

XI. Stereometrie der einfachen isoaxialen Formen des regulären Krystallsystems.

Von

C. Lippitsch in Leoben.

(Hierzu Tafel III.)

In der vorliegenden Abhandlung habe ich die Formen für die Oberflächen und Volumina der sieben einfachen Krystallformen des regulären Systems behandelt. Unter isoaxialen Formen verstehe ich solche, deren »Axenkreuz« überall dieselben Dimensionen aufweist. Hat also das Axenkreuz von $\{111\}$ die Parameter $a:a:a$ (z. B. $a = 5$ cm), so gilt das für sämtliche übrigen Formen. Es wird also ein demselben Axenkreuz angehöriger Würfel die Kantenlängen $a = a = 2a$ haben. Mit anderen Worten: Denke ich mir sämtliche einfache Formen $\{111\}$, $\{110\}$, $\{100\}$, $\{h k 0\}$, $\{h h l\}$, $\{h k k\}$, $\{h k l\}$ in krystallographisch richtiger Aufstellung zwischen zwei parallele Ebenen, deren Abstand $2a$ ist, gestellt, so werden alle Formen mit Ausnahme des Würfels beide Ebenen mit je zwei gegenüberliegenden Ecken berühren. Beim Würfel werden zwei gegenüberliegende Flächen mit den genannten Ebenen genau zusammenfallen. Ferner möchte ich noch auf die leichte Verwechslung der Begriffe Parameter und Coëfficient hinweisen; werden beide Begriffe nicht scharf definirt, kann leicht eine Verwirrung entstehen. Ist das Axenparameterverhältniss der Grundform (des Oktaëders) $a:a:a$, dann ist z. B. na (etwa $2a$) der Parameter einer abgeleiteten Form und » n « der Coëfficient. Würde ich jedoch das Axenverhältniss der Grundform mit $1:1:1$ bezeichnen, dann wäre $n = n \cdot 1$ Parameter und Coëfficient zugleich. Da das Volumen (bezw. der Oberfläche) doch nur immer durch die in irgend einem Längenmaasse gemessene Länge von a bezw. durch a und n oder a , n und m ausgedrückt werden kann, so werde ich mich immer an unsere Bezeichnungsweise halten.

I. Oktaëder {111}.

Bezeichnet $a : a : a$ das Parameterverhältniss (in irgend einem Maasse z. B. mm, cm gemessen), so ist die Länge einer Seitenkante $s = a\sqrt{2}$. Das Volumen des Oktaëders ist also gegeben durch folgende Gleichung:

$$V_o = \frac{2s^2}{3} \cdot \frac{s}{\sqrt{2}} = \frac{s^3\sqrt{2}}{3} = \frac{2a^3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4a^3}{3}. \quad (1)$$

Die Oberfläche O_o durch folgende Gleichung:

$$O_o = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = 2s^2\sqrt{3} = 2a^2 \cdot 2\sqrt{3} = 4a^2\sqrt{3}. \quad (2)$$

Da ich im Folgenden die Länge und Lage der trigonalen Zwischenaxe brauchen werde, will ich dieselbe jetzt gleich behandeln.

Unter der trigonalen Zwischenaxe versteht man die Verbindungslinie des Axenkreuzmittelpunktes mit dem Schwerpunkte (Mittelpunkt) einer Oktaëderfläche. Bezeichne ich die »Länge« derselben mit l , den Winkel, welchen sie mit der Verticalaxe einschliesst mit τ , so gelten folgende Gleichungen:

$$l = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

= dem Radius der eingeschriebenen Kugel.

$$\tan \tau = \frac{a\sqrt{6}}{3} : \frac{a\sqrt{3}}{3} = \sqrt{2}, \text{ somit } \tau = 54^\circ 44' 8''$$

= dem halben Oktaëderwinkel.

II. Würfel {100}.

Hier liegen die Verhältnisse sehr einfach. Es ist

$$V_w = (2a)^3 = 8a^3 \text{ und } Q_w = (2a)^2 \cdot 6 = 24a^2.$$

Denke ich mir die sieben einfachen Formen mit gleich grossem Axenkreuze, so stellt $V_o = \frac{4a^3}{3}$ ein Volumenminimum, $V_w = 8a^3$ ein Volumenmaximum vor; zwischen diesen Grenzwerten liegen die Volumina von {110}, {hk0}, {hkl}, {hkk}, {hkl}.

III. Rhombendodekaëder {110}.

Das Volumen $V_{rh} = V_o + 8py$; in dieser Gleichung stellt V_o das Volumen des »eingeschriebenen« Oktaëders, py das Volumen einer Pyramide $ABCD$ vor (vergl. Fig. 4 der Tafel):

$$py = \frac{(a\sqrt{2})^2}{4} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot h}{3}, \text{ wobei } h = DE.$$

$$DE = OD - OE = \sqrt{DF^2 + OF^2} - OE = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2}} - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6};$$

$$py = \frac{2a^2}{4 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{a^3}{12}$$

daher

$$V_{rh} = \frac{4a^3}{3} + \frac{8a^3}{12} = \frac{24a^3}{12} = 2a^3. \quad (1)$$

Das Volumen V_{rh} kann ich aber auch in anderer Weise finden; ich kann nämlich jedem Rhombendodekaëder einen Würfel mit der Seite $DG = a$ einschreiben; es bleiben dann noch sechs quadratische Pyramiden mit der Basiskante $DG = a$ und der Höhe $\frac{a}{2}$ übrig. Daher ist:

$$V_{rh} = a^3 + 6py_1, \text{ wobei } py_1 = \frac{a^2 \cdot a}{2 \cdot 3} = \frac{a^3}{6},$$

$$V_{rh} = a^3 + \frac{6a^3}{6} = 2a^3. \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Oberfläche ist die Kenntniss einer Seitenkante z. B. AD nöthig. Da $AC = a\sqrt{2}$, kann, DH als bekannt vorausgesetzt, f_{ADCH} leicht berechnet werden. Lege ich das sphärische Dreieck KLM , so ist $L = 45^\circ$, $M = 90^\circ$, daher auch $K = 45^\circ$. Es ist $\tan l = \sin 45^\circ$, $\tan L = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ferner ist: $AF = AD \cos l$ oder

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} = AD \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{2}}} = AD \cdot \sqrt{\frac{2}{3}},$$

somit $AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad (3)$

$$DF = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}, \text{ also } DG = a.$$

Das Verhältniss der beiden Rhombendiagonalen ist somit $a\sqrt{2} : a = \sqrt{2} : 1$.

Der Flächeninhalt eines Rhombus ist gleich

$$f = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}, \text{ somit}$$

$$O_{rh} = \frac{12a^2\sqrt{2}}{2} = 6a^2\sqrt{2}. \quad (4)$$

Da die Formen $\{111\}$, $\{100\}$, $\{110\}$ keine Varietäten aufweisen und also

in Bezug auf V und O nur von a abhängen, so mag hier noch $V_0 : V_{rh} : V_w$ sowie $O_0 : O_{rh} : O_w$ entwickelt werden.

Es ist $O_0 : V_{rh} : V_w = \frac{4a^3}{3} : 2a^3 : 8a^3 = 2 : 3 : 12$ und $O_0 : O_{rh} : O_w = 4a^2\sqrt{3} : 6a^2\sqrt{2} : 24a^2 = 2\sqrt{3} : 3\sqrt{2} : 12$. Bei den nun folgenden Formen $\{h k 0\}$, $\{h k k\}$, $\{h k l\}$ sind V und O Functionen von a und n beziehungsweise a , m und n .

