

einem anderen numerischen Factor behaftet erschiene, wodurch dann auch alle anderen Consequenzen wesentlich verändert werden.

Der Verf. publicirte gleichzeitig in der Wien. Akad. eine Abhandlung „über das Wärmegleichgewicht in Gasen, auf welche äussere Kräfte wirken“ worin er durch Rechnung nachwies, daß durch dieselben weder die Wahrscheinlichkeit der verschiedenen Richtungen noch der verschiedenen Größen der Geschwindigkeiten, sondern bloß die Dichtigkeit in den verschiedenen Volumelementen beeinflusst wird.

VII. *Notiz zur Theorie der Interferenzerscheinungen;*
von O. Chwolson, Cand. Univ. Petrop.

Die bei der Interferenz zweier Lichtstrahlen theoretisch abzuleitende Lichtstärke F ist bekanntlich eine einfach periodische Function des Phasenunterschiedes; die auf einander folgenden Maxima und Minima sind untereinander gleich. In Wirklichkeit zeigt es sich aber, daß mit wachsendem Phasenunterschiede die Maxima dunkler, die Minima heller werden, in Folge dessen die Deutlichkeit der Interferenzstreifen abnimmt und die ganze Erscheinung mehr und mehr verschwimmt. Die gewöhnliche Interferenzformel ist somit richtig nur bis zu einem Gangunterschiede von Einer Wellenlänge. Man kann aber für F eine Formel aufstellen, welche nicht nur die abwechselnden Maxima und Minima zeigt, sondern *auch die Veränderungen der Letzteren* bis zum Erlöschen der ganzen Erscheinung. Allerdings müßten nach dieser Formel bei weiter wachsendem Gangunterschiede die verschwundenen Streifen allmählich wieder hervortreten, was bisher

wenigstens nie beobachtet worden ist; trotzdem bietet die Formel eine grössere Annäherung an die Wirklichkeit als die gewöhnlich übliche, welche, wie erwähnt, bei einem Gangunterschiede von zwei Wellenlängen ein mit der Beobachtung nicht mehr völlig stimmendes Resultat giebt.

Da die Ursache des Widerspruches zwischen Rechnung und Beobachtung darin liegt, daß letztere von der Annahme *homogener* Strahlen ausgeht, so werden wir annehmen, daß wir nicht mit einzelnen, homogenen Strahlen, sondern mit Strahlencomplexen zu thun haben, in welchen Strahlen von allen möglichen Wellenlängen zwischen $B - \tau$ und $B + \tau$ enthalten sind. Hier ist B die Wellenlänge eines mittleren Strahles und τ eine, im Verhältnisse zu B sehr kleine GröÙe. Die Entfernung y des Theilchens von der Ruhelage zur Zeit t ist gleich

$$y = \sum a \sin \frac{2\pi t}{x},$$

wo x von $B - \tau$ bis $B + \tau$ variirt. Wir fassen nun die Strahlen paarweise zusammen, so daß in jedem Paar der Unterschied in den Wellenlängen gerade τ beträgt und nehmen an, daß die Paare unter einander identisch seyen.

Wir ziehen also die Unhomogenität des Strahles wohl in Betracht, vernachlässigen aber den Umstand, daß die Wellenlängen in den verschiedenen Strahlenpaaren unter einander wieder ein wenig verschieden seyn werden. Vernachlässigen wir hierbei τ im Verhältnisse zu B , so erhalten wir, wenn $\frac{B}{\tau} = r$ (eine sehr große Zahl) gesetzt wird

$$y = A \cos \frac{\pi t}{Br} \sin 2\pi \frac{t}{B} \dots \dots (1);$$

hier ist A die Amplitude für den Fall von homogenem Licht. Wir erhalten somit eine Schwingung mit der veränderlichen Amplitude

$$S = A \cos \frac{\pi t}{Br} \dots \dots \dots (2),$$

die zwischen Null und A schwankt. Von einem Maximum der Amplitude bis zur nächsten vergeht die Zeit Br ; es

