

2.

Grundsätze der stereometrischen Multiplication.

(Von dem Herrn Professor *H. Graßmann*, Oberlehrer am Gymnasio zu Stettin.)

Im 31ten und 42ten Bande dieses Journals habe ich die Principien der *planimetrischen* Multiplication entwickelt, deren Eigenthümlichkeit darin bestand, daß jede einfache planimetrische Construction durch eine eben so einfache Productformel dargestellt wurde. Ich werde hier das Gleiche für den *Raum* versuchen.

§. 1.

Erklärungen und Bezeichnungen.

Im Raume kommen drei Gattungen von *Elementen* vor: *Puncte*, *gerade Linien*, und *Ebenen*, welche ich beziehlich *Elemente erster, zweiter und dritter Stufe* nennen werde, und von denen ich die ersten beiden Gattungen, wie bisher, mit lateinischen Buchstaben, und zwar die Puncte mit kleinen, die geraden Linien mit großen bezeichnen werde, während zur Bezeichnung der Ebenen die kleinen griechischen Buchstaben dienen sollen. Der Buchstab *n* indessen soll nie einen Punct, sondern, wie gewöhnlich, eine Zahl bezeichnen. Zur Definition der stereometrischen Multiplication genügt es, das Product von je zwei jener 3 Gattungen von Elementen zu definiren. Dies giebt, da ich die Factoren vertauschbar setze, 6 Definitionen. Doch sind überall zwei Fälle zu unterscheiden; je nachdem die beiden Elemente vereinigt liegen, oder nicht. Ich sage nämlich, daß zwei Elemente vereinigt liegen, wenn sie mehr Puncte gemein haben, als vermöge ihrer Lage im Raume nothwendig ist, d. h. ich sage, ein Punct liege mit einem Puncte, einer Geraden, einer Ebene vereinigt, eine Gerade mit einer Ebene, eine Ebene mit einer Ebene, wenn jedesmal das erstere Element in dem letzteren liegt; und eine Gerade liege mit einer Geraden vereinigt, wenn sie sich schneiden (gleich viel, ob im Endlichen oder Unendlichen).

Wenn nun zwei Elemente vereinigt liegen, so setze ich ihr stereometrisches Product Null; wobei ich voraussetze, daß Null, mit jeder Gröfse multiplicirt, wieder Null giebt. Namentlich bedeutet

- 1) $ab = 0$ oder $a \equiv b$ [a congruent b],
dafs die Punkte a und b zusammenfallen;
- 2) $Ab = 0$ oder $bA = 0$,
dafs der Punkt b in der Geraden A liegt;
- 3) $\alpha\beta = 0$ oder $\alpha \equiv \beta$ [α congruent β],
dafs die Ebenen α und β zusammenfallen;
- 4) $A\beta = 0$ oder $\beta A = 0$,
dafs die Gerade A in der Ebene β liegt;
- 5) $AB = 0$,
dafs sich die Geraden A und B schneiden;
- 6) $\alpha b = 0$ oder $b\alpha = 0$,
dafs der Punkt b in der Ebene α liegt.

Wenn die Elemente nicht vereinigt liegen, so bedeutet

- 1) ab die durch a und b gelegte Gerade;
- 2) Ab oder bA die durch A und b gelegte Ebene;
- 3) $\alpha\beta$ die Durchschnittslinie beider Ebenen;
- 4) $A\beta$ oder βA den Durchschnittspunkt der Geraden A und der Ebene β ;
- 5) AB
- 6) αb oder $b\alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{ein Element nullter Stufe, d. h.} \end{array} \right.$

eine Gröfse, welche die Eigenschaft hat, irgend einem Elemente als Factor beigefügt, die Lage desselben unverändert zu lassen. Ich werde zwei aufeinander fallende Elemente, (die Linien und Ebenen immer als unendlich angenommen), einander *congruent* nennen und die Congruenz durch \equiv bezeichnen. Eben so werde ich zwei Elemente nullter Stufe jederzeit einander congruent nennen. *) Wenn also nun z. B. n eine Gröfse nullter Stufe und Γ ein beliebiges Element ist, so würde

$$n\Gamma \equiv \Gamma$$

sein.

