

In der Abbildung ist die Grenzkurve  $G_v$  für  $x_v = +\frac{1}{3} i_x$  eingezeichnet. Die Abszisse des Schnittpunktes  $T$  der Asymptoten  $f(x_v) = -\frac{(n-1)(i_x^2 + x_v^2)}{i_x^2 + (n-1)x_v^2} x_v$  ist (vergl. Gl. (67)), da  $n = 10$ ,  $f(x_v) = -\frac{5}{3} i_x$ .

Die zentrale Grenzkurve  $G_0$  hat die Gleichung

$$\bar{i}_y^2 x^4 - (n-2) i_x^2 x^2 \bar{y}^2 + 3n i_x^2 \bar{i}_y^2 x^2 - n(n-2) i_x^4 \bar{y}^2 + (n+1)(2n-1) i_x^4 \bar{i}_y^2 = 0 \quad (68^*).$$

Die Abschnitte der mittleren Fehlerhyperbel, der Äquivalenzhyperbel und der zentralen Grenzkurve auf der Ordinatenachse (der letztgenannte stimmt überein mit jenem der Äquipräzisionskurve) sind der Reihe nach

$$\pm \frac{\bar{i}_y}{\sqrt{n-2}}, \quad \pm \sqrt{\frac{n+1}{n-2}} \bar{i}_y, \quad \pm \sqrt{\frac{(n+1)(2n-1)}{n(n-2)}} \bar{i}_y \quad (71^*).$$

Das ist im Fall  $n = 10$  wie in der Abbildung

$$\pm 0,354 \bar{i}_y, \quad \pm 1,173 \bar{i}_y, \quad \pm 1,616 \bar{i}_y.$$

Die Gleichung der »Äquipräzisionskurve« lautet

$$\bar{y}^2 = \frac{\bar{i}_y^2}{n(n-2)i_x^4} \left\{ (n-1)x^4 + (n^2 + 2n - 2)i_x^2 x^2 + (n+1)(2n-1)i_x^4 \right\} \quad (74^*)$$

und die der beiden Parabeln, die ihre asymptotischen Kurven bilden,

$$\bar{Y} = \pm \sqrt{\frac{n-1}{n(n-2)}} \bar{i}_y \left\{ \frac{n^2 + 2n - 2}{2(n-1)} + \frac{x^2}{i_x^2} \right\} \quad (75^*).$$

Die Abschnitte dieser beiden Parabeln auf der Ordinatenachse sind für  $n = 10$  (Abbildung)  $\pm 2,199 \bar{i}_y$ .

Auch bei »bedingten Beobachtungen« können analoge Untersuchungen angestellt werden, wie es hier für »direkte« und in dem wichtigsten Fall »vermittelnder« Beobachtungen geschehen ist. Doch gelangt man da schon bei den einfachsten Problemen nicht mehr zu leicht durchblickbaren Ergebnissen.

174

Wien, im April 1922.

## ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

### Neuere Integraphen.

Von A. GALLE in Potsdam.

Die Instrumente, welche Integrationen ausführen, zerfallen in zwei Klassen. Beiden gemeinsam ist, daß die zu integrierende Funktion aufgezeichnet vorliegt. Bei den Kurvenmessern, Planimetern, Analysatoren wird das Ergebnis an einer Registriervorrichtung, etwa an einer Skala oder an der Zeigerstellung einer Zählsscheibe abgelesen. Sie dienen dazu, bestimmte Integrale zwischen gegebenen Grenzen zu ermitteln. Sollen dagegen unbestimmte Integrationen ausgeführt werden, so muß auch das Resultat graphisch dargestellt werden. Die Instrumente, die dazu dienen, nennt man Integraphen.

Das Prinzip eines Integraphen hat bereits Coriolis 1836 angegeben, Zmurko (1861), J. Thomson und Cayley (1876) haben sich damit beschäftigt, 1878 haben dann Abdank-Abakanowicz und ziemlich gleichzeitig Boys Integraphen konstruiert. Das Instrument von Abdank-Abakanowicz ist aber erst in der Gestalt, die ihm Coradi in Zürich gegeben hat, in allgemeineren Gebrauch gekommen.

