Über den Rand der einfach zusammenhängenden ebenen Gebiete.

Von

Marie Torhorst in Bonn.

Die folgenden Untersuchungen, die einen Teil meiner Bonner Dissertation wiedergeben, beschäftigen sich mit dem Rande ebener, einfach zusammenhängender, geschränkter Gebiete. Es werden in Beziehung gesetzt: der von C. Carathéodory[1]) eingeführte Begriff der *Primenden*, der von A. Schoenflies[2]) eingeführte Begriff der *allseitigen Erreichbarkeit*, der von H. Hahn[3]) eingeführte Begriff des *Zusammenhanges im kleinen*. Von den Resultaten seien hervorgehoben die Sätze: In einem Primende kann es höchstens drei allseitig erreichbare Punkte geben, und höchstens zwei Punkte, in denen der Rand zusammenhängend im kleinen ist. Die drei Aussagen: „Alle Randpunkte sind allseitig erreichbar", „Der Rand ist zusammenhängend im kleinen" und „Der Rand besteht nur aus Primenden erster Art" werden als völlig gleichbedeutend erwiesen. Jede dieser drei Aussagen stellt eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür dar, daß der Rand eine stetige Kurve sei.

§ 1.

Grundlegende Definitionen und Lehrsätze.

(1). Unter einer *offenen Punktmenge* verstehen wir das Komplement einer abgeschlossenen Menge.

(2). Eine abgeschlossene Menge heiße *zusammenhängend*, wenn sie nicht Vereinigung zweier zueinander fremder abgeschlossener Mengen ist; eine

[1]) Math. Ann., **73** (1913), S. 321—370.

[2]) Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Zweiter Teil, Leipzig 1908, S. 176.

[3]) Jahresber. d. Math. Ver., **23** (1914), S. 318—322; Sitzungsber. d. Akad. Wien 123, Abt. IIa (1914), S. 2433ff.

offene Menge heiße zusammenhängend, wenn sie nicht Vereinigung zweier zueinander fremder offener Mengen ist.

Ein einzelner Punkt ist eine spezielle zusammenhängende abgeschlossene Menge.

(3). Wir sagen: eine geschränkte zusammenhängende abgeschlossene Menge *verbindet zwei Punkte*, wenn sie die beiden Punkte enthält.

(4). Eine zusammenhängende offene Menge nennen wir ein *Gebiet.*

(5). Ein geschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ in der Ebene wird *einfach zusammenhängend* genannt, wenn jedes geschlossene Polygon, das in $\mathfrak{G}$ verläuft, in seinem Innern nur Punkte von $\mathfrak{G}$ enthält.

Da wir es im folgenden fast ausschließlich mit solchen geschränkten, einfach-zusammenhängenden Gebieten zu tun haben, so werden wir, falls nicht das Gegenteil bemerkt ist, diese kurz als *Gebiete* bezeichnen.

(6). In gewohnter Weise bezeichnen wir als *Randpunkt* eines Gebietes $\mathfrak{G}$ jeden Häufungspunkt von $\mathfrak{G}$, der nicht zu $\mathfrak{G}$ gehört, und als *Rand* von $\mathfrak{G}$ die Menge aller Randpunkte von $\mathfrak{G}$; sie wird im folgenden stets mit $\mathfrak{r}$ bezeichnet. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist abgeschlossen.

(7). Als *Streckenzug* in der Ebene soll im folgenden die Vereinigung von endlich oder abzählbar unendlich vielen (abgeschlossenen) Strecken $\overline{\alpha_n \alpha_{n+1}}$ ($n = 1, 2, \ldots l$; oder $n = 1, 2, \ldots$; oder $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) bezeichnet werden mit folgenden Eigenschaften:

(a). je zwei Strecken $\overline{\alpha_n \alpha_{n+1}}$ und $\overline{\alpha_{n+1} \alpha_{n+2}}$ haben nur den Punkt α_{n+1} gemeinsam; je zwei Strecken $\overline{\alpha_i \alpha_{i+1}}$ und $\overline{\alpha_j \alpha_{j+1}}$ haben, wenn etwa $j > i$ und $j \neq i + 1$ ist, keinen Punkt gemeinsam; doch kann $\alpha_1 = \alpha_{l+1}$ sein, wenn der Streckenzug endlich viele Strecken enthält;

(b). für $n = 1, 2, \ldots$ soll die Menge der Eckpunkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n, \ldots$ nur einen Häufungspunkt α besitzen; es kann $\alpha_1 = \alpha$ sein. Für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ sollen die beiden Folgen $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, und $\alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \ldots, \alpha_{-n}, \ldots$ je nur einen Häufungspunkt α und $\bar{\alpha}$ besitzen; es kann $\alpha = \bar{\alpha}$ sein.

(8). Je zwei Punkte eines Gebietes $\mathfrak{G}$ lassen sich durch einen Streckenzug endlicher Streckenzahl verbinden, der in $\mathfrak{G}$ verläuft. Wir wollen einen derartigen Streckenzug einen *Weg* im Gebiet $\mathfrak{G}$ nennen und ihn mit $\mathfrak{w}$ bezeichnen.

(9). Unter einem *Einschnitt* in $\mathfrak{G}$ verstehen wir einen Streckenzug in $\mathfrak{G}$, der einen innern Punkt γ von $\mathfrak{G}$ mit einem Randpunkt ϱ verbindet; es kann dabei vorkommen, daß dieser Streckenzug unendlich viele Strecken enthält, doch nur unter der Bedingung, daß ϱ der einzige Häufungspunkt seiner Eckpunkte ist. Wir nennen γ den Anfangspunkt und ϱ den Endpunkt des Einschnitts. — Der Einschnitt sei mit $\mathfrak{e}$ bezeichnet; dabei soll die Punktmenge $\mathfrak{e}$ die Punkte γ und ϱ ausschließen.

(10). Jeder Randpunkt von $\mathfrak{G}$, der mit einem inneren Punkt durch einen Einschnitt verbunden werden kann, wird ein *für* $\mathfrak{G}$ *erreichbarer* Punkt genannt.

(11). Die für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkte bilden eine zur Menge $\mathfrak{r}$ aller Randpunkte dicht liegende Punktmenge[4]).

(12). Ein in $\mathfrak{G}$ verlaufender Streckenzug, der zwei Randpunkte ϱ_1 und ϱ_2 von $\mathfrak{G}$ verbindet und dessen Eckpunkte, falls er aus unendlich vielen Strecken besteht, sich höchstens in den beiden Punkten ϱ_1 und ϱ_2 häufen, heißt ein *Querschnitt* von $\mathfrak{G}$. Die Punkte ϱ_1 und ϱ_2 werden die Endpunkte des Querschnitts genannt; sie können identisch sein. — Der Querschnitt sei mit $\mathfrak{q}$ bezeichnet; die Punktmenge $\mathfrak{q}$ soll die beiden Punkte ϱ_1 und ϱ_2 ausschließen.

(13). Auf jedem Polygon, das in seinem Innern einen Punkt des Randes von $\mathfrak{G}$ und nicht das ganze Gebiet $\mathfrak{G}$ enthält, gibt es mindestens einen und höchstens abzählbar unendlich viele Querschnitte von $\mathfrak{G}$.

(14). Jeder Querschnitt $\mathfrak{q}$ des Gebietes $\mathfrak{G}$ zerlegt $\mathfrak{G}$ in zwei zueinander fremde Gebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$[5]), und es gilt die Beziehung: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' + \mathfrak{G}'' + \mathfrak{q}$. — Jeder Weg in $\mathfrak{G}$, der einen Punkt aus $\mathfrak{G}'$ mit einem Punkt aus $\mathfrak{G}''$ verbindet, hat mindestens einen Punkt mit dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ gemeinsam[6]). — Die Endpunkte des Querschnitts $\mathfrak{q}$ gehören zum Rande jedes der beiden Gebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$; *jeder, von den beiden Endpunkten von* $\mathfrak{q}$ *verschiedene, Punkt des Randes von* $\mathfrak{G}$ *ist in der Randmenge von mindestens einem der beiden Teilgebiete enthalten.*

(15). *Jede geschränkte zusammenhängende abgeschlossene Punktmenge* $\mathfrak{C}$, *die einen Punkt* γ *aus* $\mathfrak{G}$ *und einen nicht zu* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Punkt* ν *verbindet, hat mindestens einen Punkt mit dem Rande* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *gemeinsam.*

Ist ν ein Randpunkt von $\mathfrak{G}$, dann ist der Satz gewiß richtig. — Es sei ν kein Randpunkt; angenommen, es gebe eine Punktmenge $\mathfrak{C}$ der angegebenen Art, die zur abgeschlossenen Menge $\mathfrak{r}$ fremd ist. Es gibt dann ein Polygon $\mathfrak{p}$, das in seinem Innern $\mathfrak{P}$ die Menge $\mathfrak{C}$ enthält, während die Menge $\mathfrak{r}$ zu $\mathfrak{P}$ fremd ist. Man denke sich in $\mathfrak{P}$ von γ aus einen Streckenzug $\mathfrak{w}$ konstruiert, der im Punkte ν endigt. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist eine abgeschlossene Punktmenge; daher und weil der Endpunkt ν von $\mathfrak{w}$ außerhalb des Gebietes $\mathfrak{G}$ liegt, müßte es auf $\mathfrak{w}$ einen ersten Punkt geben, der zum Rande $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ gehört. Das ist aber nicht möglich, da $\mathfrak{w}$ zu $\mathfrak{P}$ gehört und die Menge $\mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{r}$ fremd ist. — Unsere Annahme, daß die Menge $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{r}$ fremd sei, führt also auf einen Widerspruch; damit ist die Behauptung bewiesen.

