\dots (15)$$

Ist nun aus dieser Gleichung α bestimmt, so ist das Problem (für eine constante Temperatur) als strenge gelöst zu betrachten. Die sechste Tabelle enthält ein kleines Täfelchen für α und a , woraus durch Interpolation α immer genügend genau ermittelt werden kann. Man sieht zugleich daraus, dass (besonders für kleinere Werthe) sich α wenig von a unterscheidet, so dass für die Rechnung sehr oft letzteres hinreichend sein wird.

§ 13.

Wenn wir uns nun zu dem parallelen Problem des Zufrierens wenden, so treten in den Bedingungen nur zwei Veränderungen ein, einerseits ist $-C$ statt $+C$ zu schreiben, und andererseits in der Gleichung (4) des vorigen Paragraphen das Zeichen auf der rechten Seite umzukehren, da die Strömung in anderem Sinne geschieht. Die Gleichungen heissen also:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ x=0] \quad v &= -C \\ x=z] \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{K}{\lambda} \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right]_{x=z} \\ v &= 0 \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Die Werthe für v und z werden daher sehr ähnlich den früheren sein und zwar:

$$v = -C \left\{ 1 - \frac{G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right)}{G(\alpha)} \right\}$$

$$z = 2k \cdot \alpha \cdot \sqrt{t}$$

wo wieder (§ 12, (6)):

$$a^2 = \frac{S \cdot D}{2\lambda} \cdot C$$

und:

$$\frac{\alpha \cdot G(\alpha)}{\sqrt{\pi} e^{-a^2}} = a^2$$

ist, so dass also in der Grösse a^2 nur immer der absolute Werth von C einzusetzen ist. Wir können daher, wenn wir nur dies beachten, in der Folge beide Probleme zusammenfassen.

§ 14.

Wir wollen nun annehmen, dass die wirkende Temperatur an der Oberfläche nicht immer dieselbe bleibe, sondern es wirke:

	die Zeit d_1 hindurch	die Temperatur	C_1 ,
von da ab und	$= d_2$	$=$	C_2 ,
$=$	$= d_3$	$=$	C_3 ,

und so wechsele die Temperatur, bis endlich in der n^{ten} Periode die Temperatur C_n mit einer Wirkungsdauer d_n auftrete.

Hierbei wollen wir sogleich bemerken, fürs Erste, dass in der Formel für z — und nur diese Tiefe der Grenze wollen wir vorläufig betrachten, nicht mehr so die Temperatur der obersten angegriffenen Schicht — nur die absoluten Werthe von C sollen verstanden werden, indem ihr Zeichen nur die Bedeutung von z feststellt; und ferner, dass alle Temperaturen von gleichem Zeichen angenommen werden möchten, indem ein plötzlicher Zeichenwechsel für die Grenzstelle nur einen Stillstand zur Folge haben würde, während er von der Oberfläche aus eine neue Wirkung im entgegengesetzten Sinne veranlasste.

Führen wir analog dem Früheren die Bezeichnungen ein:

$$\frac{S \cdot D}{2\lambda} \cdot C_1 = a_1^2, \quad \frac{S \cdot D}{2\lambda} \cdot C_2 = a_2^2, \quad \frac{S \cdot D}{2\lambda} \cdot C_3 = a_3^2, \dots\dots$$

$$\frac{S \cdot D}{2\lambda} \cdot C_n = a_n^2$$

und nehmen an, dass das betreffende α immer aus der Gleichung

$$\frac{\alpha \cdot G(\alpha)}{\sqrt{\pi} e^{-a^2}} = a^2$$

bestimmt sei, wo nur bei den Grössen a und α ein gleicher

Index zuzudenken ist; so ist die Tiefe, bis zu der der Aggregatzustand sich geändert hat am Ende der Zeit d_1 :

$$z_1 = 2k \cdot \alpha_1 \sqrt{d_1}.$$

Beginnt nun die Wirkung von C_2 , so mag man sich denken, dass auch der bisherige Erfolg durch eine Temperatur C_2 hervorgebracht sei, welche allerdings einer andern Zeitdauer dazu bedurft hätte, und dass nun der weitere Fortschritt von z in dem Sinne (d. h. in derjenigen Schnelligkeit) geschehe, wie er bei der Wirkung der Temperatur C_2 gleich von Anfang an begonnen hätte.

Sei δ_1 diejenige Zeit, in welcher C_2 denselben Effect hervorgebracht hätte, den C_1 in der Zeitdauer d_1 erreichte, so müsste sein:

$$z_1 = 2k \cdot \alpha_2 \sqrt{\delta_1}.$$

Nun ist aber wirklich:

$$z_1 = 2k \cdot \alpha_1 \sqrt{d_1},$$

daher muss sein:

$$\alpha_2 \sqrt{\delta_1} = \alpha_1 \sqrt{d_1}$$

und folglich:

$$\delta_1 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} \cdot d_1.$$

Wirkt nun die Temperatur C_2 die veränderliche Zeit d hindurch, so ist die Tiefe, bis zu der dann die Wirkung reicht:

$$\begin{aligned} z &= 2k \cdot \alpha_2 \sqrt{\delta_1 + d} \\ &= 2k \cdot \alpha_2 \sqrt{\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} d_1 + d} \end{aligned}$$