finden also r Schwingungen statt, deren Gesamtheit wir eine *Schwebung* nennen werden. Die Lichtstärke F ist proportional dem Quadrat der größten Amplitude, also kurz

$$F = A^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Betrachten wir nun die bei der Interferenz zweier solcher Büschel sich zeigenden Erscheinungen. Es seyen x und x' die von den beiden Strahlen durchlaufenen Wege, dann sind deren Gleichungen

$$Y = A \cos \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{B} - \frac{x}{\lambda} \right)$$

und

$$Y' = A \cos \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x'}{\lambda} \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{B} - \frac{x'}{\lambda} \right),$$

wenn λ die Wellenlänge des mittleren Strahls bedeutet; $x - x'$ ist der Gangunterschied. Setzt man

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x}{\lambda} \right) &= \alpha \\ 2\pi \frac{x - x'}{\lambda} &= \delta \end{aligned} \right\} \quad (4),$$

so erhält man für die Amplitude S der resultirenden Schwingung unsere Hauptformel

$$S^2 = A^2 \left\{ \cos^2 \alpha + \cos^2 \left(\alpha + \frac{\delta}{2r} \right) + 2 \cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\delta}{2r} \right) \cos \delta \right\} \quad (5),$$

wo α von der Zeit und δ vom Gangunterschiede abhängt. Setzt man $r = \infty$, so ist $\alpha = 0$ und man erhält die gewöhnliche Interferenzformel. Es ist nun S an verschiedenen Punkten, d. h. bei verschiedenen δ näher zu untersuchen.

I. Es sey $x - x' = n\lambda$, also $\delta = 2n\pi$. In diesen Punkten giebt die gewöhnliche Theorie ein von n unabhängiges Maximum der Lichtstärke gleich $4A^2$. Die Formel (5) aber giebt die Amplitude

$$S_1 = A \left[\cos \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x}{\lambda} \right) + \cos \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x'}{\lambda} \right) \right]$$

oder

$$S_1 = 2A \cos \frac{n\pi}{2r} \cdot \cos \frac{\pi}{r} \left(\frac{t}{B} - \frac{x' + x}{2\lambda} \right).$$

Diese Formel entspricht dem Ausdruck (2), nur daß statt A wieder ein Product steht. S_1 schwankt zwischen Null und $2A \cos \frac{n\pi}{2r}$; die Lichtstärke F_1 ist also gleich

$$F_1 = 4A^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2r};$$

sie ist also von n abhängig und sinkt mit wachsendem n .

II. Es sey $x - x' = \frac{2n+1}{2} \lambda$, also $\delta = (2n+1)\pi$.

Auf demselben Wege erhalten wir für die Lichtstärke:

$$F_2 = 4A^2 \sin^2 \frac{(2n+1)\pi}{4r},$$

welche mit n wächst.

Ehe wir zur Untersuchung der Lichtstärken für beliebige Gangunterschiede $x - x'$ übergehen, wollen wir beweisen, daß sich die Maxima und Minima nicht etwa *verschoben* haben, daß die Lichtstärke nirgends Null seyn kann. Die Bedingung $S = 0$ kann nämlich auf die Form

$$\left\{ \frac{\cos \alpha - \cos \left(\alpha + \frac{\delta}{2r} \right)}{2 \cos \frac{\delta}{2}} \right\}^2 = -\cos \alpha \cos \left(\alpha + \frac{\delta}{2r} \right)$$

gebracht werden, welche, da die linke Seite *positiv* ist, für *jedes* α nur bei $\delta = 2r\pi$ d. h. bei $x - x' = r\lambda$ erfüllt seyn kann. Innerhalb der ersten r Streifen, wo r eine außerordentlich grose Zahl ist, kann somit die Lichtstärke nirgend Null seyn.