---

4) Vgl. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914, S. 347.

5) Carathéodory, a. a. O. S. 328.

6) Carathéodory, a. a. O. S. 328 u. 329.

(16). *Es sei* $\mathfrak{G}$ *durch den Querschnitt* $\mathfrak{q}$ *zerlegt in die beiden Teilgebiete* $\mathfrak{G}'$ *und* $\mathfrak{G}''$, *und es sei* $\mathfrak{t}$ *eine die beiden Endpunkte von* $\mathfrak{q}$ — die auch zusammenfallen können — *verbindende zusammenhängende abgeschlossene Menge, die zu* $\mathfrak{G}'$ *fremd ist. Dann ist die Menge* $\overline{\mathfrak{G}}$ *aller derjenigen nicht zu* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *gehörigen Punkte, die mit einem Punkte von* $\mathfrak{G}'$ *durch einen zu* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *fremden Streckenzug verbunden werden können, ein* — nicht notwendig geschränktes — *zu* $\mathfrak{G}''$ *fremdes Gebiet.*

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}'$ die Randmenge von $\mathfrak{G}'$. Falls der Durchschnitt $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$ Teil von $\mathfrak{t}$ ist, so wird offenbar $\overline{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}'$, und die Behauptung ist bewiesen. — Wenn hingegen $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$ nicht Teil von $\mathfrak{t}$ ist, so sei ϱ' ein Punkt von $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$, der nicht zu $\mathfrak{t}$ gehört; wir umgeben ihn mit einem Polygon $\mathfrak{p}$, das samt seinem Innern zu $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ fremd ist. Nach (13) gibt es auf $\mathfrak{p}$ einen Querschnitt von $\mathfrak{G}'$, der offenbar auch ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ ist. Auf diesem Querschnitt nehmen wir einen Punkt γ' aus $\mathfrak{G}'$ an und verbinden ihn mit einem Punkte γ'' aus $\mathfrak{G}''$ durch einen Weg $\mathfrak{w}$, der mit $\mathfrak{q}$ nur einen einzigen Punkt ε gemeinsam hat. Wir behaupten: jeder Weg zwischen γ' und γ'' enthält mindestens einen Punkt von $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$. Denn angenommen, es gebe einen γ' und γ'' verbindenden Weg $\mathfrak{w}'$, der zu $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ fremd ist; dieser kann dann ohne weiteres so abgeändert werden, daß er auch zu $\mathfrak{w}$ fremd ist; dann bildet die Menge $\mathfrak{w}+\mathfrak{w}'+\gamma'+\gamma''$ ein Polygon $\mathfrak{p}'$, das mit der Menge $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ nur den Punkt ε gemeinsam hat. Da nun der Weg $\mathfrak{w}$ den Querschnitt $\mathfrak{q}$ im Punkte ε durchsetzt, gibt es auf $\mathfrak{q}$ einen Punkt ε_1 im Innern $\mathfrak{P}'$ des Polygons $\mathfrak{p}'$ und einen Punkt ε_2 außerhalb der Menge $\mathfrak{P}'+\mathfrak{p}'$. Man lasse aus $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ das Innere der Strecke $\overline{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ fort; die übrigbleibende zusammenhängende abgeschlossene Menge würde nun einen Punkt ε_1 aus dem Innern des Polygons $\mathfrak{p}'$ mit einem Punkt ε_2 aus dem Äußern des Polygons $\mathfrak{p}'$ verbinden, ohne einen Punkt mit $\mathfrak{p}'$ gemeinsam zu haben, was nach (15) unmöglich ist. Damit ist gezeigt, daß $\overline{\mathfrak{G}}$ zu $\mathfrak{G}''$ fremd ist. Daß $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Gebiet ist, liegt auf der Hand.

(17). *Das in* (16) *definierte Gebiet* $\overline{\mathfrak{G}}$ *enthält alle nicht zur Menge* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *gehörigen Randpunkte von* $\mathfrak{G}'$, *schließt dagegen alle Randpunkte von* $\mathfrak{G}''$ *aus. Der Rand von* $\overline{\mathfrak{G}}$ *ist in der Menge* $\mathfrak{q}+\mathfrak{t}$ *enthalten.*

(18). Die Begriffe *Querschnittskette* und *Gebietskette* werden im folgenden in der von Carathéodory eingeführten Form benutzt[7]). — Eine Querschnittskette wird mit $[\mathfrak{q}_n]$, die zugehörige Gebietskette mit $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ und die Randmenge des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ mit $\mathfrak{r}_n$ bezeichnet.

(19). Wir sagen: *Die Querschnittskette* $[\mathfrak{q}_n]$ *konvergiert gegen den Punkt*

[7]) Carathéodory, a. a. O. S. 331.

ϱ, falls die Grenzmenge[8]) aller Mengen $\mathfrak{q}_n$ als einzigen Punkt den Punkt ϱ enthält; *die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *konvergiert gegen den Punkt* ϱ, falls die Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$ als einzigen Punkt den Punkt ϱ enthält.

(20). Der Begriff *Primende*[9]) wird ebenfalls in der von Carathéodory eingeführten Form übernommen.

(a). Wir sagen: *Das durch die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *definierte Primende* P *von* $\mathfrak{G}$ *gehört zu einem der beiden durch einen Querschnitt bestimmten Teilgebiete von* $\mathfrak{G}$, falls für irgendeine Zahl n das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ der Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ in diesem Teilgebiet enthalten ist.

(b). Ist $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ eine das Primende P von $\mathfrak{G}$ definierende Gebietskette und ist $\{\gamma_m\}$ eine Punktfolge in $\mathfrak{G}$ derart, daß in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ fast alle Punkte der Folge liegen, so wollen wir sagen: *Die Punktfolge* $\{\gamma_m\}$ *konvergiert gegen das Primende* P.

(c). *Ein Punkt ist in dem durch die Gebietskette* $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ *definierten Primende* P *von* $\mathfrak{G}$ *enthalten*, wenn dieser Punkt für jedes n in der Randmenge $\mathfrak{r}_n$ von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten ist.

(21). Die Menge aller Punkte, die in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten sind, ist identisch mit der Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{r}_n$. Diese Grenzmenge ist gleichzeitig der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$, und auch der Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{r}_n$.

(22). Die Menge aller Punkte in einem Primende ist zusammenhängend und abgeschlossen[10]).

(23). Sind P und P' zwei voneinander verschiedene Primenden von $\mathfrak{G}$ und sind $[\mathfrak{q}_n]$ und $[\mathfrak{q}'_n]$ zwei Querschnittsketten, die P und P' definieren, so sind für fast alle n die beiden Gebiete $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ und $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}'_n}$ zueinander fremd.

(24). *Jeder Punkt* ϱ *des Randes* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist in mindestens einem Primende von* $\mathfrak{G}$ *enthalten.*

Man bestimme in $\mathfrak{G}$ eine gegen ϱ konvergierende Punktfolge $\{\gamma_m\}$. In dieser Punktfolge gibt es eine Teilfolge $\{\gamma'_m\}$, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Ist $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ eine das Primende P definierende Gebietskette, so sind in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ fast alle Punkte der Folge $\{\gamma'_m\}$ enthalten. Der Grenzpunkt ϱ dieser Folge $\{\gamma'_m\}$ gehört daher zu jeder Menge $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n} + \mathfrak{r}_n$. Nach (21) ist der Punkt ϱ also im Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten.

(25). Ein Punkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ wird *einfach* genannt, wenn

---

[8]) Als *Grenzmenge* einer Mengenfolge $\mathfrak{M}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ wird bezeichnet die Menge aller derjenigen Punkte, in deren jeder Umgebung Punkte aus unendlich vielen Mengen $\mathfrak{M}_n$ liegen (vgl. Zoretti Encycl. des sc. math., II_2, S. 145.)

[9]) Carathéodory, a. a. O. S. 336.

[10]) Vgl. Zoretti, a. a. O.

er in nur einem Primende von $\mathfrak{G}$ enthalten ist. Jeder Punkt des Randes $\mathfrak{r}$, der nicht einfach ist, heißt *mehrfacher* Punkt.

(26). Es sei in $\mathfrak{G}$ ein Einschnitt $\mathfrak{e}$ mit dem Endpunkt ϱ gegeben. Wir betrachten alle möglichen Punktfolgen, die auf $\mathfrak{e}$ gegen ϱ konvergieren; man beweist leicht, daß alle diese Punktfolgen gegen ein und dasselbe Primende von $\mathfrak{G}$ konvergieren, das wir das *dem Einschnitt zugeordnete Primende* nennen wollen.

(27). *In dieser Weise sind jedem Querschnitt* $\mathfrak{q}$ *von* $\mathfrak{G}$ *zwei Primenden zugeordnet.* Sind diese beiden Primenden identisch, so nennen wir $\mathfrak{q}$ einen *Rückkehrschnitt.*

(28). Ist ϱ der Endpunkt eines Einschnitts $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{G}$ und ist P das dem Einschnitt $\mathfrak{e}$ zugeordnete Primende von $\mathfrak{G}$, so nennen wir ϱ einen *für das Primende P erreichbaren Punkt.*

(29). Ein Primende enthält höchstens einen für das Primende erreichbaren Punkt[11]).