d. i. also: $z = 2k \cdot \sqrt{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d}$

und der Endeffect der Wirkung von C_2 wird sein die Vertiefung der Grenze bis auf:

$$z_2 = 2k \sqrt{\alpha_1^2 \cdot d_1 + \alpha_2^2 \cdot d_2}.$$

Tritt nun die Temperatur C_3 ein, so kann man eine ganz ähnliche Verwechslung der Wirkungsursache im Geiste verfolgen, wie bei C_2 geschehen. Dann muss sein (wo die Bedeutung von δ_2 wohl an sich verständlich sein wird):

$$z_2 = 2k \cdot \alpha_3 \sqrt{\delta_2}$$

und es war zugleich:

$$z_2 = 2k \sqrt{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2}$$

daher ist:

$$\delta_2 = \frac{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2}{\alpha_3^2}$$

folglich ist für einen Zeitpunkt, während der Wirkungsdauer von C_3 :

$$\begin{aligned} z &= 2k \alpha_3 \sqrt{\frac{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2}{\alpha_3^2} + d} \\ &= 2k \cdot \sqrt{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2 + \alpha_3^2 d} \end{aligned}$$

und die grösste Tiefe, bis zu der die Wirkung von C_3 gelangen kann, wird sein:

$$z_3 = 2k \sqrt{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2 + \alpha_3^2 d_3}.$$

Geht man in ähnlicher Weise weiter fort, so findet man endlich die Tiefe bis zu der die Veränderung des Aggregatzustandes am Ende der n^{ten} Periode vorgedrungen ist durch die Formel:

$$z_n = 2k \sqrt{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2 + \alpha_3^2 d_3 + \dots + \alpha_n^2 d_n} \dots (1)$$

Gestattet es die Natur des Problems α gegen a ihres geringen Unterschiedes wegen (vgl. § 12 am Ende) zu vertauschen, so erhält man einen sehr einfachen Ausdruck, nämlich:

$$z_n = 2k \sqrt{\frac{S \cdot D}{2\lambda}} \sqrt{C_1 \cdot d_1 + C_2 \cdot d_2 + C_3 \cdot d_3 \dots C_n \cdot d_n} \dots (2)$$

welcher, wenn die Temperatur eine Function der Zeit ist, unter der zweiten \sqrt den Flächeninhalt dieser Curve enthält.

Bemerkung. Der Ausdruck (1) ist strenge, denn denkt man sich die n^{te} Periode noch nicht beendet, so ist:

$$z = 2k \cdot \alpha_n \sqrt{\frac{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 d_{n-1}}{\alpha_n^2} + d}$$

worin also z und d als variabel betrachtet werden müssen. Fügt man nun noch hinzu:

$$v = C_n \left\{ 1 - \frac{G \left(\frac{x}{2k \sqrt{\frac{\alpha_1^2 d_1 + \alpha_2^2 d_2 + \dots + \alpha_{n-1}^2 d_{n-1}}{\alpha_n^2} + d}} \right)}{G(\alpha_n)} \right\}$$

so kann man mit diesen beiden Ausdrücken sämtlichen Gleichungen genügen. Für die Differentialgleichung und die beiden Bedingungen:

$$\begin{aligned} x = 0] & \quad v = C_n \\ x = z] & \quad v = 0 \end{aligned}$$

bedarf es keinen Beweises. Aber auch die Substitution in die Bedingungsgleichung:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{K}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{z=x}$$

oder:

$$\frac{dz}{dt} = -k^2 \frac{S \cdot D}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=z}$$

(wobei das Veränderliche der Zeit in d liegt) führt auf die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{k \cdot \alpha_n^2}{\alpha_1^2 d_1 + \dots + \alpha_{n-1}^2 d_{n-1}} + d} = \\ & \frac{2k^2 \alpha_n^2 \sqrt{\pi} e^{-\alpha_n^2}}{2k \sqrt{\frac{\alpha_1^2 d_1 + \dots + \alpha_{n-1}^2 d_{n-1}}{\alpha_n^2} + d} G(\alpha_n)} \end{aligned}$$

aus welcher folgt:

$$\alpha_n = \frac{a_n^2 \sqrt{\pi} e^{-\alpha_n^2}}{G(\alpha_n)}$$

wie es auch angenommen wurde.

§ 15.

Ehe wir nun von den bisher entwickelten Principien über die Fortpflanzung des Gefrier- oder Thau-Punktes einige Anwendungen machen, möchte ich noch bemerken, dass in der Natur der Vorgang beim Thauen noch nach andern (hydrodynamischen) Gesetzen geschieht, und wir uns daher meistens an Beobachtungen über das Eindringen des Frostes halten wollen. Die erste Anwendung mag das Problem in ganz reiner Form zum Gegenstande haben, wenn auch noch keine Beobachtungen über diesen Punkt verglichen werden konnten. Wir wollen nämlich folgende Frage zu beantworten versuchen:

- 2) Wenn in einem bis dahin offenen See die Temperatur der Oberfläche plötzlich bis auf 5°, 10°, 15° R. unter 0 sinkt, wie dick wird die Eisdecke sein, falls dieselbe Temperatur 1, 2, 3 Tage anhält?