Ganz neue Gesichtspunkte hat Professor Ernst Pascal in Neapel für die Konstruktion von Integraphen aufgestellt. Hierbei handelte es sich noch besonders um die Integration von Differentialgleichungen<sup>1)</sup>. Es gelang ihm nicht nur, verschiedene Instru-

<sup>1)</sup> Außer Lord Kelvin (1876) haben Torris (1895), Petrowitsch (1897) und L. Jacob (1911) Apparate für diesen Zweck konstruiert.

mente zu erfinden, die besonders Problemen angepaßt waren, sondern auch einzelnen Instrumenten Einrichtungen zu geben, die sie zur Lösung ganz verschieden gearteter Aufgaben befähigen. In seinem Buche »I miei Integratori«<sup>1)</sup> sind sie in systematischer Ordnung beschrieben.

Im folgenden soll die von Pascal getroffene Einteilung in zwei Gruppen beibehalten und demgemäß zwischen cartesischen und Polarintegrativen unterschieden werden, wobei der Apparat von Abdank-Abakanowicz sich den ersteren eingliedert. Im übrigen soll für einen zu vielseitiger Anwendung geeigneten Apparat jeder Gruppe das Prinzip und die Wirkungsweise etwas ausführlicher auseinander gesetzt werden. Für die andern möge ein kurzer Hinweis auf ihre Verwendung genügen.

**1. Cartesische Integrativen.** Die Grundform der cartesischen Integrativen wird von einem rechteckigen Metallrahmen gebildet, der sich auf zwei an seinen kürzeren Seiten angebrachten gleich schweren Rollen und außerdem auf ein scharfrandiges Rädchen stützt, von dem noch die Rede sein wird (Abb. 1). Auf den beiden Rollen kann das Instrument vorwärts und rückwärts mit sich selbst parallel auf der Ebene der Zeichnung hin und her gefahren werden. Ein cartesisches Koordinatensystem orientieren wir so, daß die Fahrtrichtung die Richtung der Abszissenachse ist; um die Vorstellung zu erleichtern, nehmen wir die positive Richtung nach rechts an. Die Längsseiten des Rechtecks bleiben der Ordinatenachse parallel, die nach hinten positiv sei. Die langen Seiten dienen zugleich als Schienen für zwei kleine Wagen, den Differentialwagen auf der rechten und den Integralwagen auf der linken Schiene. Mit dem ersteren ist ein Stift in fester Verbindung, der mit Hilfe eines am Differentialwagen angebrachten Griffes auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Am Integralwagen ist das genannte Rädchen befestigt, das nur in der nach Belieben veränderbaren Richtung seiner vertikalen Ebene auf der Unterlage rollen kann. Neben diesem Rädchen befindet sich, in starrer Verbindung mit ihm, eine Schreibfeder, welche die Integralkurve aufzeichnet.



Abb. 1

Die beiden Wagen stehen bei dem zunächst betrachteten Apparate durch eine geradlinige Stange in Zusammenhang, die ich Lineal<sup>2)</sup> nennen will. Dieses Lineal ist an einem Zapfen des Integralwagens drehbar befestigt, während es einen am Integralwagen befindlichen Zapfen in einer Nute oder einem Schlitz umfaßt, so daß dieser sich in der Richtung des Lineals in ihm verschieben kann. Das Rädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene stets in der Richtung desselben steht.

Die erste Aufgabe, die mit dem Apparate ausgeführt wird, besteht in der Aufzeichnung der Koordinatenachsen. Man klemmt mit einer Schraube den Differentialwagen auf seiner Schiene fest, drückt den Stift auf das Papier, wo er einen Punkt kenntlich macht. Dann läßt man das Instrument auf seinen Rollen laufen und bringt den Auflagepunkt des Rädchens (oder auch die Schreibfeder) genau auf diesen Punkt, wozu der Integralwagen auf seiner Schiene verschoben werden muß. Indem man nun das Instrument rollen und die Schreibfeder herab läßt, zeichnet sie die  $x$ -Achse. Noch einfacher kann man beide Wagen an das vordere Ende der Schienen bringen und dann das Instrument rollen lassen, dann wird die Schreibfeder die Abszissenachse am vorderen Rande des Zeichenblattes zeichnen.

Um die Ordinatenachse zu erhalten, ist nur erforderlich, eine der Rollen des Instrumentes festzuklemmen. Das Rädchen wird ein wenig in die Höhe gehoben und der Integralwagen auf seiner Schiene bewegt, so beschreibt die Zeichenfeder die  $y$ -Achse.

<sup>1)</sup> Neapel 1914. Eine deutsche Uebersetzung von A. Galle erschien in der Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1922, S. 232 bis 243, 253 bis 277, 300 bis 311, 326 bis 337.

<sup>2)</sup> Meist Directrix genannt.