(30). Nach Carathéodory gilt der Satz: Jedes Primende P von $\mathfrak{G}$ kann definiert werden durch eine *gegen einen Punkt ϱ von P konvergierende* Querschnittskette[12]).

(31). Alle Punkte ϱ in einem Primende, gegen die mindestens eine das Primende definierende Querschnittskette konvergiert, heißen *Hauptpunkte* des Primendes; alle übrigen Punkte werden *Nebenpunkte* genannt.

(32). *Ein Primende mit erreichbarem Punkt wird ein Primende erster oder zweiter Art* genannt, je nachdem es nur einen einzigen Punkt oder unendlich viele Punkte enthält. In einem Primende zweiter Art gibt es einen Hauptpunkt und unendlich viele Nebenpunkte.

Ein Primende ohne erreichbaren Punkt wird ein Primende dritter oder vierter Art genannt, je nachdem es nur Hauptpunkte oder Haupt- und Nebenpunkte enthält.

(33). Ein Punkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist dann und nur dann erreichbar für $\mathfrak{G}$, wenn es mindestens ein Primende erster oder zweiter Art gibt, für das der Punkt ϱ erreichbarer Punkt ist.

(34). *Ist* $\mathfrak{q}$ *ein Querschnitt von* $\mathfrak{G}$, *der kein Rückkehrschnitt ist, so gibt es zu jedem der beiden durch* $\mathfrak{q}$ *bestimmten Teilgebiete mindestens ein Primende von* $\mathfrak{G}$, *das zu diesem Teilgebiet gehört.*

Es möge der Querschnitt $\mathfrak{q}$ mit den Endpunkten ϱ_1 und ϱ_2 in $\mathfrak{G}$ die beiden Teilgebiete $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ bestimmen. Man zerlege $\mathfrak{q}$ durch einen seiner Punkte ε in zwei Einschnitte $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$; $P^{(1)}$ sei das dem Einschnitt $\mathfrak{e}_1$, $P^{(2)}$ das dem Einschnitt $\mathfrak{e}_2$ zugeordnete Primende; $[\mathfrak{q}_n^{(1)}]$ sei eine Quer-

[11]) Carathéodory, a. a. O. S. 353.

[12]) Carathéodory, a. a. O. S. 343.

schnittskette, die das Primende $P^{(1)}$ definiert. Man kann annehmen, daß keiner der Querschnitte $\mathfrak{q}_n^{(1)}$ einen Endpunkt mit $\mathfrak{q}$ gemeinsam hat.

Da $\mathfrak{q}$ kein Rückkehrschnitt ist, sind die beiden Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ voneinander verschieden; daher wird offenbar für ein genügend großes n die Menge $\mathfrak{e}_2 + \varepsilon$ zum Gebiete $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n^{(1)}}$ fremd sein. Die das Primende $P^{(1)}$ definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n^{(1)}]$ läßt sich nun ohne weiteres durch eine andere ersetzen — sie sei wiederum mit $[\mathfrak{q}_n^{(1)}]$ bezeichnet —, so daß alle Querschnitte der neuen Kette im ursprünglichen Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n^{(1)}}$ verlaufen, also zu $\mathfrak{e}_2 + \varepsilon$ fremd sind, während jeder von ihnen vom Einschnitt $\mathfrak{e}_1$ in einem und nur einem Punkt ε_n durchsetzt wird; ferner hat keiner der neuen Querschnitte einen Endpunkt mit $\mathfrak{q}$ gemeinsam. Der Punkt ε_n zerlegt jeden der neuen Querschnitte $\mathfrak{q}_n^{(1)}$ von $\mathfrak{G}$ in zwei Einschnitte von $\mathfrak{G}$, von denen der eine — $\mathfrak{e}_n'$ — ganz im Gebiete $\mathfrak{G}'$, der andere — $\mathfrak{e}_n''$ — ganz im Gebiete $\mathfrak{G}''$ verläuft. Das dem Einschnitt $\mathfrak{e}_n'$ zugeordnete Primende P' von $\mathfrak{G}$ ist, da der Querschnitt $\mathfrak{q}_n^{(1)}$ keinen Endpunkt mit $\mathfrak{q}$ gemeinsam hat, von den Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ verschieden. P' gehört daher zu einem und nur einem der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$; zum Gebiet $\mathfrak{G}''$ kann P' nicht gehören: denn alle Punktfolgen, die auf dem Einschnitt $\mathfrak{e}_n'$ gegen das Primende P' konvergieren, sind Punktfolgen aus $\mathfrak{G}'$ und können nicht gleichzeitig gegen ein zu $\mathfrak{G}''$ gehöriges Primende konvergieren. Das Primende P' von $\mathfrak{G}$ gehört also zu $\mathfrak{G}'$. — In gleicher Weise läßt sich zeigen, daß das dem Einschnitt $\mathfrak{e}_n''$ zugeordnete Primende von $\mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{G}''$ gehört.

Anmerkung: (a). Der Beweis zeigt, daß es, falls $\mathfrak{q}$ kein Rückkehrschnitt ist, zu jedem der beiden Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört.

(b). Falls der Querschnitt $\mathfrak{q}$ kein Rückkehrschnitt ist, gibt es auf dem Rande jedes der beiden Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens einen Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, der von den Endpunkten des Querschnitts $\mathfrak{q}$ verschieden ist.

(35). Wir sagen: *Die Folge von Primenden $\{P_m\}$ konvergiert gegen das Primende P,* wenn fast alle Primenden der Folge zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ einer das Primende P definierenden Gebietskette gehören.

(36). Es sei $\{P_m\}$ eine Folge von Primenden von $\mathfrak{G}$, die gegen das Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{m}_m$ die Menge aller im Primende P_m enthaltenen Punkte und mit $\mathfrak{m}$ die Menge aller im Primende P enthaltenen Punkte, *so ist die Grenzmenge aller Mengen $\mathfrak{m}_m$ in der Menge $\mathfrak{m}$ enthalten.*

Es sei $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ eine das Primende P definierende Gebietskette. Das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthält fast alle Primenden P_m; daher enthält die Menge $\mathfrak{r}_n$ fast alle Mengen $\mathfrak{m}_m$. In $\mathfrak{r}_n$ ist also auch die Grenzmenge aller Mengen

$\mathfrak{m}_m$ enthalten, und diese ist daher im Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{r}_n$, d. h. in der Menge $\mathfrak{m}$ enthalten.

(37). Wählt man aus jeder Menge $\mathfrak{m}_m$ einen Punkt ϱ_m aus, so enthält die Punktfolge $\{\varrho_m\}$ eine Teilfolge, die gegen einen Punkt ϱ des Primendes P konvergiert.

(38). Ist irgendeine Menge $\{P\}$ von Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}$ gegeben und ist $\{\overline{P}\}$ eine ihrer Teilmengen, so soll *die Menge* $\{\overline{P}\}$ *dicht zur gegebenen Menge* $\{P\}$ *heißen*, wenn es zu jedem Primende P der gegebenen Menge, das nicht schon zur Menge $\{\overline{P}\}$ gehört, eine Folge von Primenden aus der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, die gegen das Primende P konvergiert.

(39). *Eine Menge* $\{\overline{P}\}$ *von Primenden des Gebietes* $\mathfrak{G}$ *ist dann und nur dann dicht zur Menge aller Primenden von* $\mathfrak{G}$, *wenn es zu jedem durch einen Querschnitt* $\mathfrak{q}$ *bestimmten Teilgebiet von* $\mathfrak{G}$, *falls* $\mathfrak{q}$ *kein Rückkehrschnitt ist, mindestens ein Primende von* $\mathfrak{G}$ *gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört.*

Besteht die Menge $\{\overline{P}\}$ aus allen Primenden von $\mathfrak{G}$, dann ist die Behauptung gewiß richtig. Dieser besondere Fall sei im folgenden ausgeschlossen.

(a). Angenommen, eine Menge $\{\overline{P}\}$ sei dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{q}$ sei ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist. Es wird behauptet, daß es zu jedem durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende $\overline{P}$ der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört. — Es sei $\mathfrak{G}'$ eines der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete. Da $\mathfrak{q}$ kein Rückkehrschnitt ist, gibt es mindestens ein Primende P von $\mathfrak{G}$, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört. Enthält die Menge $\{\overline{P}\}$ das Primende P, dann ist unsere Behauptung richtig. Gehört P der Menge $\{\overline{P}\}$ nicht an, so bestimme man in $\mathfrak{G}$ eine P definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n]$ derart, daß für ein genügend großes n ein Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ der Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ in $\mathfrak{G}'$ enthalten ist. Da die Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$, gibt es eine Folge von Primenden $\{\overline{P}_m\}$ aus der Menge $\{\overline{P}\}$, die gegen das Primende P konvergiert. Fast alle Primenden dieser Folge gehören zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ und, da $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ im Gebiet $\mathfrak{G}'$ enthalten ist, auch zum Gebiet $\mathfrak{G}'$. Es gibt also gewiß in der Menge $\{\overline{P}\}$ ein Primende, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört.