Um hierauf die Formel (§ 13):

$$z = 2k \cdot \alpha \sqrt{t}$$

anwenden zu können, müssen wir die Werthe der Constanten: k , $S.D$, λ

zu erfahren suchen. Die spezifische Wärme des Eises ist etwa:

$$S.D = 0,504 \cdot 0,9.$$

Die latente Wärme des Wassers ist bekannt, nämlich für die Scala von Réaumur:

$$\lambda = 63,3.$$

Die innere Leitungsfähigkeit des Eises müsste erst durch Beobachtungen ermittelt werden; hier sei es erlaubt, den bisher (in Bezug auf den Erdboden) benutzten Werth beizubehalten, nämlich:

$$\log(2k) = 0,2519.$$

Endlich wollen wir uns hier und überhaupt damit begnügen, statt mit α , mit a zu rechnen, so dass also:

$$z = 2k \sqrt{\frac{S.D}{2\lambda}} \cdot C \sqrt{t}$$

gesetzt wird. Dann erhält man folgende kleine Tabelle als Antwort über die Dicke der Eisdecke:

2 a) Temperatur der Oberfl.	Dauer:		
	1 Tag	2 Tage	3 Tage
— 5° R.	0,24 Fuss	0,34	0,41
— 10°	0,34	0,48	0,58
— 15°	0,41	0,58	0,71
		oder:	
— 5°	2,88 Zoll	4,09	4,95
— 10°	4,09	5,76	7,00
— 15°	4,95	7,00	8,57

§ 16.

Wir wenden uns nun zum Erdboden. Wenn man vom Frieren desselben spricht, so meint man damit die Erstarrung seiner wässerigen Bestandtheile; soll also die latente Wärme des Bodens gefunden werden, so kommt dies auf die Frage hinaus, wie viel Wassergehalt derselbe besitze. Nach einer Angabe von Dalton bei Arago, Bd. 6, S. 223 der deutschen Ausgabe betrug derselbe $\frac{1}{2}$ im Maximum; hiemit stimmt auch eine eigne Beobachtung überein, so dass also für einen mittleren Zustand derselbe auf $\frac{2}{3}$ des Volumens wird gesetzt werden können, dass also:

$$\lambda = \frac{2}{3} \cdot 63$$

wäre. Die spezifische Wärme des Bodens ist $\frac{1}{2}$ (für die Cubiklinie als Volumeneinheit, und diejenige Wärmemenge, welche eine Cubikline Wasser um 1° R. erhöht als thermische Einheit), so dass also nach der Näherungsformel (§ 14, (2)):

$$z = 2k \sqrt{C_1 \cdot d_1 + C_2 \cdot d_2 + C_3 \cdot d_3 \dots} \cdot 0,0996$$

ist. Wird diese Formel zuerst auf das Aufthauen des Bodens vom 9^{ten} April 1838 an (§ 11) angewandt, so ist:

$$d_1 = d_2 = d_3 \dots = 1 \text{ Tag}$$

und die Temperatursumme der ersten zehn Tage:

$$C_1 + C_2 + \dots + C_{10} = 11^{\circ}70.$$

Hieraus ergibt sich:

$$z = 0,60 \text{ Fuss.}$$

Beobachtet ist $1\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1\frac{1}{4}$; es liessen sich wohl aber Umstände finden (wie das Abfließen des Wassers, Erwärmung von unten her), welche diese Differenz erklären könnten.

Günstigere Resultate liefern Beobachtungen über das Zufrieren:

1836 den 25^{ten} Decbr. begann der Frost in der Tiefe $\frac{1}{4}$, die wir als Oberfläche ansehen, und drang am 31^{ten} bis in die Tiefe $1\frac{1}{2}$ Fuss. Die Temperatursumme ist: $-19,18$, folglich

$$z = 2k \sqrt{19,18 \cdot 0,0996} = 0,78$$

$$\text{beob. } z = 1\frac{1}{2} = 1,08.$$

1837/38. Der Frost begann (in $\frac{1}{4}$) den 22^{ten} Dec. 1837, drang am 31^{ten} Dec. bis $1\frac{1}{2}$ Fuss, und bei noch anhaltender Intensität den 27^{ten} Febr. bis $3\frac{1}{2}$ Fuss.

Die Temperatursumme vom 22^{ten} Dec. bis 31^{ten} Dec. ist: $-27^{\circ}29$, daher:

$$z = 2k \sqrt{27,29 \cdot 0,0996} = 0,92$$

$$\text{beob. } z = 1\frac{1}{2} = 1,08.$$

Die Temperatursumme vom 22^{ten} Dec. 1837 bis 27^{ten} Febr 1838 ist: $-352,16$, daher:

$$z = 2k \sqrt{352,16 \cdot 0,0996} = 3,32$$

$$\text{beob. } z = 3\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 3,5.$$

Ich füge noch ein paar Beobachtungen aus Brüssel hinzu. Dasselbst sind die Grade nach der Contesimalscala angegeben, daher ist λ ebenso zu nehmen, also:

$$\lambda = 79$$

und für k^2 ist der Werth auch bereits angegeben (§ 10).

