

darf man keine Skrupeln verraten oder erwecken, wie es geschieht, wenn man als Berechtigungsgrund für eine Winkeldefinition den Umstand betont, daß bei ihr aus $a > b$ umgekehrt $b < a$ folgt (S. 76—78); oder wenn man für die dem Instinkt evidente Einteilung der Lagebeziehungen zweier Kreise Kongruenzgründe zitiert (S. 61, 62, 93). Gerade in einer Vorschule der Geometrie sollten nur solche Merkmale der Gebilde erwähnt werden, die dem Schüler schon in der Praxis als unterscheidend aufgefallen sind: Der Satz „Zwei Größen, die einer dritten gleich ...“ dürfte nicht ausgesprochen werden, wenn kein Größensystem zur Verfügung steht, für das er nicht gilt, sondern wäre als selbstverständlich stillschweigend zu verwenden; dasselbe gilt für die übrigen Größensätze auf S. 40; daß Kongruenz und Gleichheit nicht dasselbe ist, kann erst an Beispielen, bei denen jede von beiden allein stattfinden kann, begriffen werden (S. 60); die allgemeinen räumlichen Lagebeziehungen (S. 27—29) wären als Abstraktionen aus langer konstruktiver Erfahrung, nicht aus den ersten Betrachtungen zu formulieren usw. Hingegen sollte Eulers Polyedersatz, der gelegentlich auch ein Kind an einem einfachen Beispiel als nicht unbedingt gültig nachweisen könnte, nicht apodiktisch ausgesprochen werden (S. 114). In einer Beziehung, glaubt der Referent, muß auch ein vorbereitender Kurs an Präzision gewöhnen, nämlich in der Sprache, und in dieser dürfte hier viel zu wünschen übrig sein: man findet „senkrecht“ für „vertikal“, „Fläche“ für „Ebene“, „Gerade“ für „Strecke“, „Schnittpunkt“ und „Seiten“ eines Winkels für „Scheitel“ und „Schenkel“; außerdem Erklärungen wie „Tetraëder“ von tetra (vier) und hedron (Ecke), Oktaëder = Achteck usw. — Unter den Aufgaben sind viele originell und fast alle interessant; manche allerdings sind zu schwer, weil sie den Beweis anscheinend selbstverständlicher Tatsachen fordern (z. B. S. 224, Nr. 64 ff.: S. 90) andere, weil der Lehrstoff des Buches zu ihrer Lösung kaum hinreicht (z. B. S. 223 Nr. 102 u. 103), wieder andere erscheinen durch Druckfehler schwer verständlich geworden zu sein (z. B. S. 207, Nr. 3; S. 221ff.; Nr. 44, 48, 81, 106, 109). F.

Lehrbuch der Algebra von Heinrich Weber, Prof. der Mathem. a. d. Universität Straßburg, 3. Band: Elliptische Funktionen und Algebraische Zahlen. 2. Auflage. Braunschweig (Friedr. Vieweg u. Sohn), 1908, XVI + 733 Seiten.

Die ausgezeichneten Dienste, welche H. Webers „Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen“, die hiemit in der 2. Auflage als dritter Band seines Lehrbuches in Algebra erscheinen, den Mathematikern geleistet, haben das Werk so allgemein bekannt und unentbehrlich gemacht, daß wir eine eingehende Besprechung des Inhaltes unterlassen können. Wir können uns mit der Angabe der Änderungen und Ergänzungen begnügen, welche das Buch in der zweiten Auflage erfahren hat und die dadurch veranlaßt wurden, daß dasselbe unter dem neuen Titel noch ausgesprochener algebraische Zwecke verfolgt, somit der zahlentheoretische Teil noch betonter erscheint. Dies war der Grund, warum die beiden Beispiele der Anwendung elliptischer Integrale und Funktionen: die Bestimmung der Oberfläche eines Ellipsoides und die Rotation eines freien starren Körpers weggelassen wurden. Hingegen mußte der analytische Teil, das erste Buch, obwohl die Verknüpfung mit der Algebra hier noch weniger hervortritt, vollständig beibehalten werden, so daß das Werk

