13.

Bemerkungen über die Bildung der Primzahlen aus einander.

(Vom Herrn Prof. *H. F. Scherk* in Halle.)

Eine geometrische, mit der Theorie der Primzahlen scheinbar nur in sehr entfernter Verbindung stehende Untersuchung veranlafste mich vor längerer Zeit zu dem Versuche, die Primzahl 17 aus allen kleineren Primzahlen und der Zahl 1 auf möglichst einfache Weise zusammenzusetzen. Hier ergab sich denn bald, dafs $17 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 2.13$, d. h. dafs 17 durch blofse Addition und Subtraction aus allen kleineren Primzahlen, wenn die Zahl 1 der Kürze halber mit zu diesen gerechnet wird, zusammengesetzt werden könne, wobei jedoch die nächstvorhergehende Primzahl 13 zweimal genommen werden müsse. Dies führte zu der Vermuthung, dafs dieselbe Eigenschaft vielleicht allen Primzahlen von der Form $4n + 1$ zukommen möchte. Aber diese Vermuthung bewährte sich nicht; denn es ist z. B. $13 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 + 11$, so dafs die der 13 nächstvorhergehende Primzahl blofs Einmal genommen zu werden braucht, dahingegen $19 = 1 - 2 + 3 + 5 - 7 - 11 + 13 + 17$ und $23 = 1 - 2 + 3 - 5 + 7 + 11 - 13 - 17 + 2.19$. Da nun 13 wie 17 von der Form $4n + 1$, 19 wie 23 von der Form $4n + 3$ sind, das Bildungsgesetz aber bei keiner in diesen beiden Paaren sich befindenden Primzahl in der Hinsicht dasselbe bleibt, ob die nächstvorhergehende Primzahl einfach oder doppelt genommen werden mufs, so bot sich die Idee dar, von der Form der Primzahlen ganz zu abstrahiren, und vielmehr auf die Stelle zu sehen, welche sie in der natürlichen Reihe der Primzahlen einnehmen, da unter den aufeinander folgenden Primzahlen 13, 17, 19, 23 dasselbe Bildungsgesetz für 13 und 19, und für 17 und 23 Statt findet.

Auf diese Weise gelangte ich durch eine nicht bewiesene Induction zu folgenden Sätzen. Trennt man in der natürlichen Reihe der Primzahlen 2, 3, 5, 7, 11, 13 etc. die in ungerader Stelle stehenden 2, 5, 11 etc. von den in gerader Stelle stehenden 3, 7, 13 etc., so kann

Erstens. Jede geradstellige Primzahl aus allen kleineren und der Zahl 1 durch bloſse Addition und Subtraction, so daſs jede von ihnen nur Einmal genommen wird, zusammengesetzt werden.

Zweitens. Jede ungeradstellige Primzahl kann aus allen kleineren und der Zahl 1 auf dieselbe Weise gebildet werden, mit dem Unterschiede jedoch, daſs die nächstvorhergehende Primzahl doppelt genommen werden muſs.

Was hierbei auſser der einfachen Bildungsart besonders merkwürdig scheint, ist der, so viel mir bekannt ist, sonst noch nirgends hervorgetretene Unterschied zwischen denjenigen Primzahlen, die in der natürlichen Reihe aller Primzahlen eine gerade, und derjenigen, die in derselben Reihe eine ungerade Stelle einnehmen. Daſs keine Primzahl der einen Art nach dem Formationsgesetz der anderen Art gebildet werden könne (die Zahl 3 ausgenommen, auf welche wir jedoch sogleich besonders zurückkommen werden), liegt am Tage. Denn jeder geradstelligen Primzahl geht 1 und eine ungerade Menge von Primzahlen vorher; da sich nun unter diesen die einzige gerade Zahl 2 findet, so ist klar, daſs die algebraische Summe aller dieser Zahlen, wenn sie nach Belieben positiv oder negativ genommen werden, stets eine ungerade Zahl sein wird, und folglich auch vielleicht die verlangte Primzahl sein kann; wenn aber eine von ihnen, die von der 2 verschieden ist, doppelt, oder überhaupt eine gerade Anzahl mal genommen wird, so ist das Resultat eine gerade Zahl, und kann folglich der verlangten Primzahl nicht gleich sein. Demnach kann keine geradstellige Primzahl nach dem zweiten Satze gebildet werden. Ganz auf dieselbe Weise läſst sich zeigen, daſs keine ungeradstellige Primzahl nach dem ersten Satze zusammengesetzt werden kann. Dieses Raisonnement ist aber offenbar dann nicht anwendbar, wenn diejenige Primzahl, welche eine gerade Anzahl mal genommen wird, die 2 ist; und demnach ist es möglich, daſs die Primzahl 3, bei deren Formation 2 die einzige in Betracht kommende Primzahl ist, sowohl nach der einen, als nach der andern Regel gebildet werden kann, wie denn in der That $3 = 1 + 2$ und $= -1 + 2.2$ ist.