Von den 6 Producten stellen die zwei ersten das Verbindungs-Element (die Verbindungsgerade, Verbindungs-Ebene) der beiden Factoren dar, die beiden folgenden das Durchschnitts-Element (Durchschnittslinie, Durchschnitts-

*) Da die Zahlen gleichfalls Gröfsen nullter Stufe sind, so würden hiernach alle Zahlen congruent sein; was mit dem *Gauß'schen* Begriff der Congruenz in Widerspruch zu stehen scheint. Allein nimmt man den Modul unendlich klein an, was der geometrischen Auffassung entspricht, so werden in der That alle Zahlgröfsen congruent.

punct), während die 2 letzten kein besonderes räumliches Element mehr darstellen. Von den 6 Definitionen sind (1 und 3), und eben so (2 und 4), einander *reciprok*, d. h. aus der einen geht die andere hervor, wenn man die Begriffe Punct und Ebene, Verbinden und Durchschneiden vertauscht.

Es können nun die Producte, da sie wieder Elemente sind, aufs neue mit andern Elementen oder Producten multiplicirt und dadurch Producte mit mehreren Factoren gebildet werden. In diesem Falle lasse ich die Klammern weg, wenn die Multiplication von der Linken zur Rechten fortschreiten soll; d. h. wenn A, B, Γ beliebige Elemente sind, so ist $AB\Gamma$ gleichbedeutend mit $(AB)\Gamma$, oder

$$AB\Gamma \equiv (AB)\Gamma.$$

§. 2.

Stufe der stereometrischen Producte.

Man sieht bald aus den Definitionen, dafs die Stufe des Products bei den beiden ersten Definitionen eben so grofs ist, als die Summe der Stufenzahlen beider Factoren; bei den folgenden Definitionen aber um 4 kleiner. In allen Fällen lassen also jene Stufe und diese Summe, durch 4 dividirt, *denselben Rest*, d. h. sie sind *congruent* in Bezug auf den Modul 4. Daraus folgt nachstehender Satz:

„Die Stufenzahl eines beliebigen stereometrischen Products ist der Summe der Stufenzahlen sämtlicher Factoren congruent, in Bezug auf den Modul 4; oder jene Stufenzahl ist gleich dem kleinsten positiven Reste (Null eingerechnet), den man erhält, wenn man die Stufenzahlen sämtlicher Factoren addirt und diese Summe durch 4 dividirt.“

§. 3.

Producte mehrerer Puncte oder Ebenen.

Aus den Definitionen (1 und 2) folgt:

„Dafs das Product abc oder $a(bc)$ Null ist, wenn die 3 Puncte a, b, c in gerader Linie liegen, und dafs, wenn Dies nicht der Fall, jenes Product der durch a, b, c gelegten Ebene congruent ist;“

und reciprok folgt aus den Definitionen (3 und 4):

„Dafs das Product $\alpha\beta\gamma$ oder $\alpha(\beta\gamma)$ Null ist, wenn die 3 Ebenen α, β, γ eine und dieselbe gerade Linie gemein haben, und dafs, wenn Dies nicht der Fall, jenes Product dem Durchschnittspuncte der 3 Ebenen α, β, γ congruent ist.“

Ferner folgt aus den Definitionen (5 und 6):

„Dafs das Product $abc\delta$ oder $a(bc\delta)$ oder $ab(c\delta)$ Null ist, wenn die 4 Punkte a, b, c, δ in einer Ebene liegen;”

und eben so, reciprok:

„Dafs das Product $\alpha\beta\gamma\delta$ oder $\alpha(\beta\gamma\delta)$ oder $\alpha\beta(\gamma\delta)$ Null ist, wenn die 4 Ebenen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch *einen* und denselben Punct gehen;”

und:

„Dafs, wenn Dies nicht der Fall ist, alle diese Producte Ausdrücke nullter Stufe darstellen.”

§. 4.

Vertauschung und Vereinigung der Factoren.

Die Definitionen (§. 1.) lehren unmittelbar:

„Dafs man die beiden Factoren eines stereometrischen Products vertauschen und einen Factor nullter Stufe in einem stereometrischen Product beliebig stellen, oder mit andern Factoren vereinigen kann, ohne den geometrischen Sinn des Products zu ändern.”

Eben so ergibt sich aus (§. 3.) sogleich:

„Dafs man in Producten von 2 bis 4 Punkten oder Ebenen die Factoren beliebig vertauschen und vereinigen (mit Klammern umschliessen) kann.”

Es werde jetzt ein beliebiges Product von 3 Factoren betrachtet, in welchem das Product zweier dieser Factoren mit dem dritten Factor multiplicirt ist, und es werde die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Factoren untersucht. Zuerst leuchtet aus dem so eben aufgestellten Satze hervor:

„Dafs man drei Factoren, deren Stufenzahlen zusammen kleiner als 5, oder gröfser als 7 sind, beliebig mit einander vertauschen und vereinigen darf.”