Um nun S für beliebiges δ zu untersuchen, stellen wir die Gleichung $\frac{\partial(S^2)}{\partial \alpha} = 0$ auf, welche die Form hat:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha - 2 \operatorname{tg} \alpha \cdot \cotg \frac{\delta}{2r} = 1.$$

Ihre Wurzeln sind

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\delta}{4r}, \\ \alpha_2 &= \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{4r} \end{aligned} \right\} (6).$$

Dies in (5) eingesetzt ergibt für beliebiges δ das Maximum und Minimum der Amplitude:

$$\left. \begin{aligned} S_1' &= 2A \cos \frac{\delta}{4r} \cos \frac{\delta}{2} \\ S_2' &= 2A \sin \frac{\delta}{4r} \sin \frac{\delta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (7).$$

Setzt man aber die (6) in den zweiten Differentialquotienten von S nach α ein, so erhält man die zwei Ausdrücke

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= -4 \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right) \\ \Omega_2 &= +4 \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right) \end{aligned} \right\} \quad (8).$$

Dies zeigt, daß

- 1) in denjenigen Punkten, in welchen $\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} > 0$,
ist das Maximum der Amplitude durch S_1' , das Minimum durch S_2' ausgedrückt; folglich ist die Lichtstärke gleich

$$F_1' = 4A^2 \cos^2 \frac{\delta}{4r} \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (9);$$

- 2) in denjenigen Punkten, in welchen $\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} < 0$,
ist das Maximum durch S_2' , das Minimum durch S_1' ausgedrückt; folglich ist die Lichtstärke gleich

$$F_2' = 4A^2 \sin^2 \frac{\delta}{4r} \sin^2 \frac{\delta}{2} \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

Längs der Curve, welche die Interferenzstreifen senkrecht durchschneidet, ändert sich $\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r}$ beständig und wird bald positiv, bald negativ, so daß man für die Lichtstärke bald (9), bald (10) zu gebrauchen hätte. Ehe wir zur *Wegschaffung* dieses Uebelstandes gehen, wollen wir eine interessante Punktreihe betrachten, nämlich diejenige, für welche

$$\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

ist. Die Wurzeln von (11) sind

$$\delta_0 = \left. \begin{aligned} (2n+1)\pi \frac{2r}{2r+1}, \\ (2n+1)\pi \frac{2r}{2r-1} \end{aligned} \right\} \quad . \quad (12),$$

wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Ich nenne jene Punkte Aequivalenzpunkte. Sie liegen, wie (12) zeigt, paarweise zu beiden Seiten der sub II betrachteten Punkte, für welche $\delta = (2n+1)\pi$, also $\lambda = (2n+1)\frac{\lambda}{2}$. Die Entfernung A der beiden Punkte eines solchen Paares wird ausgedrückt durch

$$A = 4\pi \frac{2n-1}{r},$$

sie wächst also mit n .

Um zu bestimmen, welche Bewegung in den Aequivalenzpunkten stattfindet, haben wir in (7) zu setzen $\delta = \delta_0$ und $\cos \delta_0 = -\cos \frac{\delta_0}{2r}$. Dies giebt

$$\begin{aligned} S_1' &= 2A \cos \frac{\delta_0}{4r} \cos \frac{\delta_0}{2} = A \sqrt{(1 + \cos \frac{\delta_0}{2r})(1 + \cos \delta_0)} \\ &= A \sqrt{(1 + \cos \frac{\delta_0}{2r})(1 - \cos \frac{\delta_0}{2r})} = A \sin \frac{\delta_0}{2r} \end{aligned}$$

und ebenso

$$S_2' = A \sin \frac{\delta_0}{2r}$$

d. h. also

$$S_1' = S_2' = A \sin \frac{\delta_0}{2r}.$$

Das Maximum der Amplitude ist gleich ihrem Minimum, es findet also in den Aequivalenzpunkten eine Schwingung statt mit constanter Amplitude, als hätten wir nicht zwei interferirende unhomogene Strahlencomplexe, sondern einen homogenen Strahl, von der Intensität

$$A^2 \sin^2 \frac{\delta_0}{2r} = A^2 \sin^2 \frac{2n+1}{2r-1} \pi.$$

Die Formeln (9) und (10) können leicht in eine zusammengefaßt werden, wenn man mit abs. bezeichnet, daß der Ausdruck, vor welchem diese Buchstaben stehen, seinem absoluten Werthe nach, unabhängig vom Vorzeichen,

genommen werden soll. (9) und (10) lassen sich leicht in die Form:

$$F_1' = A^2 \left[1 + \cos \frac{\delta_0}{2r} \cos \delta + \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right) \right],$$

$$F_2' = A^2 \left[1 + \cos \frac{\delta}{2r} \cos \delta - \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right) \right]$$

bringen.