Man kann jedoch den obigen Sätzen noch einige nähere Bestimmungen hinzufügen, die zwar an sich willkürlich sind, die aber nicht bloſs bewirken, daſs auch die beiden ersten Primzahlen der allgemeinen

Regel unterworfen sind, sondern auch in die Bildungsart der folgenden Primzahlen aus den vorhergehenden eine gewisse Einförmigkeit hineinbringen. Es ist nämlich zuvörderst offenbar, daſs nicht alle Primzahlen aus allen vorhergehenden durch bloſse Addition und Substraction *auf eine einzige Weise* zu bilden seyen. So ist z. B.

$$13 = \quad 1+2-3-5+7+11,$$

und auch

$$13 = -1+2+3+5-7+11,$$

und namentlich wird dies zuerst bei jeder geradstelligen Primzahl Statt finden, die sich von der nächstvorhergehenden um 2 unterscheidet, und bei deren Zusammensetzung aus den kleineren Primzahlen 2 positiv genommen werden muſste. Denn da, wie sogleich genauer gezeigt werden wird, bei allen geradstelligen Primzahlen die nächstvorhergehende positiv genommen werden kann, so ist, wenn M eine solche geradstellige, L die nächstvorhergehende ungeradstellige Primzahl, und $M-L=2$ ist, M von der Form

$$M = \pm 1 + 2 \pm 3 \pm 5 \pm \ldots \pm K + L.$$

Setzt man nun

$$x = \mp 1 + 2 \mp 3 \mp 5 \mp \ldots \mp K + L,$$

so ist

$$M + x = 4 + 2L$$

und folglich

$$x = M,$$

so daſs also eine solche Primzahl aus allen vorhergehenden durch bloſse Addition und Subtraction mindestens auf zwei verschiedene Weisen zusammengesetzt werden kann. Sodann aber sieht man auch, daſs bei jeder Primzahl, in deren Bildung die Form $1+2-3$ oder $2+P-Q$ vorkömmt, wo P, Q zwei beliebige auf einander folgende Primzahlen vorstellen, deren Unterschied $=2$ ist, für diese Formen die ihnen resp. gleichgeltenden $-1-2+3$ oder $-2-P+Q$ gesetzt werden können. So ist z. B.

$$\begin{aligned} 17 &= \quad 1+2-3-5+7-11+2.13, \\ &= -1-2+3-5+7-11+2.13, \\ &= -1+2+3+5-7-11+2.13, \end{aligned}$$

und auf dieselbe Art werden eine Menge, wo nicht die meisten Primzahlen auf mehrere verschiedene Weisen aus allen kleineren Primzahlen zusammenzusetzen sein. Um nun die Anzahl dieser verschiedenen Bildungsarten zu beschränken, scheint es zweckmäſsig, die Vorzeichen noch an ein besonderes Gesetz zu binden, welches sie erfüllen sollen. Wäre es eine Möglichkeit, ein solches zu finden, welches sich auf die Aufeinanderfolge der Vorzeichen bezöge, so wäre dies offenbar von der höchsten Wichtigkeit, da man hierdurch ein directes Mittel hätte, jede Primzahl aus den vorhergehenden zusammenzusetzen. Da sich mir jedoch kein solches darbot, so richtete ich mein Augenmerk zuerst nur auf die Anzahl der positiven und der negativen Glieder, und hier hat sich denn durch Beobachtung desjenigen Gesetzes, welches bei den Primzahlen Statt findet, die nur auf eine einzige Weise aus den vorhergehenden gebildet werden können, gleichfalls durch Induction gefunden, dafs es jedesmal möglich ist,

> bei der Bildung der geradstelligen Primzahlen die beiden nächtvorhergehenden positiv, von den andern aber gleich viele positiv und negativ, bei der Bildung der ungeradstelligen Primzahlen die nächstvorhergehende positiv, und, wie schon erwähnt, doppelt, von den anderen aber gleichfalls gleich viele positiv und negativ zu nehmen.