(b). Es sei $\{\overline{P}\}$ irgendeine Menge von Primenden des Gebietes $\mathfrak{G}$; und es sei bekannt, daß es zu jedem durch einen Querschnitt $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ mindestens ein Primende der Menge $\{\overline{P}\}$ gibt, das zu diesem Teilgebiet gehört. Es wird behauptet, daß die Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$. — Es sei P ein beliebiges Primende von $\mathfrak{G}$, das nicht schon zur Menge $\{\overline{P}\}$ gehört. Dann gibt es nach Voraussetzung zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ einer Kette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$, die das Primende P

definiert, ein Primende $\overline{P}_n$ aus der Menge $\{\overline{P}\}$, das zu $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ gehört. Die Folge $\{\overline{P}_n\}$ von Primenden konvergiert gegen das Primende P, denn fast alle Primenden dieser Folge gehören zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$. Die Menge $\{\overline{P}\}$ ist also dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

(40). Aus Anmerkung (a) zu (34) folgt eine wichtige Ergänzung zu Satz (11): *Die Menge aller Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ ist dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.*

(41). *Ist $\mathfrak{q}$ ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist, so gibt es auf dem Rande jedes der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ mindestens einen für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkt.*

Anmerkung: Dies kann nicht ohne weiteres aus Satz (11) gefolgert werden, wie folgendes Beispiel zeigt: In Figur 1 ist die Randmenge $\mathfrak{r}$ eines einfach-zusammenhängenden Gebietes $\mathfrak{G}$ angedeutet und ein Querschnitt $\mathfrak{q}$ gezeichnet, der aus der Verbindungsstrecke der beiden Randpunkte ϱ_1 und ϱ_2 besteht. Das eine der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ — es sei mit $\mathfrak{G}'$ bezeichnet — besteht aus der Menge aller Punkte im Innern des Quadrates mit den vier Eckpunkten ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4. — Es gibt nun, wie man unmittelbar einsieht, auf dem Rande $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ eine zu $\mathfrak{r}$ dicht liegende Menge von Punkten, die zum Rande $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{G}'$ fremd ist.

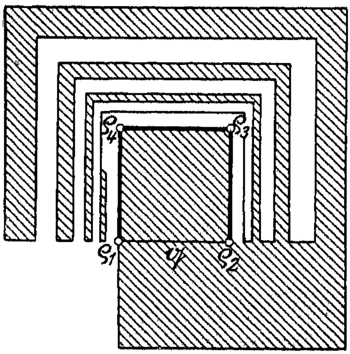

Fig. 1.

(42). Satz (40) läßt sich verschärfen: Es gibt eine Menge von *abzählbar* unendlich vielen Primenden erster oder zweiter Art, die dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_l, \ldots$ eine Menge von abzählbar unendlich vielen Punkten des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die dicht ist zur Menge $\mathfrak{r}$. Zu jedem dieser Punkte als Mittelpunkt denke man sich Kreise mit den Radien $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{m}, \ldots$ konstruiert und jedem der Kreise ein regelmäßiges Polygon einbeschrieben, das außerhalb des nächstfolgenden Kreises verläuft. Auf diese Weise erhält man abzählbar unendlich viele Polygone $\mathfrak{p}_{l,m}$. Auf jedem dieser Polygone gibt es für ein genügend großes m nach (13) mindestens einen und höchstens abzählbar unendlich viele Querschnitte von $\mathfrak{G}$; jedem Querschnitt sind zwei Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ zugeordnet. Die Gesamtheit aller Polygone $\mathfrak{p}_{l,m}$ bestimmt daher eine Menge von abzählbar unendlich vielen Primenden $\{\overline{P}\}$; es soll nun gezeigt werden, daß diese Menge $\{\overline{P}\}$ dicht ist zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$. — Es sei $\mathfrak{q}$ mit den Endpunkten ϱ_1 und ϱ_2 ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$, der kein Rückkehrschnitt ist, und $\mathfrak{G}'$ sei eins der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es nach der Anmerkung (b) zu (34) auf dem Rande $\mathfrak{r}'$ von $\mathfrak{G}'$ einen Punkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, der von den Endpunkten von $\mathfrak{q}$ verschieden ist. Es sei a der Abstand des Punktes ϱ von der Menge $\mathfrak{q} + \varrho_1 + \varrho_2$. Für $\frac{1}{m} < a$ sei ein Punkt ϱ_l so gewählt, daß der Abstand der beiden Punkte ϱ_l und ϱ kleiner als $\frac{1}{m+1}$ ist; dann liegt der Randpunkt ϱ von $\mathfrak{G}'$ im Innern des Polygons $\mathfrak{p}_{l,m}$, das selbst zur Menge $\mathfrak{q} + \varrho_1 + \varrho_2$ fremd ist. Nach (13) gibt es auf $\mathfrak{p}_{l,m}$ mindestens einen Querschnitt $\mathfrak{q}'$ des Gebietes $\mathfrak{G}'$. Da das Polygon $\mathfrak{p}_{l,m}$ keinen Punkt mit dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{G}$ gemeinsam hat, muß $\mathfrak{q}'$ gleichzeitig ein Querschnitt von $\mathfrak{G}$ sein. Die beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}'$ zugeordneten Primenden von $\mathfrak{G}$ sind in der Menge $\{\overline{P}\}$ enthalten und gehören zum Gebiet $\mathfrak{G}'$. — Es gibt also mindestens ein Primende in der Menge $\{\overline{P}\}$, das zum Gebiet $\mathfrak{G}'$ gehört; die Menge $\{\overline{P}\}$ ist also nach (39) dicht zur Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$.

§ 2.

Folgerungen aus der zyklischen Anordnung der Primenden.

(43). Wie Carathéodory aus der Theorie der konformen Abbildung gefolgert hat, *sind die Primenden eines Gebietes $\mathfrak{G}$ zyklisch geordnet*[13]). Diese Tatsache, für die ich an anderer Stelle einen elementaren, von der Theorie der konformen Abbildung unabhängigen, Beweis erbringen werde, kann auf folgende Weise formuliert werden:

Es gibt eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung der Primenden eines Gebietes $\mathfrak{G}$ auf die Punkte einer Kreislinie.

Unter der Stetigkeit der Abbildung ist dabei folgendes verstanden: Ist $\{P_m\}$ eine Folge von Primenden, die gegen das Primende P konvergiert, und sind $\{z_m\}$ und z die diesen Primenden zugeordneten Punkte der Kreislinie, so gilt $\lim\limits_{m=\infty} z_m = z$ und umgekehrt.

(44). Denken wir uns in gewohnter Weise die Punkte der Kreislinie umkehrbar eindeutig und stetig auf die reellen Zahlen $0 \leqq z < 1$ abgebildet und betrachten wir reelle Zahlen, die zueinander nach dem Modul 1 kongruent sind, als gleichwertig, so erhalten wir damit *eine Abbildung aller Primenden von $\mathfrak{G}$ auf die reellen Zahlen*, bei der einem und demselben Primende die Menge aller nach dem Modul 1 zu einer bestimmten Zahl kongruenten Zahlen entspricht.

13) Carathéodory, a. a. O. S. 350.

(45). Durch Berufung auf den Satz von **Bolzano** von der Existenz eines Häufungswertes folgern wir daraus: *Ist irgendeine Menge von unendlich vielen Primenden von $\mathfrak{G}$ gegeben, so ist in dieser Menge mindestens eine Folge von Primenden enthalten, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert.*

(46). Die Menge aller Primenden von $\mathfrak{G}$, die den Punkten eines Kreisbogens entsprechen, soll ein *Intervall von Primenden*[14]) genannt werden; und zwar nennen wir ein Intervall von Primenden *abgeschlossen*, wenn der entsprechende Kreisbogen abgeschlossen ist, und *offen*, wenn der entsprechende Kreisbogen offen ist.

Die abgeschlossenen Intervalle von Primenden werden abgebildet auf Zahlen-Intervalle $a \leqq z \leqq b$ und die offenen Intervalle von Primenden auf Zahlen-Intervalle $a < z < b$, wobei $0 < b - a < 1$ ist.