gleichzeitig als eine treffliche Darstellung der Theorie der Elliptischen Integrale und Funktionen und insbesondere als ein ausgezeichnetes Nachschlagebuch über die Θ -Funktionen und ihre Transformation bildet. Der erste Abschnitt wurde durch Hinzufügen zweier Paragrafen über die Kurven 3. Ordnung und die elliptischen Raumkurven erweitert und die Entstehung doppelperiodischer Funktionen aus den Elliptischen Integralen an der Hand des Additionstheorems genauer begründet. Die sieben Abschnitte (2—8 S. 53—317) über die Θ -Funktionen, Transformation der Θ -Funktionen, die elliptischen Funktionen, die Modul-Funktionen, Multiplikation und Teilung der elliptischen Funktionen, Theorie der Transformationsgleichungen, die Gruppe der Transformationsgleichungen und die Gleichungen 5. Grades sind wesentlich un geändert geblieben. In der ersten Auflage mußte ein Abschnitt eingeschaltet werden, welcher die nötigen Hilfsmittel aus der Theorie der algebraischen Gleichungen in knapper Form bereitstellte; hier konnte dies vollständig weggelassen, weil die entsprechenden Theoreme bereits im 1. und 2. Bande eingehend besprochen wurden. Dagegen entspricht es dem Sinne des Werkes, daß ein „zweites Buch“ eingeschaltet wurde, worin der quadratische Zahlkörper, gleichsam als ein einfachstes, aber am besten durchforschtes Beispiel für die allgemeine Theorie algebraischer Zahlkörper des 2. Bandes, eingehend dargestellt wird. Die einzelnen Abschnitte (9—16, Seite 321—410) tragen die Überschriften: Diskriminante, algebraische Zahlen und Formen, Ideale in quadratischen Körpern, Ordnungen im quadratischen Körper, Äquivalenz nach Zahlgruppen, Komposition der Formen und Ideale, Geschlechter der quadratischen Formen, Klassenzahl in quadratischen Körpern. Das 90 Seiten starke Buch ist also eine eingehende und systematische Darstellung dieses zahlentheoretisch so lehrreichen Kapitels.

Das dritte Buch, welches von der komplexen Multiplikation der elliptischen Funktionen handelt, hat keine wesentliche Änderung erfahren. Die einzelnen Abschnitte (17—22, Seite 413—560) lauten: Elliptische Funktionen und quadratische Formen, Galois'sche Gruppe der Klassengleichung, Berechnung der Klasseninvarianten, die Multiplikatorgleichung in der komplexen Multiplikation, die Normen der Klasseninvariante $f(\omega)$, Cayleys Entwicklung der Modul-funktionen.

Das 5. Buch (23. Abschn., S. 563—620) ist der Untersuchung des Klassenkörpers in der komplexen Teilung gewidmet und bedeutet der 1. Auflage gegenüber einen Zuwachs. Die Koeffizienten der komplexen Multiplikationsformeln liegen im „Klassenkörper“, d. h. sie sind rationale Funktionen der Quadratwurzeln aus einer negativen ganzzahligen Diskriminante und der singulären absoluten Invariante, deren Berechnung bereits im 4. Buche entwickelt wurde. Die Teilungsgleichungen zeigen jetzt, daß die Werte der elliptischen Funktionen für komplex geteilte singuläre Perioden selbst algebraische Zahlen sind und einen „Teilungskörper“ bestimmen, der über dem Klassenkörper Abelsch ist. Es zeigt sich, daß nicht nur wirklichen komplexen Divisoren Teilungsgleichungen entsprechen, sondern jedem Idealeiler m ; diese Teilungsgleichungen ergeben sich als größte gemeinsame Masse von Teilungsgleichungen, deren komplexe Divisoren genau m als größten gemeinsamen Idealeiler besitzen. In diesen Körpern herrschen einfache und bemerkenswerte Zerlegungsgesetze für Primzahlen des zugrunde liegenden quadratischen Zahlkörpers

Aus diesen Beziehungen werden interessante Sätze über die Verteilung von Primidealen in Zahlgruppen nach Idealteilern gewonnen, analog den Sätzen über Primzahlen in arithmetischen Reihen.