Verfolgt man mit dem Stift eine gegebene Kurve, die Differentialkurve, so kann man sich die Bewegung aus zwei Komponenten zusammengesetzt denken. In der Richtung der  $x$ -Achse wird das ganze Instrument gerollt, die Bewegung in der Ordinatenrichtung wird durch Verschiebung des Differentialwagens auf seiner Schiene hervorgebracht. Betrachten wir die letztere zuerst, so hat sie zur Folge, daß das Lineal und damit die Ebene des Rädchens um den Zapfen des Integralwagens gedreht wird. Wenn dagegen das ganze Instrument gefahren wird, so wird das Rädchen danach streben, seine Rollrichtung mit der Richtung, in der es gezogen wird, in Uebereinstimmung zu bringen und hierbei einen Zug auf den Integralwagen ausüben, der dadurch auf seiner Schiene bewegt wird. Das Rädchen bewegt sich dabei stets in der Tangentenrichtung der Kurve, die sein Auflagepunkt beschreibt.

In der praktischen Ausführung wird diese Kurve nicht von dem Rädchen, sondern von der Schreibfeder aufgezeichnet, was aber nur die Verschiebung der Kurve um eine konstante Länge in der Abszissenrichtung zur Folge hat. Ebenso wird die gegebene Kurve nicht vom Zapfen des Differentialwagens, sondern von dem Stift durchfahren, was ebenfalls eine konstante Verschiebung dieser Kurve im Sinne der  $x$ -Koordinaten zur Folge hat. Die Abszissendifferenz der Zapfen der beiden Wagen ist eine Instrumentalkonstante, die auch als Maßeinheit ( $a$ ) des Instrumentes bezeichnet wird, im Gegensatz zur Maßeinheit der Zeichnung. Von ihr unterscheidet sich die Projektion des Abstandes von Stift und Feder auf die  $x$ -Achse nur durch eine Konstante.

**2. Theorie der cartesischen Integrappen.** Die Gleichungen der Kurven schreiben wir in der Form  $y = f(x)$ . Für die gegebene Differentialkurve sei diese Funktion  $Q(x)$ , während die Ordinate der Integralkurve  $y$  sein möge. Ist  $H$  das Zentrum des Integralwagens (Zapfen des Rädchens),  $G$  der Zapfen des Differentialwagens, so möge das Lineal  $GH$  und ebenso die Ebene des Rädchens den Winkel  $\varphi$  mit der  $x$ -Achse einschließen. Dann ist  $y' = \frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \varphi$  und  $Q(x) - y = a \operatorname{tg} \varphi = y'$  und  $y' + y = Q(x)$  ist die kanonische Form einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung, die also von dem Apparat integriert wird.

Ist für zwei entsprechende Punkte beider Kurven die Ordinate dieselbe:  $Q(x) = y$ , so ist  $y' = \operatorname{tg} \varphi = 0$ , also die Tangente der Integralkurve der  $x$ -Achse parallel und ihre Ordinate hat einen größten oder kleinsten Wert. Ist auch  $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 0$ , so hat die Integralkurve (im allgemeinen) einen Wendepunkt. Dies tritt dann ein, wenn  $y' = \operatorname{tg} \varphi = \text{konstans}$  ist. Das ist aber der Fall, wenn sich der Stift in der Richtung  $GH$  bewegt, d. h. wenn die Tangente der Differentialkurve ebenfalls unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die  $x$ -Achse geneigt ist. Wenn also die Tangenten an entsprechenden Stellen parallel sind, so hat die Integralkurve einen Wendepunkt.

Verfolgt man mit dem Stift die Kurve  $Q(x)$  bis zu einem gewissen Punkte und gibt dann dem Differentialwagen einen Ruck, damit er sich bei festgestelltem Instrument auf seiner Schiene bewegt, so ändert sich die Tangente der Integralkurve sprunghaft. Wenn also die Ordinate der Differentialkurve unstetig wird, so wird die Tangente der Integralkurve unstetig. Wenn dagegen die Tangente der Differentialkurve unstetig wird, während ihre Ordinate stetig bleibt, so bleibt die Tangente der Integralkurve stetig. Wenn man daher dem ganzen Instrument eine plötzliche Rückwärtsbewegung erteilt, so entsteht eine Spitze der Integralkurve, da bei unveränderter Stellung des Differentialwagens die Tangente unverändert bleibt, also bei der Rückwärtsbewegung nur in entgegengesetzter Richtung beschrieben wird.