IV. Tetrakishexaëder $\{k h 0\}$.

Das Volumen des Pyramidenwürfels ist gegeben durch die Gleichung $V_{py} = d^3 + 6py$; in dieser Gleichung bezeichnet d die Basiskante des dem Tetrakishexaëder eingeschriebenen Würfels, py das Volumen einer vierseitigen Pyramide, welche der Würfelfläche aufsitzt. Für die Basiskante d fand ich (unter Voraussetzung des Axenverhältnisses $1 : n : \infty$) den Werth $d = \frac{2n}{n+1}$. Nimmt das Parameterverhältniss die Form $a : na : \infty a$ an, dann wird:

$$d = \frac{2an}{n+1}. \quad (1)$$

In der soeben citirten Abhandlung fand ich ferner für die Höhe einer »Pyramide« den Werth $h = \frac{1}{n+1}$; unter Zugrundelegung des neuen Parameterverhältnisses wird:

$$h = \frac{a}{n+1}. \quad (2)$$

Daher ist:

$$\begin{aligned} V_{py} &= \frac{8a^3n^3}{(n+1)^3} + 6 \cdot \frac{4a^2n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{a}{3(n+1)} = \frac{8a^3n^3 + 8a^3n^2}{(n+1)^3} \\ &= 8a^3 \cdot \frac{n^2(n+1)}{(n+1)^3} = 8a^3 \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Discussion der Formeln (1), (2), (3).

Geht der Pyramidenwürfel in das Rhombendodekaëder über, so muss $n = 1$ werden. In diesem Falle wird $d = a$ (Kante des dem Rhombendodekaëders eingeschriebenen Würfels) und $h = \frac{a}{2}$.

Endlich wird:

$$V_{py(n=1)} = V_{rh} = \frac{8a^3}{4} = 2a^3.$$

Geht aber der Pyramidenwürfel in den Würfel über, so muss $n = \infty$ werden.

1) IV. Jahresbericht des k. k. Staatsgymnasiums in Leoben 1902, S. 12.

In diesem Falle wird $d = 2a$, $h = 0$ und

$$V_{py}(n = \infty) = V_w = 8a^3.$$

Die Oberfläche $O_{ph} = 24A$. (4)

$$\begin{aligned} A &= \frac{dh_1}{2} = \frac{an}{n+1} \cdot h_1, \quad h_1 = \sqrt{\frac{d^2}{4} + h^2} = \\ &= \sqrt{\frac{a^2 n^2}{(n+1)^2} + \frac{a^2}{(n+1)^2}} = \frac{a\sqrt{n^2+1}}{n+1}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$A = \frac{an}{n+1} \cdot \frac{a\sqrt{n^2+1}}{n+1} = \frac{a^2 n \sqrt{n^2+1}}{(n+1)^2}, \quad (6)$$

$$O_{py} = \frac{24 a^2 n \sqrt{n^2+1}}{(n+1)^2}. \quad (7)$$

Für $n = 1$ wird $h_1 = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $A = \frac{a^2\sqrt{2}}{4}$, endlich

$$O_{py}(n = 1) = O_{rh} = \frac{24 a^2 \sqrt{2}}{4} = 6a^2 \sqrt{2}.$$

Für $n = \infty$ wird $h_1 = a$, $A = a^2$ und

$$O_{py}(n = \infty) = O_w = 24a^2.$$

Zum Schlusse sei die Berechnung der »Pyramidenkante« angeführt. Es ist:

$$\sigma = \sqrt{\frac{a^2 n^2}{(n+1)^2} + \frac{a^2 (n^2+1)}{(n+1)^2}} = \sigma = \frac{a\sqrt{2n^2+1}}{n+1}.$$

Für $n = 1$ wird σ zur Kante des Rhombendodekaëders: $\sigma_{(n=1)} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Für $n = \infty$ wird σ zur halben Diagonale der Würfelfläche.

$$\sigma_{n=\infty} = \frac{a\sqrt{2} \cdot n}{n} = a\sqrt{2}, \quad D^2 = 4a^2 + 4a^2, \quad D = a\sqrt{8} = D = 2a\sqrt{2}$$

und
$$\frac{D}{2} = a\sqrt{2}.$$

V. Triakisoktaëder (hhl) (vergl. Fig. 2 Taf. III).

Um das Volumen V_{lr} zu bestimmen, zerlege ich den Körper in acht Theile; ein solcher Theil (Oktant) zerfällt wieder in zwei Theile, den Oktaëderoktanten ($ABCO$) und die aufgesetzte dreiseitige Pyramide ($ABCD$).

Daher ist:

$$V_{lr} = 8 \left(\frac{a^3}{6} + py \right), \text{ wenn } py = ABCD.$$

Zur Bestimmung von py brauche ich die Größen:

$$AB = a\sqrt{2}, AD, DE, AE.$$

$$AE = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad DE = \sqrt{AD^2 - AE^2} = \sqrt{AD^2 - \frac{2a^2}{3}}.$$

Zur Berechnung von AD benutze ich das sphärische Dreieck KLM , dessen Seiten ich folgeweise mit κ , λ , μ bezeichne. In diesem Dreiecke ist $M = 45^\circ$, $K = \varphi$, $\lambda = 45^\circ$.

Es ist:

$$\tan \varphi = na = \frac{a}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2} \quad (1)$$

und

$$\cos L = \frac{\cos K \sin (M - w)}{\sin w},$$

wobei der Hülfswinkel w durch die Gleichung $\cotg w = \tan K \cos \lambda$ bestimmt ist¹⁾.

Da $\tan K = \tan \varphi$, so ist auch $\cotg w = \tan \varphi \cos \lambda$ und

$$\begin{aligned} \cotg w &= n\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = n, \\ \cos L &= \frac{\cos \varphi \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos w - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin w \right)}{\sin w}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ferner ist:

$$\sin w = \frac{\tan w}{\sqrt{1 + \tan^2 w}} \quad \text{und} \quad \cos w = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 w}}.$$

1) Sind nämlich in einem schiefwinkeligen sphärischen Dreiecke zwei Winkel A und B und die von ihnen eingeschlossene Seite c gegeben, so resultiren folgende Gleichungen:

$$\cos C = \frac{\cos A \sin (B - w)}{\sin w},$$

wenn der Hülfswinkel w gegeben ist durch folgende Gleichung: $\cotg w = \tan A \cos c$.