Im 5. Buch (S. 623—707) gibt der Verfasser auf mehrfachen Wunsch einen Abriß seiner Theorie der algebraischen Funktionen auf rein arithmetischer Grundlage. Den Hauptpunkt der Theorie bildet die Darstellung der Funktionen durch eine Basis, insbesondere die Minimalbasis, die jede ganze Funktion des Körpers mit ganzen rationalen Koeffizienten linear darstellt. Die Diskriminante dieser Basis ist eine reine Körperinvariante. Die Potenzreihenentwickelungen algebraischer Funktionen für einen bestimmten Wert der Variablen finden hier ihr Bild in einer arithmetisch definierten Zerlegung rationaler Funktionen in ideale Primfaktoren, wozu der Begriff des Funktionals herangezogen wird, mit einem ähnlichen Zweck und Erfolg wie im 2. Bande des Algebra zur Definition der Idealzahlen. Auf dieser Grundlage ergibt sich eine rein arithmetische Definition des Punktes und der Riemannschen Fläche, die nur vom Körper abhängt. Die Bestimmung der Differentiale erster Gattung geschieht durch Aufstellung einer Basis, die zur Minimalbasis invers ist „so daß also durch Komposition der beiden Matrizen die Einheitsmatrix folgt.“ Die neue Basis erzeugt linear genau eine dem Geschlechte gleiche Anzahl unabhängiger Differentiale der 1. Gattung. Der Riemann-Rochsche Satz und der Nachweis von genau $2p$ linear unabhängigen Integralen der zweiten Gattung bilden den Abschluß der Theorie. Weiter führt die rein arithmetische Methode nicht, denn die Definition des Integrals erfordert Grenzprozesse. Diese Theorie hat vor den anderen mehr geometrischen und funktionentheoretischen Methoden den Vorzug, keine Spezialfälle, die z. B. durch die Lage der Asymptoten, mehrfachen Punkten usw. herbeigeführt werden, erledigen zu müssen; es ist aber natürlich, daß eine Begründung, bei der auf die Reinheit der Methode das Hauptgewicht gelegt wird, in Kürze und Anschaulichkeit mit den anderen nicht wettstreiten kann.

Dem Buche sind 5 Tafeln über die verschiedenen Entwickelungen der θ -Quotienten und der elliptischen Funktionen sowie eine Tafel der Klasseninvarianten beigelegt.

Daß das Werk an Kürze und Schönheit der Darstellung bei gleichzeitiger Klarheit alle Vorzüge hat, ist bei einem Buch, das H. Weber zum Verfasser hat, selbstverständlich. Durch Herausgabe dieser zweiten Auflage wird der Verfasser sein Verdienst, eine Disziplin, in welcher die tiefsten und schönsten Sätze der Zahlentheorie, Algebra und Funktionentheorie zu gleichen Teilen in herrlichster Verknüpfung partizipieren und zu deren Entwicklung er selbst einen guten Teil beigetragen hat, in weitere Kreise getragen zu haben, nur noch vermehren.

J. P.

Vorlesungen über lineare Differentialgleichungen von Ludwig Schlesinger. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1908. X + 334 Seiten.

Es gibt heutzutage mehrere vorzügliche Darstellungen der auf Riemann und Fuchs zurückgehenden analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen. Um nicht zu diesen noch eine weitere hinzuzufügen, hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, die Theorie auf neuer Grundlage aufzu-