1838. Der Frost begann in 0^m05 den 8^{ten} Jan. drang am

$$\begin{array}{ll} \text{her.} & 0,28 \\ \text{beob.} & 0,30 - 0,05 = 0,25 \end{array} \quad \begin{array}{ll} & 0,35 \\ & 0,40 - 0,05 = 0,35 \end{array}$$

Noch einen Umstand möchte ich hier erwähnen: das Steigen der Temperatur in 1½ Fuss, während in ¼' bereits Frost eingetreten ist, und die Temperatur in 3¾ Fuss fortwährend sinkt. Anfangs Januar 1839 war das Thermometer in 1½' bis +0,08 gesunken; die Temperatur in ¼' hob sich von -1,5 bis -0,6 und schwankte zwischen diesen Grenzen: da stieg das Thermometer in 1½' bis +0,24 (¼' : -0,6);

17^{ten} bis 0^m30; am 19^{ten} bis 0^m40; am 27^{ten} bis 0^m60; erreichte aber nicht mehr die Tiefe 0^m80.

Die Temperatursummen sind: -25,73; -36,28; -75,44 und bis zum Ende des Frostes (7^{ten} Febr.) -106,12. Ferner ist:

$$\log z = 8,7608 + \frac{1}{2} \log (\text{Temperatursumme}).$$

Hieraus folgt:

$$\begin{array}{ll} 0,50 & 0,60 \\ 0,60 - 0,05 = 0,55 & < 0,80 - 0,05 = 0,75. \end{array}$$

und (nachdem einige Tage das Thermometer in ¼' über 0 gestiegen war) bis auf 0,31 (¼' : -0,40).

Als Grund ist wohl anzunehmen, dass durch die an der Oberfläche gelagerte Eisschicht ein weiteres Vordringen der Kälte gehemmt, dagegen aus den tieferen wärmeren Erdschichten ein erwärmender Strom nach oben hin ausgegangen sei.

IV. Die Fortpflanzung der Temperatur im Innern des Körpers.

§ 17.

Wir haben im ersten Abschnitte eine bestimmte Tiefe ins Auge gefasst und verfolgten in ihr die mit wachsender Zeit eintretenden Veränderungen der Temperatur. Auch in der weiteren Behandlung werden wir hauptsächlich unsere Betrachtungen und Fragen an die Temperatur, die einer bestimmten Tiefe angehört, anzuknüpfen haben. Um indess einen klaren Einblick in die Natur der Temperaturwirkung zu erlangen, ist es interessant, zu untersuchen, wie sich dieselbe zur selbigen Zeit in verschiedenen Tiefen äussert; oder mit andern Worten: wenn man auf zweien gegen einander senkrechten Linien vom Schnittpunkte aus auf der einen die Zeit, auf der andern die Tiefe aufträgt, dann jedem Punkt in dem, so zu sagen, von diesen Linien begränzten Theile der Ebene als durch dieses Coordinatensystem bestimmt ansieht, und in ihm die Temperatur als Function dieser beiden Ordinaten (Tiefe und Zeit) und zwar senkrecht gegen die Ebene aufträgt, endlich die Endpunkte dieser Perpendikel als Punkte einer Oberfläche ansieht, — so haben wir von dieser Oberfläche nur Durchschnitte betrachtet, welche parallel der Zeitlinie liefen, und wollen nun Durchschnitte parallel der andern Ordinate näher ansehen. (Auch andere Linien auf dieser Oberfläche und auf ähnlichen sind nicht ohne Interesse: so zeigt sich bei constanter immer fortdauernder Temperatur der Oberfläche die Verbindung sämmtlicher Wendepunkte (s. § 6) als eine der Coordinatenebene parallel laufende Parabel.)

Wirkt nun an der Oberfläche die constante Temperatur C , so wird diejenige zu einer bestimmten Zeit in einer beliebigen Tiefe natürlich wieder gegeben durch die Formel:

$$v = \frac{\pi}{2C} \left\{ \frac{\pi}{2} - G(\sigma) \right\},$$

wo:

$$\sigma^2 = \frac{x^2}{4k^2t}, \quad G(\sigma) = \sqrt{\pi} \int_0^\sigma e^{-u^2} du$$

ist, und worin nun t als constant, x als veränderlich betrachtet werden muss. — Der Differentialquotient des Ausdruckes für die Temperatur v nach der Tiefe genommen ist negativ:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{2C}{\pi} \cdot \sqrt{\pi} \frac{e^{-\sigma^2}}{2k\sqrt{t}}$$

und daraus folgt, dass für jede bestimmte Zeit die Temperatur (nach dem Innern des Körpers zu stetig abnimmt, und zwar geschieht dies bis zu einem gewissen Punkte sehr schnell (weil, wenn man v als Curve mit der Tiefe als Abscisse aufträgt, der Krümmungshalbmesser ein Minimum erreicht) bis sie sich immer mehr der Gränze 0 nähert.

§ 18.

Wirkt aber die Temperatur an der Oberfläche nur bis zur Zeit $t = d$ und verschwindet dann, so ist der Ausdruck der Temperatur für spätere Zeiten:

$$v = \frac{2C}{\pi} \left\{ G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right\} \dots\dots(1)$$

Auch hier lässt sich wie früher die Frage nach dem Maximum dieser Function aufstellen, nämlich:

- 3) In welcher Tiefe wird zu einer bestimmten Zeit das Maximum der Temperaturwirkung Statt finden?

Diese Frage hat in so fern Interesse, als in ihrer Beantwortung, d. h. indem man sieht, wie das Maximum der Wirkung von Tiefe zu Tiefe wandert, die eigentliche Art und Weise der Fortpflanzung der Temperatur zur Anschauung kommt.