Ich hätte also auch schreiben können:

$$\cos L = \frac{\cos M \sin (K - w)}{\sin w} \quad \text{und} \quad \cotg w = \tan M \cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

daraus folgt:

$$\cos L = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (\sin \varphi \cos w - \cos \varphi \sin w)}{\sin w} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi \cotg w - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \varphi$$

oder $\cos L = \frac{1}{2} \sin \varphi - \frac{\cos \varphi}{\sqrt{2}}$; da nun $\tan \varphi = n\sqrt{2}$, so folgt:

$$\sin \varphi = \frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 2n^2}} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n^2}}, \quad \text{daher ist}$$

$$\cos L = \frac{n\sqrt{2}}{2\sqrt{1 + 2n^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1 + 2n^2)}} = \frac{n - 1}{\sqrt{2(1 + 2n^2)}} \quad (\text{vergl. Gleichung (3) im Text}).$$

Daher ist:

$$\sin w = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} \quad \text{und} \quad \cos w = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}}$$

oder:

$$\sin w = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad \text{und} \quad \cos w = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$\cos L = \frac{\cos \varphi \left(\frac{n}{\sqrt{2(n^2 + 1)}} - \frac{1}{\sqrt{2(n^2 + 1)}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}} \quad \text{oder, da } \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n^2}}:$$

$$\cos L = \frac{1}{\sqrt{1 + 2n^2}} \left(\frac{n - 1}{\sqrt{2(n^2 + 1)}} \right) \sqrt{n^2 + 1},$$

$$\text{daher} \quad \cos L = \frac{n - 1}{\sqrt{2(1 + 2n^2)}}. \quad (3)$$

Ferner ist:

$$\sin L = \sqrt{1 - \frac{(n - 1)^2}{2(1 + 2n^2)}} = \sqrt{\frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2}}. \quad (4)$$

Ferner ist: $\sin \lambda : \sin \mu = \sin L : \sin 45^\circ$ oder

$$\frac{1}{\sqrt{2}} : \sin \mu = \sqrt{\frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2}} : \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\text{woraus} \quad \sin \mu = \frac{1}{2} : \sqrt{\frac{3n^2 + 2n + 1}{4n^2 + 2}} = \frac{\sqrt{4n^2 + 2}}{2\sqrt{3n^2 + 2n + 1}} \quad (5)$$

$$\text{und} \quad \cos \mu = \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 0,5}{3n^2 + 2n + 1}}. \quad (6)$$

Aus dem Dreiecke ADF folgt:

$$AD = \frac{AF}{\cos \mu} \quad \text{oder} \quad AD = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \sqrt{\frac{2n^2 + 2n + 0,5}{3n^2 + 2n + 1}},$$

$$\text{daher} \quad AD = \frac{a\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{\sqrt{4n^2 + 4n + 1}} \quad (7)$$

$$\text{oder} \quad AD = \frac{a\sqrt{3n^2 + 2n + 1}}{2n + 1}. \quad (8)$$

Endlich ist:

$$DE = \sqrt{\frac{3a^2n^2 + 2a^2n + a^2}{4n^2 + 4n + 1} - \frac{2a^2}{3}}$$

$$\text{oder} \quad DE = \sqrt{\frac{9a^2n^2 + 6a^2n + 3a^2 - 8a^2n^2 - 8a^2n - 2a^2}{3 \cdot (2n + 1)^2}}$$

$$\text{und} \quad DE = \sqrt{\frac{a^2 n^2 - 2a^2 n + a^2}{3 \cdot (2n + 1)^2}} = \frac{a(n - 1)}{\sqrt{3}(2n + 1)}. \quad (9)$$

$$\text{Daher ist das Volumen der Pyramide } ABCD = py = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3} \cdot \frac{a(n - 1)}{3 \cdot \sqrt{3}(2n + 1)} = \frac{2a^2}{4} \cdot \frac{a(n - 1)}{3 \cdot (2n + 1)} = \frac{a^3(n - 1)}{6(2n + 1)}. \quad (10)$$

$$V_{tr} = 8 \left(\frac{a^3}{6} + \frac{a^3(n - 1)}{6(2n + 1)} \right) = \frac{8a^3}{6} \left(1 + \frac{n - 1}{2n + 1} \right) = \frac{4a^3}{3} \left(\frac{3n}{2n + 1} \right) = \frac{4a^3 n}{2n + 1}. \quad (11)$$

Discussion der Formeln (9), (10), (11).

Geht das Triakisoktaëder in das Okaëder über, so muss $n = 1$ werden; in diesem Falle wird:

$$DE_{(n=1)} = \frac{a(1 - 1)}{\sqrt{3}(2n + 1)} = 0,$$

$$py_{(n=1)} = \frac{a^3(1 - 1)}{6(2n + 1)} = 0$$

$$\text{und} \quad V_{tr(n=1)} = V_o = \frac{4a^3}{3}.$$

Geht aber das Triakisoktaëder in das Rhombendodekaëder über, so muss $n = \infty$ werden. In diesem Falle wird wieder:

$$DE = \frac{a \cdot n}{\sqrt{3} \cdot 2n} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Es muss dann $OE + ED = OD$, das ist der trigonalen Zwischenaxe des Rhombendodekaëders gleich sein.

$$\text{Es ist wirklich} \quad \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \text{ wie folgt:}$$

$$\frac{2a + a}{2\sqrt{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{3a}{2\sqrt{3}}.$$

Ebenso muss:

$$py_{(n=\infty)} = \frac{2a^3 - \frac{4a^3}{3}}{8} = \frac{a^3}{4} - \frac{a^3}{6} = \frac{2a^3}{24} = \frac{a^3}{12}$$

$$\text{sein. Es ist wirklich } py_{(n=\infty)} = \frac{a^3 \cdot n}{6 \cdot 2n} = \frac{a^3}{12}.$$

Endlich muss für $n = \infty$:

$$V_{tr} = V_{rh} = \frac{4a^3 \cdot n}{2n} = 2a^3 \text{ sein.}$$

Für die Bestimmung der Oberfläche gilt folgende Gleichung: $O_{tr} = 24 \mathcal{A}$, wobei \mathcal{A} der Flächeninhalt des Dreieckes ABD ist.

Es ist:

$$\mathcal{A} = AF \cdot DF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot DF,$$

$$DF = \sqrt{\frac{3a^2n^2 + 2a^2n + a^2}{4n^2 + 4n + 1} - \frac{a^2}{2}} = \sqrt{\frac{2a^2n^2 + a^2}{2(2n + 1)^2}} = \frac{a\sqrt{2n^2 + 1}}{\sqrt{2} \cdot (2n + 1)}, \quad (12)$$

$$\mathcal{A} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2n^2 + 1}}{(2n + 1)\sqrt{2}} = \frac{a^2\sqrt{2n^2 + 1}}{2(2n + 1)}, \quad (13)$$

$$O_{tr} = 24 \mathcal{A} = \frac{12a^2\sqrt{2n^2 + 1}}{2n + 1}. \quad (14)$$

Discussion der Formeln (12), (13), (14).

Geht das Triakisoktaëder in das Oktaëder über, so muss

$$DF = EF = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \sqrt{3} = \frac{a}{\sqrt{6}} \text{ werden.}$$

Es ist $DF_{(n=1)} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$

Ferner muss:

$$\mathcal{A}_{(n=1)} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \text{ sein; es ist wirklich } \mathcal{A}_{n=1} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6}.$$

Endlich muss:

$$O_{tr(n=1)} = O_o = \frac{12a^2\sqrt{3}}{3} = 4a^2\sqrt{3} \text{ sein.}$$

VI. Deltoidikositetraëder {hkk}.

Zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche dieses Körpers ist es zunächst nothwendig folgende Grössen zu kennen: $AB = AF$, $OB = OF$, BF , $GB = GD = GF$ und $AO = a$. (Vergl. Fig. 3 Taf. III). Wähle ich die Gerade OC zur Abscissen-, die Gerade OA zur Ordinatenaxe, so sind die Coordinaten des Punktes B (ξ, η) sehr leicht aus den Gleichungen der beiden sich schneidenden Geraden AB und BC zu bestimmen.