(47). *Wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ durch einen Querschnitt $\mathfrak{q}$ in zwei Teilgebiete zerlegt, so bildet die Gesamtheit aller Primenden von $\mathfrak{G}$, die zu einem dieser beiden Teilgebiete gehören, ein offenes Intervall von Primenden.*

Es seien $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ die beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}$, der kein Rückkehrschnitt ist, zugeordneten Primenden; $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{G}''$ seien die beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Alle von $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ verschiedenen Primenden von $\mathfrak{G}$ zerfallen in zwei Klassen $\{P'\}$ und $\{P''\}$, je nachdem sie zu $\mathfrak{G}'$ oder zu $\mathfrak{G}''$ gehören; dabei kann kein Primende der einen Klasse Grenze einer Folge von Primenden der andern Klasse sein. — Durch die in (43) charakterisierte Abbildung werden den beiden Primenden $P^{(1)}$ und $P^{(2)}$ zwei Punkte $z^{(1)}$ und $z^{(2)}$ der Kreislinie zugeordnet; dabei zerfallen alle übrigen Punkte der Kreislinie in zwei Klassen $\{z'\}$ und $\{z''\}$ derart, daß kein Punkt der einen Klasse Grenze einer Folge von Punkten der andern Klasse sein kann; d. h. jede der Klassen $\{z'\}$ und $\{z''\}$ bildet einen offenen Kreisbogen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(48). *Es sei $\{z\}$ eine abgeschlossene Punktmenge der Kreislinie und $\{P_z\}$ sei die entsprechende Menge von Primenden von $\mathfrak{G}$.* Bezeichnet man mit $\mathfrak{m}_z$ die Menge aller Punkte, die im Primende P_z enthalten ist, so bildet *die Vereinigung $\mathfrak{v}$ aller Mengen $\mathfrak{m}_z$ eine abgeschlossene Punktmenge.*

Wir betrachten eine beliebige konvergente Folge $\{\varrho_m\}$ von Punkten der Menge $\mathfrak{v}$; wir haben zu zeigen, daß ihr Grenzpunkt ϱ auch zur Menge $\mathfrak{v}$ gehört. — Jeder Punkt ϱ_m ist in mindestens einem Primende $P^{(m)}$ der Menge $\{P_z\}$ enthalten. Sind nur endlich viele Primenden $P^{(m)}$ voneinander verschieden, dann enthält mindestens eins von ihnen — es sei

[14]) **Carathéodory**, a. a. O. S. 365.

mit P_{z_0} bezeichnet — unendlich viele Punkte der Folge $\{\varrho_m\}$ und daher nach (22) auch ihren Grenzpunkt ϱ. — Sind unendlich viele von den Primenden $P^{(m)}$ voneinander verschieden, so gibt es nach (45) in dieser Menge eine Folge $\{P_{z_m}\}$, die gegen ein Primende P_{z_0} von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Jedem Primende P_{z_m} ist ein Punkt der abgeschlossenen Menge $\{z\}$ zugeordnet, und die Punktfolge $\{z_m\}$ aus der Menge $\{z\}$ konvergiert gegen einen der Menge $\{z\}$ angehörenden Punkt, der mit dem dem Primende P_{z_0} zugeordneten Punkt identisch ist. Das Primende P_{z_0} gehört also zu der mit $\{P_z\}$ bezeichneten Primendenmenge. — Ist nun $[\mathfrak{q}_n]$ eine Querschnittskette, die das Primende P_{z_0} definiert, so gehören fast alle Primenden der Folge $\{P_{z_m}\}$ zu jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$. Ist ϱ_{z_m} der im Primende P_{z_m} enthaltene Punkt unserer Folge $\{\varrho_m\}$, dann gehören fast alle Punkte ϱ_{z_m} zum Rande $\mathfrak{r}_n$ jedes Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$. Der Grenzpunkt ϱ der Folge $\{\varrho_{z_m}\}$ ist dann in jeder abgeschlossenen Menge $\mathfrak{r}_n$, also nach (20c) auch im Primende P_{z_0} enthalten.

(49). *Ist $\{P_z\}$ die Menge aller Primenden eines abgeschlossenen Primendenintervalls, so ist die Vereinigungsmenge $\mathfrak{i}$ aller Mengen $\mathfrak{m}_z$ abgeschlossen und zusammenhängend.*

Daß die Menge $\mathfrak{i}$ abgeschlossen ist, folgt aus (48).

Angenommen, die Menge $\mathfrak{i}$ wäre nun nicht zusammenhängend und ließe sich in zwei abgeschlossene, zueinander fremde Teilmengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ zerlegen; die beiden Mengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ haben dann einen von Null verschiedenen Abstand. — Jede Menge $\mathfrak{m}_z$ ist nach (22) zusammenhängend und abgeschlossen und daher entweder ganz in $\mathfrak{i}'$ oder ganz in $\mathfrak{i}''$ enthalten. Wir wollen diejenigen Primenden des gegebenen Intervalls, deren Punkte in der Menge $\mathfrak{i}'$ enthalten sind, mit $P_{z'}$ bezeichnen, alle übrigen Primenden des Intervalls entsprechend mit $P_{z''}$. Unserem Primendenintervall entspricht ein abgeschlossener Kreisbogen; mit $\{z'\}$ sei die Menge aller den Primenden $P_{z'}$ zugeordneten Punkte und mit $\{z''\}$ die Menge aller den Primenden $P_{z'}$ zugeordneten Punkte des Kreisbogens bezeichnet. Dann gehört jeder Punkt z des Kreisbogens entweder nur zu $\{z'\}$ oder nur zu $\{z''\}$. Es gibt daher entweder in $\{z'\}$ einen Häufungspunkt aus $\{z''\}$ oder in $\{z''\}$ einen Häufungspunkt aus $\{z'\}$. Es möge etwa zu $\{z'\}$ ein Häufungspunkt z_0' von $\{z''\}$ gehören; d. h. es möge in $\{z''\}$ eine Folge $\{z_n''\}$ geben, die gegen einen Punkt z_0' von $\{z'\}$ konvergiert. Dann konvergiert die Primendenfolge $\{P_{z_n''}\}$ gegen das dem Punkt z_0' zugeordnete Primende $P_{z_0'}$. Die Mengen $\mathfrak{m}_{z_n''}$ sind in der Menge $\mathfrak{i}''$ enthalten und die Menge $\mathfrak{m}_{z_0'}$ in der Menge $\mathfrak{i}'$. Nach (37) gibt es also in der Menge $\mathfrak{i}''$ eine Punktfolge, die gegen einen Punkt der Menge $\mathfrak{i}'$ konvergiert. Das steht aber im Widerspruch zu der Annahme, daß die beiden Mengen $\mathfrak{i}'$ und $\mathfrak{i}''$ einen von Null verschiedenen Abstand haben. — Es muß also die Menge $\mathfrak{i}$, wie behauptet wurde, zusammenhängend sein.

(50). Wir betrachten nun nach (44) eine Abbildung aller Primenden von $\mathfrak{G}$ auf alle reellen Zahlen; dabei wollen wir die einer monoton zunehmenden bzw. abnehmenden konvergenten Zahlenfolge entsprechende Primendenfolge eine *aufsteigende* bzw. *absteigende* Primendenfolge nennen.

(51). *Jede gegen ein Primende P_z von $\mathfrak{G}$ konvergierende Primendenfolge $\{P_{z_m}\}$ enthält eine absteigende oder aufsteigende Teilfolge.*

(52). *Zu jedem Punkt ϱ in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ gibt es eine gegen P konvergierende Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von Primenden erster oder zweiter Art, die sämtlich von P verschieden sind und deren erreichbare Punkte ϱ_n den Punkt ϱ zur Grenze haben.*

(a). Ist ϱ ein *Hauptpunkt* des Primendes P und $[\mathfrak{q}_n]$ eine gegen ϱ konvergierende Querschnittskette, die das Primende P definiert, so liefert die Menge aller den Querschnitten $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden eine solche Folge.

(b). Es sei ϱ ein *Nebenpunkt* des Primendes P. Dann gibt es eine Umgebung $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ und eine das Primende P definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n]$, so daß alle Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ samt ihren Endpunkten zu $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ fremd sind. Der Punkt ϱ gehört als Punkt des Primendes P zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$; daher und weil die für ein Gebiet erreichbaren Punkte auf dessen Rande dicht liegen, gibt es in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ mindestens einen für das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ erreichbaren Punkt ϱ_1, wobei ϱ_1 nicht von ϱ verschieden zu sein braucht. Da $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ den Querschnitt $\mathfrak{q}_1$ ausschließt, ist ϱ_1 von den Endpunkten von $\mathfrak{q}_1$ verschieden, und einem in ϱ_1 endenden Einschnitt von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ ist also ein Primende $P^{(\varrho_1)}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ gehört. Weil der Punkt ϱ Nebenpunkt des Primendes P ist, kann das Primende $P^{(\varrho_1)}$ von $\mathfrak{G}$ in keinem Fall, ob ϱ von ϱ_1 verschieden ist oder nicht, mit dem Primende P identisch sein[15]). — Wir bestimmen nun eine zweite in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}_2(\varrho)$; da der Punkt ϱ auch zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ gehört, gibt es in $\mathfrak{U}_2(\varrho)$ einen für das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ erreichbaren Punkt ϱ_2, der wiederum nicht von ϱ verschieden zu sein braucht. Der Punkt ϱ_2 ist dann erreichbarer Punkt eines Primendes $P^{(\varrho_2)}$ erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_2}$ gehört und das vom Primende P verschieden ist. — In dieser Weise läßt sich eine Folge $\{\varrho_n\}$ von für $\mathfrak{G}$ erreichbaren Punkten bestimmen, die den Punkt ϱ zum Grenzpunkt haben; es können dabei unendlich viele Punkte ϱ_n mit ϱ identisch sein. Die entsprechende Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von Primenden erster oder zweiter Art von $\mathfrak{G}$ konvergiert gegen das Primende P.

[15]) Carathéodory, a. a. O. S. 334.

Anmerkung: Da in den Fällen (a) und (b) jedes Primende der Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ von P verschieden ist, läßt sich aus der Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ stets eine Teilfolge aussondern — sie sei wieder mit $\{P^{(\varrho_n)}\}$ bezeichnet —, so daß in einer das Primende P definierenden Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ jedesmal das Primende $P^{(\varrho_n)}$ zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$, aber nicht zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_{n+1}}$ gehört.

(53). Die in (52) beschriebene Primendenfolge wollen wir *eine zum Punkte ϱ des Primendes P gehörige Primendenfolge* nennen.