Denn in diesem Falle läfst sich das Product stets als ein Product von 3 oder 4 Punkten oder Ebenen darstellen. Z. B. das Product $aB\delta$, da die Gerade B ein Product zweier Punkte, etwa b und c ist, läfst sich in der Form $a(bc)\delta \equiv abc\delta$ darstellen.

Um auch in den übrigen Fällen (wo die Stufenzahlen zusammen 5, 6 oder 7 betragen und keine gleich 4 ist), darüber urtheilen zu können, gehen wir auf die Definitionen (1—4) zurück. Nach der Definition (3) ist das Product der beiden Ebenen abc und δab Null, wenn a, b, c, δ in *einer* Ebene liegen, d. h. wenn $abc\delta$ Null ist. Ist hingegen Dies nicht der Fall, so ist das Product gleich der Durchschnittskante ab beider Ebenen. Beides wird nach

der 6ten Definition durch das Product $abc\partial.ab$ ausgedrückt, indem dasselbe Null oder mit ab congruent ist, je nachdem $abc\partial$ Null ist, oder nicht. Es ergibt sich also die Congruenz

$$(1.) \quad abc(\partial ab) \equiv abc\partial.ab,$$

welche die Definition (3.) vollkommen darstellt. Auf gleiche Weise wird die vierte Definition durch die Formel

$$(2.) \quad abc(\partial a) \equiv abc\partial.a$$

dargestellt. Es ist klar, daß die Ordnung der Punkte innerhalb eines jeden dieser einzelnen Producte, da sie höchstens aus 4 Punctfactoren bestehen, gleichgültig ist, und daß daher die Formeln (1. und 2.) nur aussagen, daß man in den beiden dort angenommenen Fällen die 4 verschiedenen Factoren a, b, c, ∂ zu einem Product vereinigen kann. Aus diesen beiden Formeln, und ihren reciproken, läßt sich nun die Vertauschbarkeit und Vereinbarkeit der Factoren leicht beurtheilen. Man erhält nämlich aus der Formel (2.) sogleich:

$$(3.) \quad abc\partial.a \equiv abc(\partial a) \equiv ab(c\partial a) \equiv a(bc\partial a),$$

und aus der Formel (1.), für sich, oder verbunden mit (2.):

$$(4.) \quad abc\partial.ab \equiv abc(\partial ab) \equiv ab(c\partial ab) \equiv abc(\partial a)b.$$

Die 4 congruenten Ausdrücke in der Formel (3.) liefern, paarweise einander congruent gesetzt, 6 Formeln, und diese 6 Formeln geben unmittelbar das Gesetz

$$(5.) \quad AB\Gamma \equiv A(B\Gamma),$$

wenn die Stufenzahlen A, B, Γ beziehlich 3, 1, 1, oder 2, 2, 1, oder 1, 3, 1, oder 2, 1, 2, oder 1, 2, 2, oder 1, 1, 3 sind und dabei der letzte Factor mit dem ersten einen Punct (a) gemein hat. So z. B. giebt die erste Congruenz $abc\partial.a \equiv abc(\partial a)$ die Formel (5.), wenn man $abc \equiv A, \partial \equiv B, a \equiv \Gamma$ setzt u. s. w. Diese 6 Fälle lassen sich unter den gemeinsamen Ausdruck bringen, daß jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und ihre Summe gleich 5 ist. Wenn man unter den 4 congruenten Ausdrücken in (4.) die ersten 3 zusammenpaart, und den zweiten mit dem vierten, so erhält man die Formel (5.) für den Fall daß die Stufenzahlen beziehlich 3, 1, 2, oder 2, 2, 2, oder 2, 1, 3, oder 3, 2, 1 sind und von den Elementen A und Γ das eine ganz in dem andern liegt. Durch Reciprocität (d. h. wenn man die dritte und erste Stufe vertauscht) erhält man hieraus die Formel (5.) noch für die Stufenzahlen 1, 3, 2; 2, 3, 1 und 1, 2, 3. Diese 7 Fälle kann man unter den gemeinsamen Ausdruck bringen, daß jede der Stufenzahlen kleiner als 4 und

ihre Summe gleich 6 ist. Endlich ergibt sich durch Reciprocität, aus dem Falle wo die Summe der Stufenzahlen 5 ist, der, wo diese Summe 7 ist. Dabei verwandelt sich die Bedingung, dafs der erste und letzte Factor einen Punct gemeinschaftlich haben, in die Bedingung, dafs diese Factoren in derselben Ebene liegen.