AB ist durch folgende Coordinaten bestimmt:

$$x_1 = 0, \quad y_1 = a, \quad x_2 = na \text{ (in unserem Falle } 2a), \quad y_2 = 0.$$

BC ist durch folgende Coordinaten bestimmt:

$$x_3 = 0, \quad y_3 = na, \quad x_4 = a, \quad y_4 = 0.$$

Daher lautet die Gleichung der Geraden AB :

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1) \quad \text{oder} \quad y - a = \frac{0 - a}{na - 0} (x - 0),$$

$$y = -\frac{x}{n} + a. \quad (1)$$

Die Gleichung der Geraden BC lautet:

$$y - y_3 = \frac{y_4 - y_3}{x_4 - x_3} (x - x_3) \quad \text{oder} \quad y - na = \frac{0 - na}{a - 0} (x - 0),$$

$$y = -nx + na. \quad (2)$$

Daher: $\eta = -\frac{\xi}{n} + a$ und $\eta = -n\xi + na$,

woraus $\eta = \xi = \frac{an}{n+1}. \quad (3)$

$$AB = \sqrt{\xi^2 + (a - \eta)^2} = \sqrt{\frac{a^2 n^2}{(n+1)^2} + \frac{a^2}{(n+1)^2}} = \frac{a\sqrt{n^2+1}}{n+1}, \quad (4)$$

$$OB = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \frac{an\sqrt{2}}{n+1}. \quad (5)$$

Die Grössen BF und BG können erst später bestimmt werden. Zunächst will ich durch den Punkt A als Kugelmittelpunkt das sphärische Dreieck KLM legen. (Die Seiten k, l, m sind in der Zeichnung ohne Buchstaben.)

Dann ist $\frac{na}{a} = n = \tan k = \tan l$,

ferner ist $\cos m = \cos l \times \cos k = \cos^2 l$ und

da $\cos l = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 l}}, \quad \cos^2 l = \frac{1 + n^2}{4} = \cos m,$

woraus $\sin m = \frac{n\sqrt{n^2+1}}{n^2+1}. \quad (6)$

Für die Fläche des Dreieckes ABF ergibt sich somit:

$$f_{ABF} = \frac{AB \cdot AF \sin m}{2} = \frac{a^2(n^2+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{n\sqrt{n^2+1}}{2 \cdot (n^2+1)} =$$

$$= f_1 = \frac{a^2 n}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2+1}}{(n+1)^2}. \quad (7)$$

Ferner ist:

$$BF^2 = \frac{2a^2(n^2+1)}{(n+1)^2} - \frac{2a^2(n^2+1)}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{1+n^2}.$$

Nach gehöriger Reduction findet man:

$$BF = \frac{an\sqrt{2}}{n+1}. \quad (8)$$

Nun lege ich durch B als Kugelmittelpunkt ein zweites sphärisches Dreieck NPQ . (Die Seiten ν ,¹⁾ p , q sind in der Zeichnung ohne Buchstaben). Der Gang der Rechnung ist nun folgender: Um GB zu bestimmen brauche ich $\angle \nu$, ν finde ich aus dem sphärischen Dreiecke, wenn ich $\angle p$ kenne; dieser ist mir aber durch folgende Gleichung gegeben:

$$45^\circ + l + p = 180^\circ, \quad (9)$$

woraus $p = 135^\circ - l$; $\sin p = \sin 135^\circ \cos l - \cos 135^\circ \sin l$,

$$\text{und da } \sin 135^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin p = \frac{\cos l + \sin l}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Ferner ist: $\tan \nu = \sin p \tan N = \sin p \tan k$ und
 $\cos m = \cotg^2 k = \cos^2 l$ oder $\cotg k = \cos l$.

$$\frac{1}{\cotg k} = \tan k = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1+n^2}}} = \sqrt{n^2 + 1},$$

$$\tan \nu = \frac{\cos l + \sin l}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{n^2 + 1} \quad \text{und}$$

$$\tan \nu = \left(\frac{1+n}{\sqrt{n^2+1}} \cdot \sqrt{n^2+1} \right) : \sqrt{2} = \frac{1+n}{\sqrt{2}}. \quad (11)$$

Für das Dreieck OBG besteht folgende Gleichung:

$OB : BG = \sin \beta : \sin \alpha$; da $\beta = 180^\circ - (\alpha + \nu)$, so ist:

$$\frac{an\sqrt{2}}{n+1} : BG = (\sin \alpha \cos \nu + \cos \alpha \sin \nu) : \sin \alpha$$

oder
$$BG = \frac{an\sqrt{2}}{n+1} : \{\cos \nu + \cotg \alpha \sin \nu\},$$

$$BG = \frac{an\sqrt{2}}{n+1} : \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(n+1)^2}{2}}} + \cotg \alpha \cdot \frac{\frac{n+1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{(n+1)^2}{2}}} \right\}.$$

Nun ist $\cotg \alpha = \tan \tau = \sqrt{2}$, daher

$$BG = \frac{an\sqrt{2}}{n+1} : \left\{ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 3}} + \frac{(n+1)\sqrt{2}}{\sqrt{n^2 + 2n + 3}} \right\},$$

woraus nach gehöriger Reduction

$$BG = \frac{an\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n^2 + 3n + 2} \quad (12)$$

folgt.

¹⁾ Ich gebrauche den griechischen Buchstaben, um einer Verwechslung mit ν vorzubeugen.

Die Richtigkeit dieser Formel ergibt die Discussion für $n = 4$; dann wird

$$BG = \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{6}, \text{ q. e. d.}$$

Für die Fläche des Dreieckes BGF ergibt sich somit folgende Gleichung:

$$f_{BGF} = f_2 = \frac{BF}{2} \cdot h,$$

wenn h die von G auf BF gezogenen Senkrechte ist.

$$h = \sqrt{GB^2 - \frac{BF^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 n^2 (n^2 + 2n + 3)}{(n^2 + 3n + 2)^2} - \frac{a^2 n^2}{2(n+1)^2}}, \quad \text{somit}$$

$$f_2 = \frac{an\sqrt{2}}{2(n+1)} \cdot \sqrt{\frac{a^2 n^2 (n^2 + 2n + 3)}{(n^2 + 3n + 2)^2} - \frac{a^2 n^2}{2(n+1)^2}};$$

nach gehöriger Reduction findet man:

$$f_2 = \frac{a^2 n^2 \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 4n + 2}}{2(n+1)^2 (n^2 + 3n + 2)}. \quad (13)$$

Berechnung des Volumens.