(54). Gibt es zu einem Punkt ϱ im Primende P eine aufsteigende Primendenfolge, die zu ϱ gehört, so soll ϱ *rechtsseitiger Punkt im Primende P* genannt werden; gibt es eine absteigende Folge, die zu ϱ gehört, so soll ϱ *linksseitiger Punkt im Primende P* genannt werden.

(55). Nach (51) und (52) *ist jeder Punkt in einem Primende P rechtsseitiger oder linksseitiger Punkt.*

Jeder Hauptpunkt in einem Primende ist sowohl rechtsseitig als auch linksseitig. — Es sei nämlich $[\mathfrak{q}_n]$ eine das Primende P definierende Querschnittskette; z sei eine dem Primende P entsprechende Zahl und a_n und b_n seien zwei Zahlen, die den beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden erster oder zweiter Art entsprechen. Dann lassen sich die Zahlen z, a_n und b_n und eine Zahl a so wählen, daß die Beziehung $a-1 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots < z < \ldots < b_n < \ldots < b_2 < b_1 < a$ erfüllt ist. Damit ist aber unsere Behauptung bewiesen.

§ 3.

Zusammenhang im kleinen und allseitige Erreichbarkeit.

(56). Gibt es zu jeder Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ eines Punktes ϱ im Primende P von $\mathfrak{G}$ eine nach (53) zu ϱ gehörige *aufsteigende* Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$, so daß jeder Punkt ϱ_n mit ϱ verbunden werden kann durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{t}_n$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten ist, so wollen wir sagen: *Im Punkte ϱ des Primendes P besteht Zusammenhang nach rechts.* Gibt es eine entsprechende *absteigende* Primendenfolge, so wollen wir sagen: *Im Punkte ϱ besteht Zusammenhang nach links.*

(57). Gibt es eine gegen das Primende P konvergierende *aufsteigende* Folge von Primenden, in deren jedem der Punkt ϱ von P als erreichbarer Punkt vorkommt, so soll *der Punkt ϱ im Primende P von rechts erreichbar* genannt werden; gibt es eine entsprechende *absteigende* Primendenfolge,

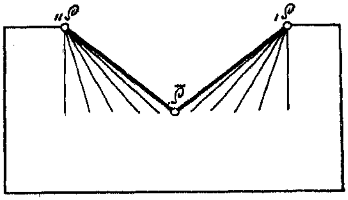

Fig. 2.

so soll ϱ *von links erreichbar* genannt werden. In Figur 2 ist $\bar{\varrho}$ der erreichbare Punkt eines Primendes zweiter Art, ϱ' und ϱ'' sind zwei seiner Nebenpunkte; und zwar ist bei passend gewählter Abbildung auf die reellen Zahlen ϱ' im Primende von rechts, ϱ'' von links erreichbar.

Anmerkung: Ein von rechts oder von links erreichbarer Punkt in einem Primende ist stets ein unendlich vielfacher Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$.

(58). Es sei ϱ ein Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, und $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ sei eine beliebig kleine Umgebung des Punktes ϱ vom Radius r_1. Läßt sich zu jedem r_1 eine Zahl $r_2 > 0$ finden, so daß jeder Punkt ϱ' der Menge $\mathfrak{r}$, der der Umgebung $\mathfrak{U}_2(\varrho)$ vom Radius r_2 angehört, sich mit ϱ verbinden läßt durch eine abgeschlossene zusammenhängende Teilmenge $\mathfrak{t}'$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthalten ist, so wollen wir sagen: *Der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist zusammenhängend im kleinen im Punkte* ϱ [16]).

Ist der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ in jedem seiner Punkte zusammenhängend im kleinen, so wollen wir sagen: *Der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *ist zusammenhängend im kleinen.*

(59). *Ist in einem Punkt* ϱ *des Primendes* P *von* $\mathfrak{G}$ *der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend im kleinen, dann besteht im Punkte* ϱ *von* P *Zusammenhang nach rechts oder Zusammenhang nach links.*

Ist nämlich $\{P^{(\varrho_n)}\}$ irgendeine zum Punkte ϱ gehörige Primendenfolge und ist $\mathfrak{U}(\varrho)$ eine beliebig kleine Umgebung, so müssen, da der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ im Punkte ϱ zusammenhängend im kleinen ist, fast alle Punkte der Folge $\{\varrho_n\}$ sich mit ϱ verbinden lassen durch zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. — Wenn nun die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine aufsteigende Teilfolge enthält, so besteht nach (56) im Punkte ϱ von P Zusammenhang nach rechts; enthält die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine absteigende Teilfolge, so besteht im Punkte ϱ von P Zusammenhang nach links. Einer dieser beiden Fälle muß nach (51) stets eintreten.

(60). Wie später gezeigt werden wird, kann in einem Hauptpunkt eines Primendes nicht erster Art der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen sein; es kann aber in einem Primende nicht erster Art einen Hauptpunkt geben, in dem sowohl Zusammenhang nach rechts als auch Zusammenhang nach links besteht. In Figur 3 ist ϱ ein derartiger Punkt.

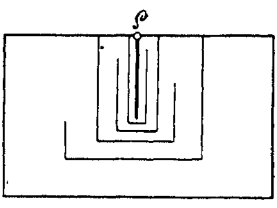

Fig. 3.

(61). Ist $\mathfrak{q}$ ein beliebiger Querschnitt von

[16]) H. Hahn, a. a. O. S. 319 bzw. S. 2434.

$\mathfrak{G}$, so gehört nach (14) jeder Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zum Rande von mindestens einem der beiden durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiete von $\mathfrak{G}$. Ist nun ϱ ein Punkt der Menge $\mathfrak{r}$ und gibt es in jedem durch einen Querschnitt $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{G}$ bestimmten Teilgebiet $\mathfrak{G}'$, in dessen Randmenge der Punkt ϱ enthalten ist, einen Einschnitt mit ϱ als Endpunkt, so soll der Punkt ϱ *allseitig erreichbar*[17]) für $\mathfrak{G}$ genannt werden.

Anmerkung: Ein für $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbarer Punkt kann, wie Beispiele zeigen, einem Primende als nicht erreichbarer Punkt angehören. In Figur 2 sind ϱ' und ϱ'' zwei derartige Punkte.

(62). *Gehört ein für $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbarer Punkt ϱ einem Primende P als nicht erreichbarer Punkt an, so ist der Punkt ϱ in P stets von rechts oder von links erreichbar.*

Weil der Punkt ϱ, falls das Primende P von zweiter Art ist, von dem erreichbaren Punkt von P verschieden sein soll und weil ein Primende dritter oder vierter Art unendlich viele Hauptpunkte enthält, gibt es eine das Primende P definierende Querschnittskette $[\mathfrak{q}_n]$, die gegen einen von ϱ verschiedenen Punkt konvergiert; dabei kann angenommen werden, daß die Endpunkte der Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ sämtlich von ϱ verschieden sind. — Der Punkt ϱ gehört als Punkt des Primendes P zum Rande jedes Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$; weil ϱ allseitig erreichbar ist, muß es daher in jedem Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ einen Einschnitt $\mathfrak{e}_n$ mit ϱ als Endpunkt geben. Da die Endpunkte der Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ sämtlich von ϱ verschieden sind, ist jedem Einschnitt $\mathfrak{e}_n$ mit dem Endpunkt ϱ ein Primende erster oder zweiter Art $P^{(\varrho_n)}$ von $\mathfrak{G}$ zugeordnet, das zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ gehört und in dem der Punkt ϱ als sein erreichbarer Punkt enthalten ist. Jedes Primende $P^{(\varrho_n)}$ muß, da ϱ, falls P von zweiter Art sein sollte, von dem erreichbaren Punkt von P verschieden ist, von P verschieden sein. Die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ ist also gewiß eine zum Punkte ϱ von P gehörige Primendenfolge; dabei sind alle Punkte der Folge $\{\varrho_n\}$ mit ϱ identisch. — Wenn die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine aufsteigende Teilfolge enthält, ist nach (57) der Punkt ϱ von P von rechts erreichbar; enthält die Folge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ eine absteigende Teilfolge, dann ist der Punkt ϱ von P von links erreichbar. Nach (51) muß einer dieser beiden Fälle stets eintreten.