Wir dürfen nur den Differentialquotienten nach der Tiefe verschwinden lassen, Hiedurch erhält man:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\{ \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-d)}}}{2k\sqrt{t-d}} - \frac{\sqrt{\pi} e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}}{2k\sqrt{t}} \right\} = 0$$

oder:

$$\frac{e^{-\frac{x^2}{4k^2t}}}{\sqrt{t}} = \frac{e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-d)}}}{\sqrt{t-d}} \dots\dots\dots(2)$$

Bezeichnet man die gesuchte Tiefe analog der Bezeichnung T für die Zeit des Maximums an derselben Stelle (§ 7) mit X , so erhält man, wenn man in der Gleichung (2) auf beiden Seiten Logarithmen nimmt und:

$$t-d = \tau \dots\dots\dots(3)$$

setzt, folgenden Werth:

$$\frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{1}{1 + \frac{d}{\tau}} \right) \frac{X^2}{4k^2} = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \frac{d}{\tau}}{\log(e)} \right) \dots\dots\dots(4)$$

Dieser Ausdruck wird durch eine kleine Substitution für's Auge und die Rechnung etwas einfacher. Setzt man nämlich:

$$\frac{d}{\tau} = \tan^2 z \dots\dots\dots(5)$$

so erhält er die Form:

$$\frac{1}{\tau} \sin^2 z \cdot \frac{X^2}{4k^2} = -\frac{\log(\cos z)^*}{\log(e)} \dots\dots\dots(6)$$

Zeitpunkt seit Ende d. Wirk.: 1 Tag, 5 Tage, 10 Tage, 20 Tage, 30 Tage, 45 Tage, 60 Tage, 90 Tage, 120 Tage.

Tiefe d. höchsten Temperatur: 2,887 F. 5,441 7,041 9,035 10,42 12,01 13,29 15,38 17,10

Werth derselben: 1,3242 1,0952 0,9550 0,7908 0,6866 0,5809 0,5070 0,4078 0,3426 $\cdot \frac{2C}{\pi}$

Zeitpunkt seit Ende d. Wirk.: 150 T. 180 T. 240 T. 300 T. 360 T. 540 T. 1080 T. 32400 T.

Tiefe der höchsten Temp.: 18,60 F. 19,95 22,36 24,49 26,43 31,49 43,11 228,3

Werth derselben: 0,2959 0,2607 0,2113 0,1779 0,1538 0,1090 0,0575 0,0022 $\cdot \frac{2C}{\pi}$

*) Nimmt man briggische Logarithmen, und setzt für k^2 den Werth ein, wenn die Zeit in Tagen ausgedrückt ist, so erhält man:
 $2 \log X = \log(-\log \cos z) - 2 \log \sin z + \log \tau + 0,8659 \dots\dots\dots(8)$

**) Welcher also von einer unendlichen (hinreichend grossen) Ebene begränzt werden, eine hinreichende Tiefe besitzen und durchweg von derselben Beschaffenheit sind.

Man hat also für X einen geschlossenen Ausdruck, während früher T durch eine transcendente Gleichung (§ 7, (3)) gefunden werden musste. Daher kann man hier auch den Werth des Maximums selbst, den wir mit M bezeichnen wollen, angeben; nämlich (nach (1)):

$$M = \frac{2C}{\pi} \left\{ G\left(\frac{\sqrt{-\lg \tan z}}{\sin z}\right) - G\left(\frac{\sqrt{-\lg \tan z}}{\tan z}\right) \right\} \dots\dots(7)$$

Dieser Werth ist also nur abhängig von z , d. i. von dem Verhältnisse $d : \tau$; und diese Eigenschaft desselben lässt sich auch auf folgende Arten auffassen:

- 4) Wenn man die Oberfläche verschiedener Körper, die den Voraussetzungen unseres Problems genügen,**) eine gleiche Zeit lang in gleicher, und zwar constanter Temperatur erhält, so wird nach Verlauf der Wirkungsdauer zu jeder Zeit in irgend einer Tiefe jedes Körpers das Maximum der Wirkung zu finden sein: die Werthe der zur selbigen Zeit eintretenden Maxima sind einander gleich; die Tiefen, in denen sie eintreten, dem Leitungsvermögen des betreffenden Körpers proportional;

und:

- 5) Wenn die Oberfläche desselben Körpers in getrennten Zeitperioden in gleicher Temperatur erhalten wird, indess nicht eine gleiche Zeit lang; so finden wieder nach Verlauf der Wirkungsdauer in gewissen Tiefen die Maxima der Wirkung Statt: ihre Werthe verändern sich (d. h. nehmen ab), um desto langsamer, je grösser die Wirkungsdauer war (weil dann sich $\frac{d}{\tau}$ um so weniger ändert). Fasst man indessen zwei dem Werthe nach gleiche Maxima ins Auge, so ist die Zeit ihres Eintrittes (vom Ende der Wirkungsdauer an gerechnet) proportional der Dauer der Wirkung, und die Tiefe, in der sie sich zeigen, proportional der Quadratwurzel aus der Zeit (oder der Wirkungsdauer), so dass bei länger anhaltender Wirkung die Temperatur sich langsamer ändert und tiefer in den Körper eindringt.