$V_d = 24py$, wenn py = dem Volumen einer Pyramide $ABGFO$. Diese Pyramide wird durch die Symmetrieebene AOG in zwei gleiche Theile getheilt. Ein solcher Theil, z. B. $ABOG$, kann als eine Pyramide mit der Basis ABO und mit dem Scheitel G aufgefasst werden. Dann ist

$$V_d = \frac{48}{3} \cdot \frac{a \cdot an\sqrt{2}}{2 \cdot (n+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{an\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n^2 + 3n + 2} \cdot \sin \nu,$$

$$\tan \nu = \frac{1+n}{\sqrt{2}}, \quad \sin \nu = \frac{\frac{1+n}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1 + \frac{(1+n)^2}{2}}} = \frac{1+n}{\sqrt{n^2 + 2n + 3}},$$

$$\text{daher} \quad V_d = \frac{8a^2 n}{(n+1)} \cdot \frac{an\sqrt{n^2 + 2n + 3}}{n^2 + 3n + 2} \cdot \frac{1+n}{\sqrt{n^2 + 2n + 3}},$$

$$V_d = \frac{8a^3 n^2}{n^2 + 3n + 2}. \quad (14)$$

Die Oberfläche ist durch folgende Gleichung gegeben:

$$O_d = 24(f_1 + f_2), \quad (15)$$

$$O_d = 24 \left\{ \frac{a^2 n}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 2}}{(n+1)^2} + \frac{a^2 n^2 \sqrt{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 4n + 2}}{2(n+1)^2 \cdot (n^2 + 3n + 2)} \right\}$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$O_d = \frac{12a^2n[\sqrt{n^6+6n^5+15n^4+24n^3+30n^2+24n+8} + \sqrt{n^6+2n^5+3n^4+4n^3+2n^2}]}{(n+1)^2(n^2+3n+2)}. \quad (16)$$

Zum Schlusse sei noch die Länge der trigonalen Zwischenaxe OG bestimmt.

Es ist: $OG : GB = \sin \nu : \sin \alpha$,

$$OG = \left(\frac{an\sqrt{n^2+2n+3}}{n^2+3n+2} \cdot \frac{n+1}{\sqrt{n^2+2n+3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$OG = \frac{an(n+1)\sqrt{3}}{n^2+3n+2}. \quad (17)$$

Discussion der erhaltenen Formeln.

Wird $n=1$, so geht die Form in das Oktaëder über. Daher wird:

$$AB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{der halben Oktaëderkante } \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$OB = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \text{der halben Zwischenaxen} = \frac{a}{\sqrt{2}},$$

$$BF = \frac{a\sqrt{2}}{2} = \text{der halben Oktaëderkante } \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

$$BG = \frac{a}{\sqrt{6}}, \text{ wie wir früher fanden.}$$

$$OG = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a}{\sqrt{3}} \text{ (trigonale Zwischenaxe des Oktaëders).}$$

$$V_{d(n=1)} = V_o = \frac{8a^3}{6} = \frac{4a^3}{3},$$

$$O_{d(n=1)} = O_o = \frac{12a^2[\sqrt{108} + \sqrt{12}]}{4 \cdot 6} = \frac{a^2}{2} (3\sqrt{12} + \sqrt{12}) = 4a^2\sqrt{3}.$$

Wird $n=\infty$, so geht die Form in den Würfel über. Daher wird:

$$AB = a, \quad OB = a\sqrt{2}, \quad BF = a\sqrt{2}, \quad BG = a, \quad OG = a\sqrt{3}.$$

Ferner wird:

$$V_{d(n=\infty)} = V_w = 8a^3,$$

$$O_{d(n=\infty)} = O_w = \frac{12a^2 \cdot n \cdot 2n^3}{n^4} = 24a^2.$$

Das Deltoidikositetraëder nOn muss in das Triakisoktaëder übergehen, wenn das eine $n=1$ wird. Auch in diesem Falle giebt die Discussion volle Klarheit. Einige Beispiele.

$$\begin{array}{ll}
 nOn \text{ (Fig. 3).} & nO \text{ (Fig. 2).} \\
 BA = \frac{a\sqrt{n^2+1}}{n+1} & \text{erscheint als } AF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 OB = \frac{an\sqrt{2}}{a+1} & - \quad - \quad OF = \frac{a\sqrt{2}}{2} \\
 V_d = \frac{8a^3n^2}{n^2+3a+2} & - \quad - \quad V_{tn} = \frac{4a^3n}{2n+1}.
 \end{array}$$

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{8a^3n^2}{n^2+3n+2} &= \frac{8a^3n \cdot 1}{n \cdot 1 + 3n + 2} = \\
 &= \frac{8a^3n}{4n+2} = \frac{8a^3n}{2(2n+1)} = \frac{4a^3n}{2n+1}, \text{ q. e. d.}
 \end{aligned}$$

$$OG = \frac{an(n+1)\sqrt{3}}{n^2+3n+2} \text{ erscheint als } OD = OE + ED = \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{a}{\sqrt{3}} \frac{(n-1)}{(2n+1)}.$$

Es ist nämlich:

$$\begin{aligned}
 \frac{an \cdot 2\sqrt{3}}{n \cdot 1 + 3n + 2} &= \frac{2an\sqrt{3}}{4n+2} = \frac{an\sqrt{3}}{2n+1} = \frac{n}{\sqrt{3}} \left(1 + \frac{n+1}{2n+1}\right) = \\
 &= \frac{a}{\sqrt{3}} \left(\frac{3n}{2n+1}\right) = \frac{an\sqrt{3}}{2n+1}, \text{ q. e. d.}
 \end{aligned}$$

VII. Hexakisoktaeder {hkl} (vergl. Fig. 4 Taf. III).

Die Fläche DEO' habe die Parameter a , $ma = 2a$, $na = 3a$ (bezogen auf Längs-, Quer- und Verticalaxe). Dann sind ganz analog wie beim Deltoidikositetraeder die Coordinaten ξ und η des Punktes D gegeben durch:

$$\xi = \frac{ma}{m+1}, \quad \eta = \frac{ma}{m+1}.$$

Daher ist:

$$OD = \frac{am\sqrt{2}}{m+1}, \quad (1) \quad ED = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{m+1}. \quad (2)$$

Lege ich mit E bzw. D als Kugelmittelpunkt die sphärischen Dreiecke KLM und NPQ und bezeichne ich die Seiten dieser Dreiecke mit k , l , μ bzw. ν , p , q , so ergibt sich Folgendes:

$$\frac{ma}{a} = \tan l, \quad (3) \quad \frac{na(m+1)}{am\sqrt{2}} = \tan \nu, \quad (4)$$

ferner ist:

$$V_{ho} = \frac{48}{3} \cdot \frac{a \cdot am\sqrt{2}}{2(m+1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot h = \frac{8a^2m}{m+1} \cdot h, \quad (5)$$

wobei $h = O'R$ d. i. die Höhe des Dreieckes $OO'D$. Zur Berechnung von h brauchen wir die Grössen $O'D$ und $\angle \nu$.

Es ist:

$$OD: O'D = \sin \psi : \sin \varphi, \quad \psi = 180^\circ - (\varphi + \nu) \quad \text{und} \quad \varphi = 90^\circ - \tau.$$

Daher:

$$\sin \psi = \sin \varphi \cos \nu + \cos \varphi \sin \nu \quad \text{und} \quad \sin \varphi = \cos \tau = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

da $\tan \tau = \sqrt{2}; \quad \cos \varphi = \sqrt{\frac{2}{3}}.$

Ferner ist:

$$\cos \nu = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n^2(m+1)^2}{2m^2}}} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}} \quad (6)$$

und $\sin \nu = \sqrt{1 - \frac{2m^2}{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}} =$
 $= \sqrt{\frac{n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}} = \sqrt{\frac{n^2(m+1)^2}{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}} = \sin \nu. \quad (7)$

Daher:

$$OD: O'D = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{N}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{n(m+1)}{\sqrt{N}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

und

$$O'D = \frac{am\sqrt{2}}{(m+1)\sqrt{3}} : \frac{\sqrt{2}(m+nm+n)}{\sqrt{3}\sqrt{N}} =$$

$$= \frac{am\sqrt{2}}{\sqrt{3}(m+1)} \cdot \frac{\sqrt{3}\sqrt{N}}{\sqrt{2}(m+nm+n)} = \frac{am\sqrt{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}}{(m+1)(m+nm+n)}, \quad (8)$$

$$h = \frac{am\sqrt{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}}{(m+1)(m+nm+n)} \cdot \frac{n(m+1)}{\sqrt{2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2}} =$$

$$= \frac{amn}{m+nm+n}. \quad (9)$$

Daher:

$$V_{ho} = \frac{8a^2m}{m+1} \cdot \frac{amn}{m+nm+n} = \frac{8a^3m^2n}{(m+1)(m+nm+n)}. \quad (10)$$

Discussion der Volumsformel.