(63). ***Es kann in einem Primende P von $\mathfrak{G}$ höchstens einen Punkt geben, in dem Zusammenhang nach rechts besteht, und höchstens einen Punkt, in dem Zusammenhang nach links besteht.***

Es sei ϱ ein Punkt des Primendes P von $\mathfrak{G}$, in dem etwa Zusammenhang nach rechts besteht, und $\mathfrak{U}(\varrho)$ sei eine beliebig kleine kreisför-

---

[17]) A. Schoenflies, a. a. O. S. 176.

mige Umgebung von ϱ. Dann gibt es nach (56) eine zu ϱ gehörige aufsteigende Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$, so daß jeder Punkt ϱ_n sich mit ϱ verbinden läßt durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{t}_n$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ verläuft. Es kann dabei vorkommen, daß sich alle Mengen $\mathfrak{t}_n$ auf den Punkt ϱ reduzieren. Wir können nun auf Grund der Anmerkung zu (52) die Primendenfolge $\{P^{(\varrho_n)}\}$ so bestimmen, daß in einer das Primende P definierenden Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ das Primende $P^{(\varrho_n)}$ zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ aber nicht zum Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_{n+1}}$ gehört. Wir können nach (50) dem Primende P eine Zahl z, dem Primende $P^{(\varrho_n)}$ eine Zahl z_n, einem der beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden die Zahl a_n so zuordnen, daß für alle n die Ungleichung besteht: $z-1 < a_n < z_n < a_{n+1} < z$. Wir wählen nun zwei beliebige natürliche Zahlen $n_1 < n_2$ und konstruieren in $\mathfrak{G}$ einen Querschnitt $\mathfrak{q}_{n_1,n_2}$, dem die beiden Primenden $P^{(\varrho_{n_1})}$ und $P^{(\varrho_{n_2})}$ zugeordnet sind. Durch den Querschnitt $\mathfrak{q}_{n_1,n_2}$ wird das Gebiet $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete zerlegt, von denen das eine — es sei mit $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ bezeichnet — auf Grund der oben angegebenen Ungleichung alle Primenden desjenigen nach (47) durch den Querschnitt $\mathfrak{q}_{n_1,n_2}$ bestimmten offenen Intervalls von Primenden enthält, das das Primende P ausschließt. Mit $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$ sei das zu $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ komplementäre Teilgebiet von $\mathfrak{G}$ bezeichnet. Das Primende P gehört dann zum Gebiet $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$. Nach Voraussetzung lassen sich die beiden Punkte ϱ_{n_1} und ϱ_{n_2} mit ϱ verbinden durch zwei Teilmengen $\mathfrak{t}_{n_1}$ und $\mathfrak{t}_{n_2}$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Die Vereinigung $\mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ ist eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge des Randes $\mathfrak{r}$, die die beiden Endpunkte ϱ_{n_1} und ϱ_{n_2} des Querschnitts $\mathfrak{q}_{n_1,n_2}$ enthält; die Menge $\mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ kann sich unter Umständen, falls $\varrho_{n_1} = \varrho_{n_2} = \varrho$ ist, auf den Punkt ϱ reduzieren. Wir betrachten nun nach (16) die Menge $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1,n_2}$ aller nicht in der Menge $\mathfrak{q}_{n_1,n_2} \dotplus \mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ enthaltenen Punkte der Ebene, die mit einem Punkt γ' von $\mathfrak{G}'_{n_1,n_2}$ verbunden werden können, durch einen zur Menge $\mathfrak{q}_{n_1,n_2} \dotplus \mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ fremden Streckenzug. Nach (16) und (17) ist die Menge $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1,n_2}$ ein zum Gebiet $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$ fremdes Gebiet, das keinen Randpunkt von $\mathfrak{G}''_{n_1,n_2}$, also auch keinen Punkt des Primendes P, enthält.

Aus dieser Tatsache läßt sich nun leicht folgern, daß der Punkt ϱ der einzige Punkt im Primende P ist, in dem Zusammenhang nach rechts besteht. Angenommen nämlich, es gebe im Primende P noch einen weiteren Punkt ϱ' dieser Art. Wir wählen zwei zueinander fremde Umgebungen $\mathfrak{U}(\varrho)$ und $\mathfrak{U}(\varrho')$. $\{P^{(\varrho'_m)}\}$ sei eine zum Punkt ϱ' von P gehörige aufsteigende Primendenfolge derart, daß jeder Punkt ϱ'_m in $\mathfrak{U}(\varrho')$ mit ϱ' verbunden werden kann durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{t}'_m$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Es lassen sich nun die Zahlen m, n_1, n_2

so wählen, daß die dem Primende $P^{(\varrho'_m)}$ zugeordnete Zahl z'_m der Ungleichung genügt $z-1 < z_{n_1} < z'_m < z_{n_2} < z$, während die im vorigen mit $\mathfrak{t}_{n_1}$ und $\mathfrak{t}_{n_2}$ bezeichneten Mengen in der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Das Primende $P^{(\varrho'_m)}$ gehört dann zu dem mit $\mathfrak{G}'_{n_1, n_2}$ bezeichneten Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Die Teilmenge $\mathfrak{t}'_m$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{U}(\varrho')$ ist zum Querschnitt $\mathfrak{q}_{n_1, n_2}$ und zur Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$, also auch zu der in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthaltenen Vereinigung $\mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ fremd. Der Punkt ϱ'_m ist also nicht in der Menge $\mathfrak{q}_{n_1, n_2} \dotplus \mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ enthalten; andrerseits gehört der Punkt ϱ'_m, als Punkt des Primendes $P^{(\varrho'_m)}$ zum Rande des Gebietes $\mathfrak{G}'_{n_1, n_2}$. Nach (17) ist daher ϱ'_m ein Punkt des Gebietes $\mathfrak{G}_{n_1, n_2}$. Da ϱ'_m mit ϱ' verbunden ist durch das zu $\mathfrak{q}_{n_1, n_2} \dotplus \mathfrak{t}_{n_1} \dotplus \mathfrak{t}_{n_2}$ und mithin nach (17) auch zum Rande von $\mathfrak{G}_{n_1, n_2}$ fremde Kontinuum $\mathfrak{t}'_m$, müßte dann auch ϱ' zu $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$ gehören. Diese Folgerung steht nun im Widerspruch zu der oben bewiesenen Tatsache, daß das Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}_{n_1, n_2}$ keinen Punkt des Primendes P enthält. Unsere Annahme, daß es im Primende P außer ϱ noch einen zweiten Punkt ϱ' gebe, in dem Zusammenhang nach rechts besteht, war falsch; und die Behauptung ist bewiesen.

(64). Im vorigen ist auch der Satz enthalten: *Es kann in einem Primende höchstens einen Punkt geben, der von rechts erreichbar ist, und höchstens einen Punkt, der von links erreichbar ist.*

(65). *Es kann in einem Primende P höchstens zwei Punkte geben, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist.*

Es muß nämlich nach (59) in jedem Punkt, in dem der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist, sei es Zusammenhang nach rechts, sei es Zusammenhang nach links bestehen. Daher ist nach (63) unsere Behauptung bewiesen.

Daß es in einem Primende wirklich zwei Punkte geben kann, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist, zeigt Fig. 2: ϱ' und ϱ'' sind zwei Punkte dieser Art.

(66). *In einem Primende zweiter Art können höchstens drei allseitig erreichbare Punkte enthalten sein.*

Sind nämlich außer dem erreichbaren Punkt des Primendes P in P noch weitere allseitig erreichbare Punkte enthalten, so muß nach (62) jeder von diesen, sei es von rechts, sei es von links erreichbar sein. Daher ist nach (64) unsere Behauptung bewiesen.

Es ist damit auch weiter gezeigt, daß, wenn in einem Primende zweiter Art drei allseitig erreichbare Punkte enthalten sind, einer von diesen der erreichbare Punkt, der andere von rechts, der andere von links erreichbar sein muß.

Daß es in einem Primende zweiter Art wirklich drei allseitig erreichbare Punkte geben kann, zeigt wiederum Fig. 2: $\bar{\varrho}$, ϱ', ϱ'' sind drei allseitig erreichbare Punkte.

(67). Eine entsprechende Überlegung zeigt, *daß es in einem Primende dritter oder vierter Art höchstens zwei allseitig erreichbare Punkte geben kann.* Gibt es deren zwei, so muß der eine von rechts, der andere von links erreichbar sein.

(68). Daraus folgern wir, *daß es in einem Primende nicht erster Art unendlich viele Punkte gibt, die nicht allseitig erreichbar sind.*

(69). *Ist in dem Hauptpunkt ϱ eines Primendes P von $\mathfrak{G}$ der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen, so ist das Primende P von erster Art.*

Es sei $[\mathfrak{q}_n]$ eine Querschnittskette, die das Primende P definiert und gegen den Punkt ϱ konvergiert. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$ das zu $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ komplementäre Teilgebiet von $\mathfrak{G}$. Wir können dann eine Umgebung $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ so klein wählen, daß außerhalb $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ noch Punkte des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_1}$ liegen. Dann liegen auf Grund der Beziehung $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_1} < \mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_2} < \ldots < \mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n} < \ldots$ außerhalb $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ Punkte von allen Gebieten $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, und jede in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltene Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ hat die gleiche Eigenschaft. Es seien nun $P^{(\varrho_n^{(1)})}$ und $P^{(\varrho_n^{(2)})}$ die beiden dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordneten Primenden mit den erreichbaren Punkten $\varrho_n^{(1)}$ und $\varrho_n^{(2)}$. Da nach Voraussetzung der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ im Punkte ϱ zusammenhängend im kleinen ist, so gibt es zu jeder Umgebung des Punktes ϱ, also auch zu jeder in $\mathfrak{U}_1(\varrho)$ enthaltenen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ eine Zahl n, so daß $\varrho_n^{(1)}$ und $\varrho_n^{(2)}$ sich in $\mathfrak{U}(\varrho)$ mit ϱ verbinden lassen durch zwei zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen $\mathfrak{t}_n^{(1)}$ und $\mathfrak{t}_n^{(2)}$ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Wir denken uns nach (16) das zu $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$ fremde Gebiet $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ bestimmt, dem alle Punkte der Ebene angehören, die mit einem Punkt γ aus $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ verbunden werden können durch einen zur Menge $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ fremden Streckenzug. In $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ sind dann alle Punkte von $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten. — Es sei nun dem Rande $\mathfrak{k}$ der kreisförmigen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ ein Polygon $\mathfrak{p}$ einbeschrieben, das in seinem Innern $\mathfrak{P}$ alle Punkte der Menge $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ enthält.