Aber auch jetzt ist die Bildungsart der Primzahlen noch nicht auf eine einzige eingeschränkt. Denn man sieht zum z. B., dafs wenn $Q-P = a_1$, $Q'-P' = a$ ist, für die Form $P-Q-P'+Q'$ die ihr gleichgeltende $-P+Q+P'-Q'$ gesetzt werden kann, ohne dafs die Anzahl der positiven und der negativen Glieder eine Veränderung erleidet. So ist z. B.

$$23 = 1-2+3-5+7+11-13-17+2.19,$$

und auch

$$23 = 1-2+3+5-7-11+13-17+2.19.$$

Um also endlich zu einer einzigen Bildungsart zu gelangen, verfahre man auf folgende Weise. Soll eine geradstellige Primzahl aus allen vorhergehenden und der Zahl 1 durch blofse Addition und Subtraction zusammengesetzt werden, so nehme man zuerst 1 und alle kleineren geradstelligen Primzahlen positiv, alle kleineren ungeradstelligen aber negativ, mit Ausnahme der letzten ungeradstelligen Primzahl, welche positiv genommen werden mufs; zieht man dann die zweite Summe von der ersten ab, so ist das Resultat jedesmal eine Zahl, welche gröfser ist, als die zu bildende Primzahl (nur bei 3 und 7 ist es der zu bildenden Zahl gleich). Um nun den Unterschied des Resultats und der zu bildenden Primzahl, welcher nothwendig eine gerade Zahl ist, wegzuschaffen, versetze man so oft als nöthig eine positive Primzahl und eine kleinere negative mit einander, und man wird im Allgemeinen am schnellsten zum gewünschten Ziele gelangen, wenn man, mit Ausnahme der beiden gröſsten positiv zu nehmenden Primzahlen, stets die möglichst gröſste positive mit einer möglichst kleinen negativen Zahl versetzt, immer jedoch das Princip festhält, durch keine Versetzung ein Resultat hervorzubringen, welches kleiner ist, als die verlangte Primzahl. Ganz auf dieselbe Weise wird jede ungeradstellige Primzahl gebildet, nur mit dem Unterschiede, daſs man gleich Anfangs bloſs die einzige nächstvorhergehende Primzahl positiv, aber diese dann doppelt zu nehmen hat.

Beisp. 1. Es soll die 10te Primzahl 29 aus den vorherigen gebildet werden. Es ist

$$\begin{array}{l} 1-2 \\ +3-5 \\ +7-11 \\ +13-17 \\ +19 \\ +23 \\ \hline =66-35=31. \end{array}$$

Demnach der Unterschied $31-29$ durch Versetzung wegzuschaffen, welches geschieht, wenn $+2-3$ statt $-2+3$ gesetzt wird.

2. Es soll die 17te Primzahl 59 aus den vorhergehenden gebildet werden. Es ist

$$\begin{array}{rl} & 1-2 \\ & +2-5 \\ & +7-11 \\ & +13-17 \\ & +19-23 \\ & +29-31 \\ & +37-41 \\ & +43-47 \\ +2.53= & +106 \\ \hline & =258-177=81. \end{array}$$

Folglich ist $81-59=22$ durch Versetzung wegzuschaffen. Da nun $43-11=32$, durch Versetzung von 43 mit 31 also das Resultat kleiner als 59 würde, so kann man 43 nur mit 41 versetzen; eben so ist $37-9=26$, also mufs 37 mit 31 versetzt werden; $29 - 3 = 26$, also kann 29 nicht versetzt werden; $19 - 3 = 16$, folglich müssen 19 und 17 ihre Stellen vertauschen, und die noch übrigbleibende 1 wird durch Versetzung von 3 und 2 fortgeschafft, so dafs

$$59 = 1 + 2 - 3 - 5 + 7 - 11 + 13 + 17 - 19 - 23 + 29 + 31 - 37 + 41 - 43 - 47 + 2.53.$$

Nach diesen Regeln ist die diesem Hefte angefügte, mit II. bezeichnete Tafel berechnet, und bis zur Primzahl 499 ausgedehnt worden.

Diese Tafel enthält die Coefficienten, mit welchen die über denselben stehenden Primzahlen multiplicirt werden müssen, um die zu Anfang jeder Horizontalreihe als Argument stehende Primzahl zum Resultat zu geben, so dafs z. B. $11 = +1 - 2 + 3 - 5 + 2.7$ u. s. w. Aufser den angegebenen habe ich noch die Primzahl 5003 nach denselben Gesetzen berechnet.