1) $m = n = 1$ (Oktaëder):

$$V_{ho(m=n=1)} = V_o = \frac{8a^3}{2 \cdot 3} = \frac{4a^3}{3}.$$

2) $m = n = \infty$ (Würfel):

$$V_{ho(m=n=\infty)} = \frac{8a^3 \cdot m^3}{m^2 + m^3 - m^2} = \frac{8a^3 \cdot m^3}{m^3} = 8a^3 = V_w.$$

3) $m = 1, n = \infty$ (Rhombendodekaëder):

$$V_{ho(m=1, n=\infty)} = V_{rh} = \frac{8a^3 \cdot n}{2 \cdot 2n} = 2a^3.$$

4) $m = m, n = \infty$ (Pyramidenwürfel):

$$V_{ho(m=n, n=\infty)} = V_{py} = \frac{8a^3m^2}{m+1} \cdot \frac{n}{n(1+m)+m} = \frac{8a^3m^2}{(m+1)^2}.$$

5) $m = 1, n = n$ (Triakisoktaëder):

$$V_{ho(m=1, n=n)} = V_{tr} = \frac{8a^3n}{2(1+2n)} = \frac{4a^3n}{1+2n}.$$

6) $n = m$ (Deltoidikositetraëder):

$$V_{ho(n=m)} = \frac{8a^3n^3}{(n+1)(2n+n^2)} = \frac{8a^3n^2}{(n+1)(2+n)} = \frac{8a^3n^2}{n^2+3n+2} = V_d.$$

Berechnung von O_{ho} .

Die Oberfläche unseres Körpers setzt sich aus 48 Dreiecken, jedes von der Grösse und Form EDO' , zusammen.

$$f_{EDO'} = \frac{EDh_1}{2} = \frac{a\sqrt{m^2+1}}{m+1} \cdot \frac{h_1}{2},$$

wenn h_1 die Höhe $O'J$ des Dreiecks EDO' ist. Daher ist:

$$O_{ho} = \frac{24 \cdot a\sqrt{m^2+1}}{m+1} \cdot h_1, \quad (1)$$

$$h_1 = O'D \sin q = \frac{am\sqrt{2m^2+n^2m^2+2mn^2+n^2}}{(m+1)(m+nm+n)} \cdot \sin q. \quad (2)$$

Zur Berechnung von $\sin q$ dient folgende Gleichung:

$$\cos q = \cos \nu \cos p = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2m^2+n^2m^2+2mn^2+n^2}} \cdot \cos p. \quad (3)$$

Es ist aber auch im Dreiecke $EDO \angle l + 45^\circ + p = 180^\circ$, daher
 $p = 135^\circ - l$

und $\cos p = \cos 135^\circ \cos l + \sin 135^\circ \sin l$ oder

$$\cos p = -\frac{\cos l}{\sqrt{2}} + \frac{\sin l}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

Nun ist aber $\tan l = m$, daher

$$\cos l = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}} \text{ und } \sin l = \frac{m}{\sqrt{1+m^2}},$$

also ist: $\cos p = \frac{m-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2}}$ und

$$\cos q = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{N}} \cdot \frac{m-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2}}, \quad (5)$$

wo $N = 2m^2 + n^2m^2 + 2mn^2 + n^2$ (vergl. Formel (3))

$$\text{und } \sin 2 = \sqrt{1 - \left(\frac{2m^2(m-1)^2}{2 \cdot (1+m^2)N} \right)} = \\ = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{m^4n^2 + m^4 + 2m^3n^2 + 2m^3 + 2m^2n^2 + m^2 + 2mn^2 + n^2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{N} \cdot \sqrt{1+m^2}}, \quad (6)$$

folglich ist:

$$h_1 = \frac{am\sqrt{N} \cdot \sqrt{Z}}{(m+1)(m+mn+n)\sqrt{N}\sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2}},$$

wo Z dem Zähler in Formel (6) gleich ist.

Daher ist endlich:

$$O_{ho} = \frac{24a\sqrt{m^2+1} \cdot am \cdot \sqrt{N} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{Z}}{(m+1)(m+1)(m+mn+n) \cdot \sqrt{N} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{1+m^2}} = \\ = O_{ho} = \frac{24a^2m\sqrt{Z}}{(m+1)^2(m+mn+n)}. \quad (7)$$

Discussion der Formel.

1) $m = n = 1$.

$$O_{ho(m=n=1)} = O_o = \frac{24a^2\sqrt{12}}{4 \cdot 3} = \frac{48a^2\sqrt{3}}{12} = 4a^2\sqrt{3}.$$

2) $m = n = \infty$.

$$O_{ho(m=n=\infty)} = O_w = \frac{24a^2n \mid n^6 + 2n^5 + n^4 + 2n^4 + 4n^3 + 2n^2}{(n+1)^2(2n+n^2)} = \\ = \frac{24a^2n^4}{n^4} = 24a^2.$$

3) $m = 1, n = \infty$.

$$O_{ho(m=1, n=\infty)} = O_{rh} = \frac{24a^2\sqrt{n^2+1+2n^2+2+2n^2+1+2n^2+n^2}}{4 \cdot (1+2n)} = \\ = \frac{24a^2n\sqrt{8}}{4 \cdot 2n} = 6a^2\sqrt{2}.$$

4) $m = m, n = \infty$.

$$O_{ho} = O_{py} = \frac{24a^2m \cdot \sqrt{m^2+1}}{(m+1)^2}.$$

5) $m = 1, n = n$.

$$O_{ho} = O_{tr} = \frac{24a^2\sqrt{n^2+1+2n^2+2+2n^2+1+2n^2+n^2}}{4 \cdot (1+2n)} = \\ = \frac{24a^2 \cdot \sqrt{4+8n^2}}{4 \cdot (1+2n)} = \frac{2 \cdot 6a^2\sqrt{2n^2+1}}{2n+1} = \frac{12a^2\sqrt{2n^2+1}}{2n+1}.$$

6) $n = m$.

$$O_{ho} = O_d = \frac{24a^2n\sqrt{n^6+2n^5+3n^4+4n^3+2n^2}}{(n+1)^2(2n+n^2)}.$$

Es muss z. B. für $n = 2$

$$\frac{12a^2n[\sqrt{n^6+6n^5+15n^4+24n^3+30n^2+24n+8} + \sqrt{n^6+2n^5+3n^4+4n^3+2n^2}]}{(n+1)^2(n^2+3n+2)} = \frac{24a^2n\sqrt{n^6+2n^5+3n^4+4n^3+2n^2}}{(n+1)^2(2n+n^2)} \quad 1) \quad \text{sein.}$$

Es ist: $\frac{12 \cdot a^2 \cdot 2 [\sqrt{864} + \sqrt{246}]}{9 \cdot 12} = \frac{24 \cdot a^2 \cdot 2 \sqrt{246}}{9 \cdot 8}$

oder $\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{246} = \frac{2}{3} \sqrt{246}.$

Es ist also die Richtigkeit der Formel erwiesen.