Ich habe für einige Zeiten die Tiefe der grössten Wirkung und ihren Werth berechnet und finde für eine 180tägige Wirkungsdauer folgende Resultate (mit den Wärmeconstanten der Erde):

Vergleicht man diese Werthe und Zeiten etwa mit der Abschwächung der jährlichen Schwankung und der Verzögerung der Maxima und Minima, so sieht man, dass dieselbe bei uns bei Weitem langsamer vor sich geht. Nimmt man

$x = 0$	$x = 2,887$	$x = 10,42$	$x = 19,95$	$x = 31,49$	$x = 43,11$
$M = 20$	$M = 16,86$	$M = 8,74$	$M = 3,32$	$M = 1,39$	$M = 0,73$
$\delta = 20$	$\delta = 14,53$	$\delta = 6,89$	$\delta = 2,38$	$\delta = 0,82$	$\delta = 0,28; 0,10$
für $x = 0$	für $x = 3$	für $x = 10$	für $x = 20$	für $x = 30$	für $x = 40; 50$ Fuss.

Noch eine Frage liegt hier nahe, ob nämlich das Maximum, das in einer bestimmten Zeit in der gefundenen Tiefe X Statt findet, identisch ist mit dem grössten Werthe, den überhaupt die Temperatur in dieser Tiefe erreichen kann, oder ob das letztere schon vorangegangen oder noch zu erwarten ist.

Es lässt sich unter noch allgemeinerer Voraussetzung als derjenigen einer constanten Temperatur an der Oberfläche zeigen, dass das Zeitmaximum (um mich so auszudrücken) nicht demjenigen der Tiefe X eigenthümlichen vorangehen kann; hier kann man dies aber sehr leicht direct beweisen.

Multiplicirt man nämlich beide Seiten der Gleichung (2), durch welche X gefunden wurde mit $\frac{x}{2k}$, so erhält man:

$$\frac{x e^{-\frac{x^2}{4k^2 t}}}{2k\sqrt{t}} = \frac{x e^{-\frac{x^2}{4k^2(t-d)}}}{2k\sqrt{t-d}}$$

oder wenn man, wie schon früher:

$$\frac{x}{2k\sqrt{t}} = \sigma \quad \frac{x}{2k\sqrt{t-d}} = \sigma_1$$

Beispiel: Für $d = 30$ und $t = 60$ ist $X = 8,143$ und $M = 0,2608 \cdot \frac{2C}{\pi}$
für $d = 30$ und $x = 8,143$ ist $T = 36,64$ und $v = 0,4311 \cdot \frac{2C}{\pi}$

(wobei v eben der Werth des dieser Tiefe eigenthümlichen Maximums ist).

§ 19.

6) Wie tief dringt eine zeitweise währende constante Temperatur der Oberfläche in den Körper ein?

d. h. also: in welcher Tiefe ist das Maximum der in ihr überhaupt Statt findenden Wirkung noch wahrnehmbar? — Diese Tiefe möge durch z bezeichnet werden, so wird die Temperatur überhaupt in ihr dargestellt durch die Formel:

$$v = \frac{2C}{\pi} \left\{ G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t}}\right) \right\} \dots\dots(1)$$

Diese Grösse soll nun einerseits ihr Maximum erreichen, andererseits soll dasselbe noch auf der Gränze der Wahrnehmbarkeit stehen; dieser Werth sei $\frac{2C}{\pi} \cdot s$, so müssen die Gleichungen gelten:

z. B. als jährliche Schwankung der Oberfläche 20° und setzt auch $C = 20^\circ$, so ist, wenn man die Schwankung mit δ bezeichnet (dieselbe ist aus der Schumann'schen Arbeit entlehnt):

setzt:

$$\sigma e^{-\sigma^2} = \sigma_1 e^{-\sigma_1^2} \dots\dots\dots(9)$$

Die Zeit des dieser Tiefe zugehörigen Maximums wurde gefunden durch die Gleichung (§ 7, (3)):

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} = \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2}.$$

Multiplicirt man nun in der Gleichung (9) beide Seiten mit σ^2 , so erhält man:

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} = \sigma_1 \cdot \sigma^2 e^{-\sigma_1^2}$$

Nun ist:

$$\sigma < \sigma_1,$$

daher ist:

$$\sigma^3 e^{-\sigma^2} < \sigma_1^3 e^{-\sigma_1^2}$$

und folglich ist die angenommene Zeit, in welcher in der Tiefe X die grösste im ganzen Körper wahrnehmbare Wirkung sich zeigt (nach der Regel in § 7) zu verkleinern, um diejenige Zeit zu erhalten, in welcher das in dieser Tiefe X überhaupt mögliche Maximum Statt findet.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t}}\right) \right\} = 0 \dots\dots(2)$$

$$G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t-d}}\right) - G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t}}\right) = \epsilon \dots\dots(3)$$

Aus diesen Gleichungen ist die Tiefe z und die Zeit, in der das Maximum eintritt, zu bestimmen. Letztere ist schon früher durch T (als Function von z gedacht) bezeichnet worden. Entwickelt man nun in der Gleichung (3) die Grösse $G\left(\frac{z}{2k\sqrt{t-d}}\right)$ nach Potenzen von d und behält nur das erste Glied bei, so wird:

$$\frac{d}{2t} \frac{z}{2k\sqrt{t}} \sqrt{\pi} e^{-\frac{z^2}{4k^2 t}} = \epsilon \dots\dots\dots(4)$$