Wir können, wie sich sogleich durch Vergleichung der Formeln (3) ergibt, diese Bedingung in beiden Fällen auch so ausdrücken, dafs der erste und letzte Factor entweder Gerade in derselben Ebene sind, oder dafs der eine jener Factoren ganz in dem andern liegt.

Vertauscht man in (5) links A und B, rechts A und $B\Gamma$, was nach dem ersten Satze dieses Paragraphs gestattet ist, so erhält man die Formel

$$(6.) \quad BA\Gamma \equiv B\Gamma A;$$

welche also in demselben Umfange gilt wie (5).

Diese Resultate lassen sich in den folgenden Satz zusammenfassen.

„Die Ordnung in welcher man ein Element (B) mit zwei andern Elementen (A und Γ) vereinigt, oder fortschreitend multiplicirt, ist in folgenden 3 Fällen gleichgültig für den geometrischen Werth des gesamten Products, d. h. es ist

$$BA\Gamma \equiv B\Gamma A \quad \text{und} \quad AB\Gamma \equiv A(B\Gamma):$$

1) Wenn die Summe der 3 Stufenzahlen kleiner als 5 oder gröfser als 7 ist;

2) Wenn von jenen beiden Factoren (A und Γ) der eine ganz in dem andern liegt;

3) Wenn jene beiden Factoren (A und Γ) Gerade in derselben Ebene sind und der andere Factor (B) ein Punct oder eine Ebene ist.”

Dieser Satz ist insofern erschöpfend, als es aufser den in demselben erwähnten Fällen keinen giebt, in welchem sich in einem nicht verschwindenden klammerlosen Producte von 3 Factoren der zweite mit dem dritten vertauschen oder vereinigen liefse, ohne dafs sich der geometrische Werth des Products änderte. Der leicht zu führende Beweis dieser Behauptung bleibt dem Leser überlassen.

Noch will ich den zweiten Theil dieses Fundamentalsatzes der stereometrischen Multiplication in Formeln kleiden, in denen schon die Bedingung mit aufgenommen ist, nämlich in

$$AB\Gamma B \equiv AB(\Gamma B) \equiv A(\Gamma B)B.$$

Denn die Factoren AB und A, und eben so (TB) und B, haben die Eigenschaft, daß der eine derselben ganz in dem andern liegt: also ist die Bedingung des Satzes erfüllt und die Vereinigung oder Vertauschung der Factoren dem Satze gemäß gestattet.

Die erste dieser Congruenzen läßt sich auf folgende Weise in Worte kleiden: Wenn in einem klammerlosen Product zwischen zwei congruenten Factoren ein dritter Factor steht, so kann man diesen mit dem folgenden durch Klammern zusammenschließen.

§. 5.

Besondere Umgestaltungen von Producten nullter Stufe.

Die Producte nullter Stufe, da sie, wie ich im folgenden Paragraph zeigen werde, alle algebraischen Oberflächen darzustellen vermögen, haben vor den andern Producten ein besonderes Interesse, und lassen eine Reihe von Umgestaltungen zu, die den andern Producten abgehen. Daher werde ich sie besonders ins Auge fassen.

Jedes Product, also auch das Product nullter Stufe, besteht zunächst aus 2 Factoren. Löset man nun einen dieser Factoren wieder in seine zwei Factoren auf, so erhält man 3 Factoren, deren Stufenzahlen, da das gesammte Product von nullter Stufe sein soll, eine durch 4 theilbare Summe haben müssen. Da die einzelnen Stufenzahlen stets kleiner als 4 sind, so kann die Summe nur entweder Null sein (wenn alle 3 einzeln genommen Null sind), oder 4, oder 8; in allen 3 Fällen können nach dem vorigen Paragraph die 3 Factoren beliebig vertauscht und vereinigt werden. Also:

„Wenn ein Product nullter Stufe aus 3 Factoren besteht, so können „dieselben beliebig vertauscht und vereinigt werden.“