Bezüglich der Discussion der Gleichung $O_{ho} = O_{py}$ möchte ich bemerken, dass für den Fall $n = \infty$ der Ausdruck $\frac{\sqrt{Z}}{m + mn + n}$ den Werth $\sqrt{m^2 + 1}$ immerhin annehmen kann, da $\frac{\infty}{\infty}$ unbestimmt ist.

Anhang.

Das Pentagondodekaëder der Krystallographie.

Jedem krystallographischen Pentagondodekaëder lässt sich ein Würfel $HF KLRSTU$ (vergl. Fig. 5, Taf. III) mit der Kante $\frac{2an}{n+1}$ einschreiben; $\frac{2an}{n+1}$ ist aber nichts anderes als die Würfelkante des zugehörigen Pyramidenwürfels $a : na : \infty a$, wie wir schon S. 230 fanden.

4) Die Identität dieser Gleichung lässt sich auch allgemein beweisen. Bezeichne ich den längeren Wurzel Ausdruck mit \sqrt{A} , den kürzeren mit \sqrt{B} , so ist:

$$\frac{12a^2n[\sqrt{A} + \sqrt{B}]}{(n+1)^2(n^2+3n+2)} = \frac{24a^2n\sqrt{B}}{(n+1)^2(2n+n^2)}.$$

Durch die Factoren $12a^2n$ und $(n+1)^2$ gekürzt, findet man

$$\frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{n^2 + 3n + 2} = \frac{2\sqrt{B}}{2n + n^2} \quad \text{oder} \quad \frac{\sqrt{A} + \sqrt{B}}{(n+2)(n+1)} = \frac{2\sqrt{B}}{n(n+2)}, \quad \text{daher}$$

$$(\sqrt{A} + \sqrt{B})n = (n+1) \cdot 2\sqrt{B} \quad \text{und} \quad n\sqrt{A} + n\sqrt{B} = 2n\sqrt{B} + 2\sqrt{B}.$$

Folglich ist $n\sqrt{A} = n\sqrt{B} + 2\sqrt{B} = (n+2)\sqrt{B}$. Quadrirt man und setzt für \sqrt{A} und \sqrt{B} die obigen Werthe, so ergibt sich

$$\begin{aligned} n^8 + 6n^7 + 15n^6 + 24n^5 + 30n^4 + 24n^3 + 8n^2 &= (n^2 + 4n + 4)(n^6 + 2n^5 + 3n^4 + 4n^3 + 2n^2) = \\ &= n^8 + 4n^7 + 4n^6 \\ &\quad + 2n^7 + 8n^6 + 8n^5 \\ &\quad + 3n^6 + 12n^5 + 12n^4 \\ &\quad + 4n^5 + 16n^4 + 16n^3 \\ &\quad + 2n^4 + 8n^3 + 8n^2 \\ \hline n^8 + 6n^7 + 15n^6 + 24n^5 + 30n^4 + 24n^3 + 8n^2, \end{aligned}$$

womit die Identität dieser Gleichung auch allgemein erwiesen ist.

Zur Berechnung des Volumens und der Oberfläche unseres Körpers ist zunächst die Kenntniss der Grössen $EC = x$ und $GC = y$ (vergl. Fig. 5) erforderlich.

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke A_1OC und GFC folgt:

$$A_1O : OC = GJ : GJ \quad \text{oder} \quad na : a = a : a - x,$$

woraus
$$x = \frac{a(n-1)}{n}. \quad (1)$$

Aus dem Dreiecke GJC folgt:

$$GC^2 = GJ^2 + CJ^2 \quad \text{oder} \quad y^2 = a^2 + \left(a - \frac{a(n-1)}{n}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{n^2} = \frac{a^2 n^2 + a^2}{n^2} = \frac{a^2}{n^2} (n^2 + 1), \quad y = \frac{a}{n} \sqrt{n^2 + 1}. \quad (2)$$

Das Volumen unseres Körpers ist gleich dem Volumen des eingeschriebenen Würfels, vermehrt um das Sechsfache eines der Würfelfläche aufsitzenen dreiseitigen abgestutzten Prismas.

Daher
$$V_{\pi} = \left(\frac{2an}{n+1}\right)^3 + 6P \quad (3), \quad \text{wenn} \quad P = HFKLDE.$$

Für die »Höhe« unseres Prismas (senkrechter Abstand des Punktes C von der Ebene $HFKL$) fanden wir früher S. 230 den Werth $\frac{a}{n+1}$, daher ergibt sich Folgendes:

$$P = \frac{2an}{n+1} \cdot \frac{a}{2(n+1)} \cdot \frac{2an}{n+1} - 2 \left\{ \frac{2an}{n+1} \cdot \frac{a}{2(n+1)} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2an}{n+1} - \frac{2a(n-1)}{n} \right) \right\} =$$

$$= P = \frac{2a^3 n^2}{(n+1)^3} - \frac{2a^3}{3(n+1)^3} = \frac{2a^3(3n^2-1)}{3(n+1)^3}, \quad (4)$$

$$6P = \frac{4a^3(3n^2-1)}{(n+1)^3}. \quad (5)$$

Daher ist endlich

$$V_{\pi} = \frac{8a^3 n^3 + 4a^3(3n^2-1)}{(n+1)^3} = \frac{8a^3(n^3 + 1,5n^2 - 0,5)}{(n+1)^3}. \quad (6)$$

Discussion der erhaltenen Formeln.

Für $n = 1$ wird $V_{\pi(n=1)} = V_{rh}$.

Es ist
$$V_{\pi(n=1)} = \frac{8a^3(1 + 1,5 - 0,5)}{8} = 3a^3 = V_{rh}.$$

Für $n = \infty$ wird $V_{\pi} = V_w$.

Es ist
$$V_{\pi(n=\infty)} = 8a^3 = V_w.$$

Für $n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ muss unser Ausdruck in die Formel für das Volumen des stereometrischen Pentagondodekaëders übergehen.

Es ist
$$V_{\pi} \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{8a^3(30 + 14\sqrt{5})}{72 + 32\sqrt{5}}. \quad (7)$$

Bezeichne ich die Fünfecksseite eines regelmässigen Pentagondodekaeders mit s , so ist das Volumen dieses Körpers durch folgende Gleichung gegeben¹⁾:

$$V = \frac{s^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}). \quad (8)$$

Ich will nun die Identität der Formeln

$$V = \frac{s^3}{4} (15 + 7\sqrt{5}) = V_{\pi} \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{8a^3(30 + 14\sqrt{5})}{72 + 32\sqrt{5}} \quad (9)$$

nachweisen.