Hier ist aber das t einzusetzen, welches der Gleichung (2) genügt, das ist aber T . Ein strenger Werth hierfür durch z lässt sich nicht angeben; ein Näherungswerth ist aber (§ 7, 1 a)):

$$T = t_w + \frac{1}{2} d,$$

wo (§ 6, Gleichung (2)):

$$t_w = \frac{2}{3} \frac{z^2}{4k^2}$$

ist. Setzt man diesen Werth von T in die Gleichung (4), so erhält man eine transcendente Gleichung zur Bestimmung von z ; *) hier wollen wir uns begnügen (was wegen des kleinen Factors $\frac{d}{T}$ angänglich ist) geradezu:

$$T = \frac{2}{3} \frac{z^2}{4k^2}$$

zu setzen. Setzt man diesen Werth in die Gleichung (4), so erhält man zur Bestimmung von z den geschlossenen Ausdruck:

$$z^2 = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{3}{2}} 4k^2 \cdot \frac{d}{\epsilon} \dots \dots \dots (5)$$

Setzen wir hier unsern Werth von k^2 (in Tagen ausgedrückt) ein, so erhält man:

$$2 \log z = 0,0641 + \log d - \log s \dots \dots (6)$$

Beispiel: Für die Tiefe 43,11 Fuss ist das Maximum, das wir mit M bezeichnen wollen:

$$M = 0,1106 \cdot \frac{2C}{\pi}$$

und tritt ein in 312 Tagen nach Aufhören der 180 tägigen Wirkungsdauer. Nimmt man nun die Werthe:

$$\epsilon = 0,1106$$

$$d = 180,$$

so erhält man mit Hülfe der Formel (6):

$$z = 43' 44$$

statt:

$$z = 43' 11$$

Will man ferner wissen, wie tief es zu merken sein würde, wenn die Mitteltemperatur eines Jahres (an der Oberfläche) um 1° über das normale Mittel sich erhoben hätte, so ist, wenn man die Gränze der Wahrnehmbarkeit resp. auf $0,05^\circ$ oder auf $0,1^\circ$ ansetzt, zu setzen (§ 19, Anf.):

$$\frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot \epsilon = 0,05$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot 1 \cdot s = 0,1$$

*) Welche durch die Substitution:

$$\frac{\frac{2}{3} \frac{z^2}{4k^2}}{\frac{1}{2} d} = \tan^2 \zeta,$$

die für die Rechnung etwas geschicktere Form annimmt:

$$\sqrt{\pi} \cos^2 \zeta \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \zeta \cdot e^{-\frac{3}{2} \sin^2 \zeta} = s \dots \dots (4a)$$

und dann erhält man durch die Formel (6), in welcher noch:

$$d = 360$$

zu setzen ist, die gesuchte Tiefe resp. 73 F. und $51\frac{1}{2}$ F.

Es ist also, wenn keine störende Umstände eintreten, die Erhebung der mittleren Temperatur eines Jahres um 1° noch in der Tiefe $51\frac{1}{2}$ F. als ein Ansteigen bis zu $\frac{1}{16}^\circ$ und in 73 F. bis zu $\frac{1}{26}^\circ$ zu merken. — Allerdings ist dabei zu beachten, dass hier nach dem Maximum in diesen Tiefen gefragt ist, welches strenge genommen nur in einem Momente eintritt.

§ 20.

Wir wollen nun noch die Wärmemenge zu bestimmen suchen, welche in einer bestimmten Zeit im ganzen Körper enthalten ist. — Sei U die Anzahl von Graden, um die die Temperatur des ganzen Körpers in der bestimmten Zeit als erhöht zu betrachten ist, ferner $W(d, t)$ die in ihm zur Zeit t bei der Wirkungsdauer d enthaltene Wärmemenge, $S.D$ die spezifische Wärme, d. h. die Wärmemenge, die die Volumeneinheit des Körpers um 1° erhöht, so wird sein:

$$W = U \cdot S \cdot D \dots \dots \dots (1)$$

Die Temperatur wird dargestellt durch die Formeln:

$$t = 0 \text{ bis } t = d \quad v = \frac{2C}{\pi} \left\{ \frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right\} \dots \dots (2)$$

$$t = d \text{ bis } t = \infty \quad v = \left\{ \left[\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) \right] - \left[\frac{\pi}{2} - G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t-d}}\right) \right] \right\}$$

Um nun U zu erhalten, muss man den Ausdruck für v mit dx multipliciren und von 0 bis ∞ integriren. Nun ist:

$$G\left(\frac{x}{2k\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\pi} \int_0^x \frac{1}{2k\sqrt{t}} e^{-u^2} du$$

oder wenn man:

$$\frac{x}{2k\sqrt{t}} = \sigma$$

setzt:

$$G(\sigma) = \sqrt{\pi} \int_0^\sigma e^{-u^2} du$$

$$\frac{\pi}{2} = G(\infty) = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-u^2} du$$

