

Note sur la tension des fils élastiques.

Mr. le Baron *Poisson* ayant dans le Nr. 162 de son Journal honoré de son attention la remarque sur la tension des fils élastiques insérée dans le Nr. 155, et n'ayant pas entièrement partagé mon opinion sur ce sujet, je crois devoir ajouter quelques observations ultérieures tendantes à éclaircir ce qu'il pourrait encore y avoir d'obscur sur ce point de la mécanique.

Mr. *Poisson* veut bien approuver ce que j'ai avancé sur l'identité de l'expression générale de la tension des fils élastiques pour les deux cas de l'extensibilité et de la non-extensibilité; mais pour ce qui regarde la formule même de cette tension, présentée dans mon article, je ne suis plus honoré du suffrage de cet illustre Géomètre, mon résultat étant, à ce qu'il lui semble, contraire à celui donné par *Euler* dans un Mémoire sur ce sujet inséré dans le Tome XV. des Nouv. Comment. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg *).

A cette objection de Mr. *Poisson* je réponds, que la contradiction qu'il a cru découvrir entre la formule d'*Euler* et la mienne n'existe point, mais qu'au contraire nos deux résultats s'accordent exactement entre eux, comme en effet cela doit être.

Pour prouver cet accord, il n'y a qu'à appliquer, comme on va le voir, aux équations d'*Euler* les signes employés dans mon article d'après *Lagrange*.

$$d\lambda = \frac{Xdx + Ydy}{ds} dm + (A + \int X dm) d \cdot \frac{dx}{ds} + (B + \int Y dm) d \cdot \frac{dy}{ds}$$

et les 2) du Nr. 155, qui, comme on le sait, supposent

$$I = \frac{E}{e ds^2},$$

e étant

$$= \frac{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}{ds} = \frac{\sqrt{((dy d^2x - dx d^2y)^2 + (dz d^2x + dx d^2z)^2 + (dz d^2y - dy d^2z)^2)}}{ds^2},$$

Les deux équations générales d'*Euler*, Mém. cité page 388,

$$\left. \begin{aligned} dI + Vd\phi &= pds \\ d \cdot V\nu &= Vds \end{aligned} \right\},$$

conduisant à

$$dT = pds - \frac{d \cdot V\nu}{ds} d\phi,$$

et les

$$T, pds, V\nu \text{ et } d\phi$$

contenues dans cette équation étant respectivement remplacées par les correspondantes

$$\lambda, \frac{Xdx + Ydy}{ds} dm, E \text{ et } e$$

suivant notre notation, l'équation dont il s'agit d'*Euler* deviendra en nos signes

$$d\lambda = \frac{Xdx + Ydy}{ds} dm - \frac{e dE}{ds},$$

laquelle a lieu en général, indépendamment d'aucune hypothèse particulière pour le moment $V\nu$.

Or il n'est pas difficile de prouver le parfait accord de ce résultat avec celui présenté à la fin de l'article du Nr. 155, lequel, puisque actuellement il ne s'agit que de fils élastiques in plano, doit être employé sous la forme

$$\lambda = \frac{(A + \int X dm) dx + (B + \int Y dm) dy}{ds}.$$

La différentiation de cette équation donne

*) Ce mémoire, imprimé en 1771 a pour titre: *Genuina principia doctrinae de statu aequilibril et motu corporum tam perfecte flexibilia quam elasticorum.*

se réduisent dans le cas présent où il n'est pas question de z , à

$$\left. \begin{aligned} X dm - d \left[\left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) \frac{dx}{ds} \right] + d^2 \cdot \frac{E d^2 x}{e ds^2} &= 0 \\ Y dm - d \left[\left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) \frac{dy}{ds} \right] + d^2 \cdot \frac{E d^2 y}{e ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

c'est-à-dire, par l'intégration, à

$$\left. \begin{aligned} A + \int X dm - \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) \frac{dx}{ds} + d \cdot \frac{E d^2 x}{e ds^2} &= 0 \\ B + \int Y dm - \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) \frac{dy}{ds} + d \cdot \frac{E d^2 y}{e ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\}.$$

lesquelles étant multipliées respectivement par $d \cdot \frac{dx}{ds}$ et $d \cdot \frac{dy}{ds}$, et ajoutées ensemble; donnent

$$(A + \int X dm) d \cdot \frac{dx}{ds} + (B + \int Y dm) d \cdot \frac{dy}{ds} + d \cdot \frac{E d^2 x}{e ds^2} d \cdot \frac{dx}{ds} + d \cdot \frac{E d^2 y}{e ds^2} d \cdot \frac{dy}{ds} = 0,$$

c'est-à-dire, après les réductions convenables,

$$(A + \int X dm) d \cdot \frac{dx}{ds} + (B + \int Y dm) d \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{e d E}{ds} = 0.$$

Substituant donc la valeur de

$$(A + \int X dm) d \cdot \frac{dx}{ds} + (B + \int Y dm) d \cdot \frac{dy}{ds},$$

$$\left. \begin{aligned} X dm - \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) d \cdot \frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds} d \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) + d^2 \cdot \frac{E d^2 x}{e ds^2} &= 0 \\ Y dm - \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) d \cdot \frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds} d \left(\lambda + d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) + d^2 \cdot \frac{E d^2 y}{e ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\},$$

desquelles, multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et puis ajoutées ensemble, on tire tout de suite

$$\frac{X dx + Y dy}{ds} dm - d\lambda - d \left(d \cdot \frac{E d^2 s}{e ds^2} - \frac{Ee}{ds} \right) + \frac{dx}{ds} d^2 \cdot \frac{E d^2 x}{e ds^2} + \frac{dy}{ds} d^2 \cdot \frac{E d^2 y}{e ds^2} = 0,$$

c'est-à-dire, en développant convenablement la partie affectée de E ,

$$\frac{X dx + Y dy}{ds} dm - d\lambda - \frac{e d E}{ds} = 0,$$

tout comme auparavant.

La contradiction apparente qu'a trouvée Mr. *Poisson* entre le résultat d'*Euler* et le mien, tient à ce qu'en appliquant aux valeurs de *Lagrange* les signes d'*Euler*, Mr. *Poisson* a pris pour équivalente à l'intégrale $\int p ds$ d'*Euler*, c'est-à-dire à la somme des forces tangentielles dûes à l'action des forces données accélératrices sur l'élément ds , l'expression de *Lagrange*

$$\frac{(A + \int X dm) dx + (B + \int Y dm) dy}{ds},$$

tirée de cette équation, dans l'expression précédente de $d\lambda$, on tombera, comme il est évident, sur la formule même d'*Euler*.

Du reste, on peut remarquer que le même résultat aurait pu se déduire encore plus directement des équations mêmes (3), mises sous la forme

au lieu de

$$\int \frac{X dx + Y dy}{ds} dm,$$

comme évidemment il aurait fallu: formules qu'il faut bien distinguer l'une de l'autre, puisqu'elles ne sont identiques que dans le seul cas de la non-élasticité.

La théorie de *Lagrange*, corrigée comme je l'ai fait voir au Nr. 155 de ce Journal, s'accorde donc d'une manière bien satisfaisante avec celle d'*Euler* publiée près d'un demi-siècle auparavant et déduite par une méthode qui n'a rien de commun avec celle qui a servi à la détermination des équations générales et symétriques de *Lagrange*. Voilà le beau caractère de la vérité.

Åbo, le 19 Aug. 1829.

de Schultén.