

Ueber die uneigentlichen Geraden und Ebenen.

(Auszug aus einem Schreiben an Herrn V. Reyes y Prosper).

Von

M. PASCH in Giessen.

Sie beweisen*) auf denkbar einfachste Art den Satz: Wenn die Strahlen $\alpha \beta \gamma \alpha' \beta' \gamma'$ durch einen eigentlichen Punkt laufen und die Ebenen $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ sich in einer Geraden schneiden, so sind die Schnittlinien der Ebenen $\beta\gamma$ und $\beta'\gamma'$, $\gamma\alpha$ und $\gamma'\alpha'$, $\alpha\beta$ und $\alpha'\beta'$ in einer Ebene enthalten.

Die Betrachtungen, mittels deren ich in meinen „Vorlesungen über neuere Geometrie“ die uneigentlichen Geraden und Ebenen eingeführt habe, werden nun erheblich vereinfacht, wenn man Ihren Beweis vorausschickt.

Nachdem nämlich in § 6 die uneigentlichen Punkte eingeführt sind, werden in § 7 behufs Einführung der uneigentlichen Geraden drei beliebige, zu zwei Ebenen P und Q zugleich gehörige Punkte A, B, C und ein eigentlicher, zu keiner dieser beiden Ebenen gehöriger Punkt F angenommen. Es soll bewiesen werden, dass die Punkte $ABCF$ in einer Ebene liegen.

Construirt man Figur 13, wie in dem Buche angegeben, wobei man jetzt den Punkt K ausserhalb der Ebenen $F\beta\gamma$, $F\gamma\alpha$, $F\alpha\beta$ wählen wird, so liegen auf der Ebene P die Punkte abc und auf der Ebene Q die Punkte $\alpha\beta\gamma$ derart, dass sich die Geraden $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ in dem Punkte K , die Geraden bc und $\beta\gamma$ in A , ca und $\gamma\alpha$ in B , ab und $\alpha\beta$ in C begegnen. Betrachtet man also das Bündel der Strahlen Fa , Fb , Fc , $F\alpha$, $F\beta$, $F\gamma$, so schneiden sich die Ebenen $Fa\alpha$, $Fb\beta$, $Fc\gamma$ in der Geraden FK , die Ebenen Fbc und $F\beta\gamma$ in FA , Fca und $F\gamma\alpha$ in FB , Fab und $F\alpha\beta$ in FC , und mithin fallen die Strahlen FA , FB , FC in eine Ebene.

Nachdem hierdurch der Begriff der uneigentlichen Geraden gewonnen ist, werden behufs Einführung der uneigentlichen Ebene in § 8 vier Punkte $BCDE$, von denen keine drei in gerader Linie liegen, so angenommen, dass die Geraden BD und CE sich in einem Punkte A

*) Vergl. die voranstehende Note des Herrn Reyes y Prosper.

begegnen. Es ist zu beweisen, dass auch die Geraden BC und DE einen Punkt gemein haben.

Zu dem Ende benutze ich irgend eine Ebene P , welche keinen der Punkte $ABCDE$ enthält, und einen eigentlichen Punkt K ausserhalb P ; der Fall, wo die Punkte $ABCK$ in einer Ebene liegen, bleibt ausser Betracht. Die Ebene P trifft die Strahlen KA, KB, KC, KD, KE bezw. in Punkten a, b, c, d, e derart, dass von den Punkten $bcde$ keine drei in gerader Linie liegen, aber die Geraden bd und ce sich in a begegnen; den Schnittpunkt der Geraden bc und de nenne ich f . Ich nehme ferner ausserhalb der Ebenen P, KAB, KAC, KBC, KDE irgend einen eigentlichen Punkt L ; von dem Falle, wo die Punkte $ABCL$ einer Ebene angehören, ist wieder abzusehen. Den Schnittpunkt der Geraden BC mit der Ebene LDE nenne ich F und betrachte nunmehr das Bündel der Strahlen, welche L mit $A, B, C, D, E, F, a, b, c, d, e, f$ verbinden.

Die Ebenen LaA, LbB, LcC gehen durch die Gerade LK , ebenso die Ebenen LdD, LeE . Folglich schneiden sich die Ebenen Lbc und LbC, Lca und LCA, Lab und LAB in drei Strahlen eines Büschels, ebenso die Ebenen $Lad (Lab)$ und $LAD (LAB), Lae (Lac)$ und $LAE (LAC), Lde$ und LDE . Begegnet also die Gerade bc der Ebene LBC etwa in g , die Gerade de der Ebene LDE etwa in h , so schneiden sich die Ebenen $Lab (Lbd)$ und $LAB (LBD)$ auf der Ebene Lgh , d. h. die Ebenen Lgh, Lbd, LBD laufen durch eine Gerade. Daraus folgt aber weiter, dass die Schnitte der Ebenen LbB und $LdD, LgB (LBF)$ und $LhD (LDF), Lgb (Lbf)$ und $Lhd (Ldf)$, also die Strahlen LK, LF, Lf in eine Ebene fallen, d. h. dass die Strahlen Kf, LF und mithin die Ebenen KBC, KDE, LBC, LDE einen Punkt (F) gemein haben. Durch diesen Punkt laufen die Geraden BC und DE .

Giessen, 4. April 1888.