Die Halbaxe a eines stereometrischen Pentagondodekaeders $= a = \sqrt{R^2 - \left(\frac{s}{2}\right)^2}$, wenn R der Radius der umschriebenen Kugel ist.

$$R^2 = \frac{s^2}{4} \sqrt{18 + 5\sqrt{5}}, \text{ daher } a = \frac{s}{4} \sqrt{14 + 6\sqrt{5}} \text{ und } s = \frac{4a}{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}}. \quad (10)$$

Daher ist:

$$V = \frac{64a^3(15 + 7\sqrt{5})}{4 \cdot (14 + 6\sqrt{5}) \sqrt{14 + 6\sqrt{5}}} = \frac{8a^3(30 + 14\sqrt{5})}{72 + 32\sqrt{5}}. \quad (11)$$

Nach gehöriger Kürzung ergibt sich:

$$= \frac{15 + 7\sqrt{5}}{(7 + 3\sqrt{5})(\sqrt{14 + 6\sqrt{5}})} = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{36 + 16\sqrt{5}},$$

$$\text{oder} \quad (94 + 42\sqrt{5})(14 + 6\sqrt{5}) = 2576 + 1152\sqrt{5} \quad \text{oder} \\ 2576 + 1152\sqrt{5} = 2576 + 1152\sqrt{5},$$

womit die Identität der Gleichung $V = V_{\pi} \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$ bewiesen ist.

Für die Berechnung der Oberfläche unseres Körpers gilt folgende Gleichung:

$O_{\pi} = 12F$, wenn F der Flächeninhalt eines Fünfeckes ist.

$$F = DEG + 2EGF.$$

$$F = \frac{a(n-1)}{n} \cdot \frac{a}{n} \sqrt{n^2 + 1} + 2EGF. \quad (1)$$

$$EGF = \sqrt{\frac{a^2}{n^2} (n-1)^2 + \frac{a^2}{n^2} (n^2 + 1)} \cdot \frac{\sigma}{2}. \quad (2)$$

$$2EGF = \frac{a\sigma}{n} \sqrt{2n^2 - 2n + 2}. \quad (3)$$

1) Vergl. Lehrbuch der Geometrie von Dr. E. Heis und Th. J. Eschweiler, II. Theil, Köln 1884, S. 123 ff.

Im rechtwinkligen sphärischen Dreiecke MNP ist $M = 90^\circ$, $\nu = 90^\circ + \varphi$ und N bekannt.

$$\varphi \text{ ist gegeben durch } \frac{a}{na} = \frac{1}{n} = \tan \varphi, \quad (4)$$

ferner ist $\cos N^1)$ gegeben durch

$$-\frac{\frac{1}{na^2}}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{n^2 a^2}} = -\frac{n}{n^2 + 1}. \quad (5)$$

Aus dem sphärischen Dreiecke folgt:

$$\begin{aligned} \tan \nu &= \sin p \tan N; \text{ oder} \\ \tan (\varphi + 90^\circ) &= \sin p \tan N = -\cotg \varphi = -n. \end{aligned} \quad (6)$$

Ferner ist:

$$\sin p = \frac{-n}{\tan N} = \frac{-n}{\frac{n}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}} = \frac{-n^2}{\sqrt{n^4 + n^2 + 1}}$$

und

$$\tan p = \frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (7)$$

$$\text{Ferner ist: } \frac{x}{y} = \tan q = \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 1}}. \quad (8)$$

Endlich ist

$$\sigma = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2} \tan (p - q), \quad (9)$$

$$\sigma = \frac{a}{2n} \sqrt{2n^2 - 2n + 2} \left(\frac{\tan p - \tan q}{1 + \tan p \tan q} \right). \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Daher ist } \sigma &= \frac{a \sqrt{2n^2 - 2n + 2} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^2 + 1}} - \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)}{2n \left(1 + \frac{n^2(n-1)}{n^2 + 1} \right)} = \\ &= \sigma = \frac{a \sqrt{2} \sqrt{n^2 - n + 1} \cdot \sqrt{n^2 + 1}}{2n \cdot (n + 1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} 2EGF &= \frac{a \sqrt{2} \sqrt{n^2 - n + 1} \cdot a \sqrt{2} \sqrt{n^2 - n + 1} \cdot \sqrt{n^2 + 1}}{n \cdot 2n \cdot (n + 1)} = \\ &= 2EGF = \frac{a^2 (n^2 - n + 1) \sqrt{n^2 + 1}}{n^2 (n + 1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

1) Nach einer bekannten Regel ist

$$\cos N = -\frac{\frac{1}{aa_1} + \frac{1}{bb_1} + \frac{1}{cc_1}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{b_1^2} + \frac{1}{c_1^2}}},$$

wenn a, b, c, a_1, b_1, c_1 Parameter zweier Flächen sind.

$$\begin{aligned}\text{Folglich ist } F &= \frac{a^2(n-1)\sqrt{n^2+1}}{n^2} + \frac{a^2(n^2-n+1)\sqrt{n^2+1}}{n^2(n+1)} = \\ &= F = \frac{a^2 \left(\frac{n(2n-1)\sqrt{n^2+1}}{n+1} \right)}{n^2}\end{aligned}\quad (13)$$

$$\text{und } O_{\pi} = 12a^2 \left(\frac{(2n-1)\sqrt{n^2+1}}{n(n+1)} \right). \quad (14)$$

Discussion der Formel.

Für $n = 1$ wird $O_{\pi(n=1)} = O_{rh}$.

Es ist $O_{\pi(n=1)} = 12a^2 \left(\frac{1 \cdot \sqrt{2}}{1 \cdot 2} \right) = 6a^2\sqrt{2} = O_{rh}$.

Für $n = \infty$ wird $O_{\pi(n=\infty)} = O_w$.

Es ist $O_{\pi(n=\infty)} = 12a^2 \left(\frac{2n \cdot n}{n \cdot n} \right) = 24a^2 = O_w$.

Für $n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ wird $O_{\pi \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)} = \frac{6a^2\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}} = O$,

d. i. die Oberfläche des stereometrischen Pentagondodekaëders.

Bezeichne ich die Fünfecksseite eines regelmässigen (stereometrischen) Pentagondodekaëders mit s , so ist dessen Oberfläche ¹⁾

$$O = 3s^2 \sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad s = \frac{4a}{\sqrt{14 + 6\sqrt{5}}},$$

$$\text{daher } O = \frac{16 \cdot 3a^2}{14 + 6\sqrt{5}} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}.$$

Da $O = O_{\pi \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)}$ sein muss, so ist

$$\frac{24a^2\sqrt{10}\sqrt{2,5+\sqrt{5}}}{7+3\sqrt{5}} = \frac{6a^2\sqrt{10}\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}} \quad \text{oder}$$

$$\frac{16 \cdot (2,5 + \sqrt{5})}{94 + 42\sqrt{5}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{9 + 4\sqrt{5}},$$

$$\begin{aligned}(40 + 16\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5}) &= (94 + 42\sqrt{5})(5 + \sqrt{5}) = \\ 360 + 144\sqrt{5} + 160\sqrt{5} + 320 &= 470 + 210\sqrt{5} + 94\sqrt{5} + 210 = \\ &= 680 + 304\sqrt{5} = 680 + 304\sqrt{5},\end{aligned}$$

womit die Identität der Gleichung

$$O = O_{\pi \left(n = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)} \quad \text{bewiesen ist.}$$

¹⁾ Vergl. die Fussnote auf S. 246.