Ein Gesetz der Vorzeichen ist in dieser Tafel auf keine Weise zu erkennen; ein solches liefs sich aber auch bei der angegebenen durchaus willkürlichen Bildungsart gar nicht erwarten. Nur dies kann man bemerken: je weiter die zu bildende Primzahl hinaus liegt, eine desto geringere Anzahl von Primzahlen hat man aus der ursprünglichen Anordnung zu versetzen, so dafs mit Ausnahme der Zahlen 2 und 3, welche häufig ihr Vorzeichen vertauschen, die Vorzeichen immer mehr abwechselnd plus und minus sind. So ist z. B. für 5003 die Summe der ursprünglichen positiven Glieder $= 781969$, der negativen $= 774388$, also ihr Unterschied 7581, demnach noch wegzuschaffen $7581 - 5003 = 2578$, welches durch die Versetzung von 4973 mit 3691, von 4937 mit 4933, von 4789 mit 4787 und von 3 mit 2 bewirkt wird, so dafs, mit Ausnahme vor 2 und 3, die Vorzeichen bis zu 3677 abwechselnd positiv und negativ sind.

Eine sehr einfache Folgerung aus den aufgestellten Sätzen ist, dafs die natürliche Reihe der Primzahlen, wenn diese von 1 bis zu einer beliebigen hin, abwechselnd positiv und negativ genommen werden, ein Resultat giebt, welches g r ö f s e r ist (nur bei den 5 ersten Primzahlen ist es nicht gröfser, sondern g l e i c h), als die nächstfolgende Primzahl, wobei jedoch zu bemerken ist, dafs die letzte Primzahl der Reihe positiv genommen werden mufs, wenn die vorhergehende positiv, und doppelt, wenn die vorhergehende negativ ist. So z. B. ist

$$2.1=2$$
$$1+2=3$$
$$1-2+2.3=5$$
$$1-2+3+5=7$$
$$1-2+3-5+2.7=11$$
$$1-2+3-5+7+11>13$$
$$1-2+3-5+7-11+2.13>17$$
$$1-2+3-5+7-11+13+17>19$$
etc.

Eine Bemerkung des Herrn Verfassers über Primzahlen, aus einem Briefe an den Herausgeber.

Die Primzahlen von der Form $4n+1$ unterscheiden sich von denen $4n+3$ auf so vielfache und entschiedene Weise, dafs man, da über das Bildungsgesetz der Primzahlen, vorausgesetzt, dafs ein solches überhaupt entweder für alle, oder nur für gewisse Gattungen der Primzahlen existirt, gar nichts bekannt ist, von vorn herein die Frage, ob bis zu einer gegebenen Zahl hin, gleichviele Primzahlen $4n+1$ und $4n+3$ sich finden, wie ich glaube, nicht leicht entschieden wird bejahen, aber eben so wenig verneinen wollen. Der einzige Grund für eine bejahende Antwort möchte der sein, dafs man nicht absehe, weswegen in der Reihe aller ungeraden Zahlen, von der Form $4n+1$, sich mehr oder weniger Primzahlen finden sollten, als in der Reihe aller ungeraden Zahlen $4n+3$, da doch beide Reihen gleichviel Zahlen enthalten. Aber selbst diesen Schlufs, dessen Schwäche übrigens einleuchtet, zugegeben, so schien es mir doch sicherer, einmal die Frage auf dem Wege der reinen Erfahrung, also durch blofses Abzählen bis zu einer nicht unbeträchtlichen Gränze hin, wenn auch nicht zur völligen, so doch zu einer Art von Entscheidung zu bringen. Auf diese Weise hat sich ergeben, dafs die Primzahlen sich auf folgende Weise eintheilen. Es finden sich:

bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$	bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$	bis	Primzahlen $4n+1$	Primzahlen $4n+3$
1000	81	87	18000	1023	1041	35000	1865	1867
2000	148	155	19000	1074	1084	36000	1908	1916
3000	212	218	20000	1131	1131	37000	1958	1964
4000	269	281	21000	1178	1182	38000	2007	2010
5000	331	338	22000	1229	1235	39000	2054	2053
6000	385	398	23000	1278	1286	40000	2096	2107
7000	444	456	24000	1332	1336	41000	2138	2153
8000	501	506	25000	1377	1385	42000	2190	2202
9000	556	561	26000	1428	1432	43000	2244	2250
10000	611	618	27000	1484	1477	44000	2288	2291
11000	661	674	28000	1527	1528	45000	2335	2340
12000	710	728	29000	1574	1579	46000	2384	2377
13000	769	778	30000	1618	1627	47000	2326	2325
14000	821	831	31000	1670	1670	48000	2476	2470
15000	869	885	32000	1714	1718	49000	2520	2515
16000	923	939	33000	1769	1769	50000	2566	2567
17000	972	988	34000	1822	1816			

Hieraus geht also, wie zu erwarten war, hervor, dafs man mit grofser Wahrscheinlichkeit annehmen kann, die Anzahl der Primzahlen $4n+1$ sei der Anzahl der Primzahlen $4n+3$ nicht blofs im Allgemeinen, sondern auch bis zu einer gegebenen Grenze hin sehr nahe gleich.