Der Sinn dieses Satzes ist der, daß das Product, wenn es in dem einen Falle Null ist, auch jedesmal in dem andern Null sei. Hieraus folgt sogleich, daß man in einem beliebig zusammengesetzten Product nullter Stufe jeden beliebigen Factor A auf die letzte Stelle bringen kann, ohne daß er noch von einer Klammer umschlossen wird. Zu dem Ende hat man nur auf folgende Weise zu verfahren. Unter den beiden Factoren, aus denen das gesammte Product zunächst besteht, löse man denjenigen, welcher A enthält, in seine beiden Factoren auf; dann hat man 3 Factoren, welche man nach dem vorher aufgestellten Satze beliebig ordnen und vereinigen kann. Man stelle

nun denjenigen derselben, welcher A enthält, in die letzte Stelle und fasse die beiden andern zu einem Producte zusammen. Dies Verfahren, bei welchem jedesmal eine Klammer, die den Factor A noch umschließt, verschwindet, läßt sich also so lange fortsetzen, bis A von keiner Klammer mehr umschlossen wird; und dann ist A zugleich an den Schluß gerückt. Wendet man das Verfahren auf den ersten Factor (A_1) eines fortschreitenden Products nullter Stufe an, so erhält man die Formel

$$A_1 A_2 \dots A \equiv A_n \dots A_2 A_1,$$

und vertauscht man rechts A_1 mit dem gesammten vorhergehenden Factor, so erhält man das Product

$$\equiv A_1 (A_n \dots A_2)$$

d. h.:

„Ein fortschreitendes Product nullter Stufe darf man umkehren, oder es in zwei Theile sondern und den letzten umgekehrt in Klammern schließen.“

Es werde endlich ein beliebig zusammengesetztes Product nullter Stufe \mathfrak{A} betrachtet, welches noch einen Factor nullter Stufe \mathfrak{B} enthält. Es sei dies das Product, welches übrig bleibt, wenn man in \mathfrak{A} den Factor \mathfrak{B} wegläßt und mit \mathfrak{C} bezeichnet; dann muß \mathfrak{C} , wie leicht zu sehen, gleichfalls von nullter Stufe sein; und da man, nach dem vorhergehenden Paragraph, einen Factor nullter Stufe beliebig stellen und mit andern Factoren vereinigen, oder von ihnen trennen kann, so kann man dann auch den Factor \mathfrak{B} isolirt an den Anfang stellen und erhält:

$$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{C}.$$

Wenn nun \mathfrak{B} nicht Null ist, so folgt aus der Definition der Größen nullter Stufe, $\mathfrak{B}\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}$. Daraus ergibt sich, daß \mathfrak{A} dann, und nur dann, Null ist, wenn entweder \mathfrak{B} oder \mathfrak{C} verschwindet. Also: „Wenn ein Product nullter Stufe noch einen Factor nullter Stufe enthält, so kann man diesen als den einen Factor des gesammten Products setzen; und als den andern dasjenige Product, welches übrig bleibt, wenn man aus dem gesammten Product diesen Factor wegläßt. In diesem Falle ist das gesammte Product dann, und nur dann, Null, wenn der eine oder der andere dieser Factoren Null ist.“

§. 6.

Stereometrische Gleichungen algebraischer Oberflächen.

Der Satz, welchen ich in der vorhergehenden Abhandlung über die *lineale* Erzeugung der algebraischen Oberflächen aufgestellt habe, lautete: „Wenn die Lage eines Puncts x (oder einer Ebene), im Raume, dadurch beschränkt ist, daß zwei Gerade, welche durch lineale Constructionen aus x und einer Reihe fester Elemente hervorgehen, in derselben Ebene liegen sollen, so ist der Ort von x eine algebraische Oberfläche; und zwar ist sie ein Gebilde n ten Grades, wenn bei den Constructionen x im Ganzen n mal angewandt wird. Umgekehrt läßt sich jede algebraische Oberfläche auf die angegebene Weise erzeugen.“

Es kommt darauf an, diesen Satz durch *stereometrische* Formeln darzustellen; wobei ich den reciproken Fall, daß statt des Punctes x eine Ebene vorkommt, übergehe, da er sich durch Reciprocität stets von selbst ergibt. Die zwei Geraden, welche nach dem Satze in derselben Ebene liegen sollen, seien P und Q , so ist die Gleichung der Oberfläche:

$$PQ = 0.$$

Jede der Geraden P und Q soll, nach dem Satze, aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Construction erfolgen. Die Erzeugung neuer Elemente durch lineale Construction läßt sich auf die folgenden vier Fälle, in denen aus zwei Elementen ein drittes entsteht, zurückführen: 1) Wenn aus zwei Puncten ihre Verbindungs-Gerade; 2) Wenn aus einem Punct und einer Geraden ihre Verbindungs-Ebene; 3) Wenn aus zwei Ebenen ihre Durchschnittslinie; 4) Wenn aus einer Ebene und einer Geraden ihr Durchschnittspunct entsteht. Also: wenn aus zwei Elementen durch lineale Construction ein drittes entsteht, so ist das letztere jedesmal das stereometrische Product der beiden ersteren; und zwar im Sinne der Definitionen (1 bis 4). Und umgekehrt: jedes stereometrische Product, welches durch die Definitionen (1 bis 4) bestimmt wird, d. h. welches nicht von nullter Stufe ist, entsteht durch lineale Construction aus seinen beiden Factoren. Hieraus folgt, daß sich jedes Element, welches aus x und einer Reihe fester Elemente durch lineale Constructionen erfolgt, bei denen n mal x angewandt wird, als ein stereometrisches Product darstellen läßt, in welchem n mal als Factor x vorkommt; und daß, umgekehrt, jedes stereometrische Product, welches n mal als Factor x enthält und außerdem nur feste Elemente zu Factoren hat, und

welches weder selbst von nullter Stufe ist, noch einen Factor nullter Stufe enthält, durch lineale Constructionen aus x und den festen Elementen sich erzeugen läßt; und zwar in der Art, daß x bei diesen Constructionen n mal angewandt wird.

Betrachtet man nun ein beliebiges, gleich Null gesetztes Product nullter Stufe, welches n mal den veränderlichen Punct x als Factor enthält, aber keinen Factor nullter Stufe mehr einschließt, so kann man es immer auf die Form bringen, daß es zunächst als Product zweier Geraden sich zeigt. Nämlich: enthält das Product irgend eine feste Gerade als Factor, so kann man nach dem vorigen Paragraph diese Gerade in die letzte Stelle des Products bringen, ohne daß dieselbe noch von einer Klammer umschlossen wird. Der andere Factor muß dann, da die Summe der Stufenzahlen durch 4 theilbar ist, gleichfalls eine Gerade sein; und das Product hat die verlangte Form. Kommt aber in dem Product keine feste Gerade vor, so müssen die festen Elemente Punkte oder Ebenen sein; Punct und Ebene kann man aber als Producte einer festen Geraden in eine Ebene oder in einen Punct darstellen, und dann wie vorher die feste Gerade in die letzte Stelle bringen. Die Gleichung wird also die Form

$$PQ = 0$$

erhalten, wo in P und Q der veränderliche Punct x im Ganzen n mal als Factor vorkommt; P und Q ergeben sich also durch lineale Constructionen, bei welchen n mal x angewandt wird; und da die Gleichung $PQ = 0$ die Bedingung ausdrückt, daß die Geraden P und Q in derselben Ebene liegen, so ist nach dem angeführten Satze der Ort des Punctes x eine Oberfläche n ter Ordnung.

Hat man endlich eine Gleichung

$$\mathfrak{P} = 0,$$

in welcher \mathfrak{P} ein Product nullter Stufe ist, welches n mal x als Factor enthält, aber noch Factoren nullter Stufe in sich schließt, so kann man \mathfrak{P} , nach dem vorigen Paragraph, stets auf die Form $\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \dots$ bringen, wo \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , ... Producte nullter Stufe sind, die keinen Factor nullter Stufe mehr enthalten. Es komme x in jenen Producten \mathfrak{B} , \mathfrak{C} , \mathfrak{D} , ... beziehlich b mal, c mal, d mal vor, so hat man $b + c + d + \dots = n$ und

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{D} \dots = 0.$$

Die Gleichung drückt aus, daß entweder $\mathfrak{B} = 0$, oder $\mathfrak{C} = 0$, oder $\mathfrak{D} = 0$, ... ist. Diese einzelnen Gleichungen stellen aber, nach dem so eben Erwiesenen, Oberflächen von b ter, c ter, d ter Ordnung dar u. s. w. Also ist der durch die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$ bedingte *Ort* von x eine Oberfläche n ter Ordnung, welche in jene Oberflächen b ter, c ter ... Ordnung zerfällt. Demnach haben wir folgenden Satz:

„Die Gleichung $\mathfrak{P} = 0$, in welcher \mathfrak{P} ein Product nullter Stufe ist, welches n mal den veränderlichen Punct x als Factor enthält, giebt, als *Ort* von x , eine Oberfläche n ter Ordnung; und umgekehrt läßt sich jede algebraische Oberfläche durch eine solche Gleichung darstellen.“

Stettin, im Juli 1852.