Setzt man:

$$u = \sigma \cdot v$$

so wird:

$$\frac{\pi}{2} = G(\infty) = \sqrt{\pi} \sigma \cdot \int_0^\infty e^{-\sigma^2 v^2} dv;$$

$$G(\sigma) = \sqrt{\pi} \sigma \int_0^1 e^{-\sigma^2 v^2} dv$$

$$\frac{\pi}{2} - G(\sigma) = \sqrt{\pi} \sigma \int_1^\infty e^{-\sigma^2 v^2} dv$$

Multiplieirt man dies mit:
so wird:

$$\begin{aligned} dx &= 2k\sqrt{t} \cdot d\sigma, \\ \int_0^\infty \left(\frac{\pi}{2} - G(\sigma)\right) dx &= k\sqrt{t} \sqrt{\pi} \int_0^\infty \int_1^\infty 2\sigma e^{-\sigma^2 v^2} dv d\sigma \\ &= k\sqrt{t} \sqrt{\pi} \int_1^\infty \int_0^\infty 2\sigma e^{-\sigma^2 v^2} d\sigma dv = k\sqrt{t} \sqrt{\pi} \int_1^\infty \frac{dv}{v^2} \\ &= k\sqrt{t} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

Daher ist:

$$W(t, t) = \frac{2C}{\pi} k\sqrt{t} \sqrt{\pi} \cdot S \cdot D \dots \dots \dots (3)$$

$$W(d, t) = \frac{2C}{\pi} k(\sqrt{t} - \sqrt{t-d}) \sqrt{\pi} \cdot S \cdot D$$

Hieraus folgt auch das Verhältniss der zur Zeit t noch übrigen Wärmemenge zu der bis zur Zeit $t = d$ eingedrungenen:

$$\frac{W(d, t)}{W(d, d)} = \frac{\sqrt{t} - \sqrt{t-d}}{\sqrt{d}} = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{d}{t}}}{\sqrt{\frac{d}{t}}} \dots \dots \dots (4)$$

also, unabhängig von allen Wärmeconstanten und nur abhängig von dem Verhältnisse $d:t$.
Setzt man:

$$\frac{d}{t} = \sin^2 \delta$$

so wird:

$$\frac{W(d, t)}{W(d, d)} = \tan \frac{1}{2} \delta.$$

Beispiel. Für $\frac{d}{t} = \frac{1}{12}$ wird das Verhältniss 0,1475, d. i. $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{4}$, d. h. von der während eines Monates eingedrungenen Wärme ist am Ende des mit ihm beginnenden Jahres noch der 6^{te} bis 7^{te} Theil übrig.

(Fortsetzung folgt.)

Schreiben des Herrn Valz an den Herausgeber.

J'ai vu avec d'autant plus d'intérêt, les considérations de Mr. Pape sur la proximité de la terte, et de la queue de la comète apparue d'un si grand éclat, que j'avois fait aussi les mêmes calculs, et que j'avois eu un peu plus de hardiesse en admettant que la terre avoit été atteinte par cette queue. Je dois donc expliquer d'où provient cette différence entre nous. Mr. Pape n'a trouvé que 3° de largeur à la queue, tandis que je l'ai vue de 6° et le P. Secchi de 8° si une simple différence de 11° en latitude en produit une de 5° dans la queue, une plus grande devoit en produire bien d'avantage encore. Mais les différences même montrent qu'il doit y avoir des parties de la queue trop rares, ou trop disséminées dans l'espace pour rester visibles. Les queues ne sauroient être gazeuses, car l'expansion spontanée étant une propriété des gaz, les disséminerait aussitôt dans l'espace, et ne leur permettroit pas de conserver les formes tranchées qu'elles nous montrent. Ce sont donc des corpuscules qui ne deviennent visibles que par leur accumulation dans les rayons lumineux, et cessent de l'être en devenant plus rares.

Jusqu'à présent, il a été admis que les queues devoient rester dans le plan de l'orbite cometaire, parce qu'on n'avoit pas reconnu des forces qui pussent les en écarter, et que d'ailleurs aucune observation n'étoit venue encore démentir le

fait admis; mais l'observation du 30 Juin du P. Secchi d'un grand intérêt sous ce rapport, vient donner la preuve de cette déviation extraordinaire. Ce jour-là en effet lorsque la terre, traversa le plan de l'orbite, il n'y auroit pas eu de déviation de la queue, si elle eut été comprise dans ce plan or le passage et la position du Périhélie étant assez bien déterminés pour donner cette déviation apparente près de la Polaire d'un degré environ. α de la lyre la donnerait encore plus forte. Si on cherche à quelle cause peut être attribuée cette déviation insolite on n'en voit guere d'autre que l'attraction de la terre avant son passage par le noeud.

Pour déterminer la déviation dans le plan même de l'orbite où la queue a du être à peu près ramenée après le 30 Juin par l'action en sens opposé de la terre, nous avons encore recours aux directions de la queue passant par α d'hercule les 4, 5 et 6 Juillet d'après le P. Secchi, qui donnent des déviations apparentes de 10" à 11°.

Si on admet que la partie invisible de la queue ajoute 2° de chaque coté à la largeur observée par le P. Secchi, le diamètre de la queue donnée par Mr. Pape deviendrait 0,0304, et ajoutant à sa moitié 0,0025 pour la déviation hors du plan de l'orbite, la distance de la terre à la queue le 28 Juin ne serait plus que 0,0175, et d'après la déviation