Die erste Formel giebt uns die Lichtstärke, wenn $\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} > 0$, die zweite wenn $\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} < 0$ ist. Beide Formeln können somit *durch den allgemeinen Ausdruck*

$$F = A^2 \left[1 + \cos \frac{\delta}{2r} \cos \delta + \text{abs.} \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right) \right]$$

ersetzt werden, welcher uns die Lichtstärke für beliebige δ giebt.

Durch dieselben Betrachtungen erhalten wir aus (7) die allgemeinen Formeln für das Maximum der Amplitude

$$S_1 = A \sqrt{1 + \cos \frac{\delta}{2r} \cos \delta + \text{abs.} \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right)} \quad (14)$$

und für das Minimum

$$S_2 = A \sqrt{1 + \cos \frac{\delta}{2r} \cos \delta - \text{abs.} \left(\cos \delta + \cos \frac{\delta}{2r} \right)} \quad (15),$$

als Functionen von δ .

Wenn also zwei Strahlencomplexe, in deren jedem die Amplitude von Null bis A sich verändert, interferiren, so erhalten wir eine Schwingung mit einer Amplitude, die zwischen einem Maximum S_1 und einem Minimum S_2 sich verändert, welche ihrerseits Functionen des Gangunterschiedes sind. Das Minimum S_2 ist Null in denjenigen Punkten, in welchen der Gangunterschied gleich $n \frac{\lambda}{2}$ ist, wo n eine ganze Zahl; in diesen Punkten hat also die Schwingung denselben Charakter, wie bei nur Einem Strahlencomplexe. Andererseits existirt eine Punktreihe, für welche $S_1 = S_2$, die Amplitude constant ist, die Schwingung also denselben Cha-

akter hat wie bei einem homogenen Strahle. Diese Punkte werden definirt durch den Gangunterschied

$$x - x' = \frac{2n+1}{2r \pm 1} r \lambda.$$

Die gesuchte allgemeine Formel für die Lichtstärke als die Function des Gangunterschiedes ist gefunden in (13).

Eine einfache Untersuchung der GröÙse $\frac{\partial F}{\partial \delta}$ zeigt nun, daß mit Vernachlässigung äußerst kleiner GröÙsen Maximum und Minimum der Lichtstärken auch jetzt in den sub I und II betrachteten Punkten liegen werden, in welchen wir

$$F_1 = 4 A^2 \cos^2 \frac{n\pi}{2r}$$

$$F_2 = 4 A^2 \sin^2 \frac{n\pi}{2r}$$

gefunden haben. Bei $n = \frac{r}{2}$ wird $F_1 = F_2$, die Interferenzstreifen verschwinden total.

St. Petersburg den $\frac{4}{16}$ Dec. 1875.

VIII. Ueber die Tiefe der Bilder bei optischen Apparaten; von Dr. Hugo Krüfs in Hamburg.

(Vom Verfasser aus der Zeitschrift des Akademischen Vereins der Polytechniker zu Hannover¹⁾ mitgetheilt.)

Vor Kurzem veröffentlichte ich unter dem obigen Titel eine Arbeit über ein Thema der Dioptrik, welchem bisher noch wenig Beachtung geschenkt wurde. In einem Aufsatze „Das Prüfen und Wählen der Photographen-Objective“ von Dr. Adolph Steinheil²⁾ findet sich eine Discussion dieses Gegenstandes, soweit derselbe in dem vorliegenden Falle in Betracht kam; die mathematischen

1) Helwing'sche Hofbuchhandlung, Hannover.

2) Photographische Correspondenz No. 57, März 1869, S. 59.