Wir behaupten, daß das Gebiet $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ in $\mathfrak{P}$ enthalten ist: Da der Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ ganz in $\mathfrak{P}$ verläuft, gibt es in $\mathfrak{P}$ gewiß Punkte des Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$, daher auch von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$, es wird also bewiesen sein, daß $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ ganz in $\mathfrak{P}$ liegt, wenn $\mathfrak{p}$ keinen Punkt von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ enthält. Es gibt nun, da $\mathfrak{q}_n$ in $\mathfrak{P}$ verläuft, in $\mathfrak{P}$ gewiß Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$; ferner liegen nach Annahme außerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$, daher auch im Äußeren des Polygons $\mathfrak{p}$, Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, d. h. $\mathfrak{p}$ selbst enthält Punkte von $\mathfrak{G}'_{\mathfrak{q}_n}$, also Punkte, die nicht zu $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ gehören; da andrerseits die Menge $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{q}_n + \mathfrak{t}_n^{(1)} + \mathfrak{t}_n^{(2)}$ fremd ist, kann auf Grund der Definition des Gebietes $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ in der Menge $\mathfrak{p}$ überhaupt kein Punkt von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten sein, wie behauptet war. Das Gebiet $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}_{\mathfrak{q}_n}$ ist also in $\mathfrak{P}$ und damit in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten; dasselbe gilt für das Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$, das einen Teil des Gebietes $\overline{\mathfrak{G}}_{\mathfrak{q}_n}$ bildet.

Es gibt demnach zu jeder beliebig kleinen Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ ein Gebiet der Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$, das ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten ist; d. h. nach (19) die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ konvergiert gegen den Punkt ϱ. Das Primende P ist also von erster Art, wie behauptet war.

(70). Wir können den vorigen Satz auch in folgender Form aussprechen: *In einem Hauptpunkt eines Primendes nicht erster Art von $\mathfrak{G}$ kann der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen sein.*

(71). *Jeder Punkt ϱ des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist allseitig erreichbar dann und nur dann, wenn alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind.*

(a). Es sei bekannt, daß jeder Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ allseitig erreichbar ist. Nach (68) kann es dann in $\mathfrak{G}$ kein Primende nicht erster Art geben.

(b). Es sei bekannt, daß alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind. Dann sei ϱ ein beliebiger Punkt des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Wir haben folgendes zu zeigen: Konstruiert man in $\mathfrak{G}$ einen beliebigen Querschnitt $\mathfrak{q}$ und gehört ϱ etwa zum Rande des durch $\mathfrak{q}$ bestimmten Teilgebiets $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$, so ist der Punkt ϱ für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Es seien ϱ_1 und ϱ_2 die Endpunkte des Querschnittes $\mathfrak{q}$; $\mathfrak{r}'$ sei der Rand von $\mathfrak{G}'$. Alle Primenden von $\mathfrak{G}$ sind von erster Art; daher ist jeder von ϱ_1 und ϱ_2 verschiedene Punkt ϱ des Durchschnitts $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}'$ in einem Primende erster Art von $\mathfrak{G}$ enthalten, das zu $\mathfrak{G}'$ gehört; jeder derartige Punkt ϱ ist also für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Ist ϱ einer der beiden Endpunkte von $\mathfrak{q}$, so ist ϱ in einem dem Querschnitt $\mathfrak{q}$ zugeordneten Primende P von $\mathfrak{G}$ enthalten, das nach Voraussetzung von erster Art ist. Jede das Primende P definierende Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$ konvergiert also gegen den Endpunkt ϱ von $\mathfrak{q}$; wir können uns dabei die Querschnitte $\mathfrak{q}_n$ so konstruiert denken, daß jeder von ihnen den Querschnitt $\mathfrak{q}$ in einem einzigen Punkt durchsetzt. Der Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ wird dabei in zwei Teilmengen zerlegt, von denen die eine — $\mathfrak{q}'_n$ — ein Querschnitt von $\mathfrak{G}'$ ist; alle Querschnitte $\mathfrak{q}'_n$ bestimmen in $\mathfrak{G}'$ eine Querschnittskette $[\mathfrak{q}'_n]$, die gegen ϱ konvergiert, wobei, wie man unmittelbar einsieht, jedes Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}'_n}$ in dem entsprechenden Gebiet $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten ist; d. h. die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}'_n}]$ konvergiert auch gegen den Punkt ϱ, definiert also ein Primende erster Art von $\mathfrak{G}'$, das den Punkt ϱ enthält. Der Endpunkt ϱ des Querschnitts $\mathfrak{q}$ ist also auch für das Gebiet $\mathfrak{G}'$ erreichbar. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

(72). *Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ ist zusammenhängend im kleinen dann und nur dann, wenn alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind.*

(a). Es sei bekannt, daß der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ zusammenhängend im kleinen ist. Da es nach (65) in jedem Primende nicht erster Art Punkte gibt, in denen der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen ist, müssen alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sein.

(b). Es sei bekannt, daß alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind. Angenommen, es gebe dann einen Punkt ϱ von $\mathfrak{r}$, in dem der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen wäre; d. h. es gebe eine Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ und eine Punktfolge $\{\varrho_m\}$ in $\mathfrak{r}$, die gegen ϱ konvergiert, wobei jeder Punkt ϱ_m mit ϱ nur verbunden werden könnte durch eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{r}$, die Punkte außerhalb der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthält. Jeder Punkt ϱ_m ist nach (24) in einem Primende $P^{(m)}$ von $\mathfrak{G}$ enthalten. Nach (45) gibt es in der Menge aller dieser Primenden $P^{(m)}$ eine Folge — sie sei mit $\{\overline{P}^{(m)}\}$ bezeichnet —, die gegen ein Primende P von $\mathfrak{G}$ konvergiert. Ist $[\mathfrak{q}_n]$ eine das Primende P definierende Querschnittskette, so konvergiert die Gebietskette $[\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}]$, da das Primende P von erster Art ist, gegen den im Primende P enthaltenen Punkt. Ist $\bar{\varrho}_m$ der im Primende $\overline{P}^{(m)}$ enthaltene Punkt unsrer Folge $\{\varrho_m\}$, so sind fast alle Punkte $\bar{\varrho}_m$ in der Randmenge $\mathfrak{r}_n$ jedes Gebietes $\mathfrak{G}_{\mathfrak{q}_n}$ enthalten. Der Grenzpunkt ϱ der Folge $\{\bar{\varrho}_m\}$ ist also mit dem im Primende P enthaltenen Punkt identisch. Wir betrachten nun dasjenige der beiden durch den Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ bestimmten abgeschlossenen Intervalle von Primenden, das das Primende P enthält. Die Vereinigung $\mathfrak{i}_n$ aller in den Primenden dieses Intervalls enthaltenen Punktmengen ist, da alle Primenden von $\mathfrak{G}$ von erster Art sind, mit dem Durchschnitt $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ identisch[18]. Nach (49) ist also die Menge $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ eine zusammenhängende abgeschlossene Teilmenge des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$. Jede Menge $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ enthält fast alle Punkte der Folge $\{\bar{\varrho}_m\}$, und fast alle Mengen $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ sind in der Umgebung $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten; d. h. es lassen sich entgegen unserer Annahme unendlich viele Punkte der Folge $\{\varrho_m\}$ mit ϱ verbinden durch zusammenhängende abgeschlossene Teilmengen des Randes $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$, die ganz in $\mathfrak{U}(\varrho)$ enthalten sind. Unsere Annahme, daß im Punkte ϱ der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ nicht zusammenhängend im kleinen ist, war also falsch. Der Rand $\mathfrak{r}$ von $\mathfrak{G}$ muß zusammenhängend im kleinen sein.

(73). Nach (71) und (72) ist *jeder Punkt des Randes* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *allseitig erreichbar dann und nur dann, wenn der Rand* $\mathfrak{r}$ *von* $\mathfrak{G}$ *zusammenhängend im kleinen ist.*

(74). Sowohl A. Schoenflies[19]) als H. Hahn[20]) haben notwendige

[18]) Die Identität der beiden Mengen $\mathfrak{i}_n$ und $\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_n$ wäre nämlich nur dann nicht ohne weiteres gesichert, falls ein dem Querschnitt $\mathfrak{q}_n$ zugeordnetes Primende etwa von nicht erster Art wäre.

[19]) A. a. O. S. 237.

[20]) A. a. O. S. 2455.

und hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß eine ebene Punktmenge eine *stetige Kurve* (d. h. stetiges Bild einer abgeschlossenen Strecke) sei. Die Bedingungen von Schoenflies ergeben:

Damit der Rand des Gebietes 𝔊 eine stetige Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß jeder seiner Punkte für 𝔊 allseitig erreichbar sei.

Die Bedingungen von Hahn ergeben:

Damit der Rand des Gebietes 𝔊 eine stetige Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß er zusammenhängend im kleinen sei.

Durch (73) ist die Äquivalenz dieser beiden Bedingungen direkt nachgewiesen. Aus (71) oder (72) folgt, daß die Bedingung auch so ausgesprochen werden kann:

Damit der Rand des Gebietes 𝔊 eine stetige Kurve sei, ist notwendig und hinreichend, daß er nur aus Primenden erster Art bestehe.

(Eingegangen am 23. Januar 1920.)