Zu einer gegebenen Differentialkurve gehören unendlich viele Integralkurven, die dadurch entstehen, daß dem Integralwagen beliebige Anfangsstellungen auf seiner Leitschiene zugewiesen werden. Die lineare Differentialgleichung  $ay' + y = Q(x)$  hat das allgemeine Integral  $y = \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{a}} \left[ \int Q e^{\frac{x}{a}} dx + C \right]$ . Dieser Ausdruck wird also durch die Integralkurve des Apparats dargestellt. Bringt man die Schreibfeder auf einen Anfangspunkt mit der Ordinate  $y_0$  und der Abszisse  $x_0$ , so wird  $C = a y_0 e^{\frac{x_0}{a}}$  und für  $x_0 = 0$  und  $a = 1$  wird die Integrationskonstante  $C = y_0$ .

Die aufgezeichnete Kurve macht verschiedene Eigenschaften des Integrals anschaulich. Wenn zwei Integralkurven beschrieben werden, so nähern sie sich nach der Seite

der wachsenden  $x$  einander asymptotisch entsprechend der Ordinatendifferenz  $\frac{C_1 - C_2}{a} e^{-\frac{x}{a}}$ .

Sind drei oder mehr partikuläre Integrale  $y_1, y_2, y_3 \dots$  aufgezeichnet, so zeigt sich, daß die Sehnen der Bogen aller dieser Kurven, die von zwei beliebig gewählten Senkrechten auf der  $x$ -Achse begrenzt werden, sich verlängert in einem Punkte schneiden, der Beziehung  $\frac{y_3 - y_1}{y_1 - y_2} = \text{konst.}$  entsprechend, welche aussagt, daß das Verhältnis der Ordinatendifferenzen von  $x$  unabhängig ist.

Auch einige lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten  $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + y = Q(x)$  können mit dem Apparate integriert werden, insbesondere wenn die  $a$  numerische Koeffizienten der algebraischen Gleichung  $\xi^n - a_1 \xi^{n-1} + a_2 \xi^{n-2} \dots + (-1)^n a_n = 0$  mit reellen Wurzeln sind<sup>1)</sup>. Hierzu ist eine Vorkehrung nötig, den Abstand der Schienen zu verändern, d. h. der Instrumentalkonstanten verschiedene Werte geben zu können. Bei dem betreffenden Instrument kann  $a$  von 7 bis 16 cm geändert werden. Es ersetzt dann gewissermaßen mehrere Instrumente mit verschiedenen Maßeinheiten.

Eine andre Erweiterung der Anwendbarkeit wird dadurch erreicht, daß die Ebene des Rädchens auch unter von null verschiedenen Winkeln gegen das Lineal mit Hilfe eines geteilten Kreises gestellt werden kann (Abb. 2). Bezeichnet man diesen Winkel mit  $\alpha = \arctg m$ , so heißt die Differentialgleichung, da  $\tg(\alpha - \varphi) = \frac{\tg \alpha - \tg \varphi}{1 + \tg \alpha \tg \varphi}$  ist,

$$y' = \frac{-am + Q(x) - y}{a + m[Q(x) - y]}.$$

Von dieser Integration kann man zu einem besonderen Zwecke Gebrauch machen. Stellt man das Rädchen senkrecht zum Lineal, ist also  $\alpha = 90^\circ$  und  $m = \infty$ , so wird

$$y = \frac{a}{y'}.$$

Diese Gleichung integriert man, indem der Differentialwagen auf seiner Schiene festgestellt und das ganze Instrument (in diesem Falle vorteilhafter nach links) gerollt wird. Man erhält einen Parabelbogen  $y^2 = 2ax$ , dessen Achse parallel zur  $x$ -Achse liegt. Den Scheitel dieser Parabel kann allerdings die Feder nicht erreichen, weil das Rädchen sich senkrecht zur  $x$ -Achse zu stellen strebt und daher schließlich eine weitere Bewegung unmöglich macht.

Mit demselben Instrument kann man die Exponentialkurve, die Kettenlinie, die hyperbolische Kosinuskurve und die Wahrscheinlichkeitskurve zeichnen.

Zum Schluß wollen wir auf die Auflösung der algebraischen Gleichungen hinweisen,

die das Instrument leistet. Wenn man  $Q = e^{-x}$  setzt, eine Gleichung, die man, wie erwähnt, mit dem Instrument zeichnen kann, so erhält man  $y = (x + C)e^{-x}$ . Wird diese Kurve wieder integriert, so folgt  $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + Cx + C^1\right)e^{-x}$  usw.

Ist also z. B. die Gleichung  $\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}px^2 + qx + r = 0$  vorgelegt, deren Ableitungen der Reihe nach  $\frac{1}{2}x^2 + px + q$  und  $x + p$  sind, so integriert man zunächst

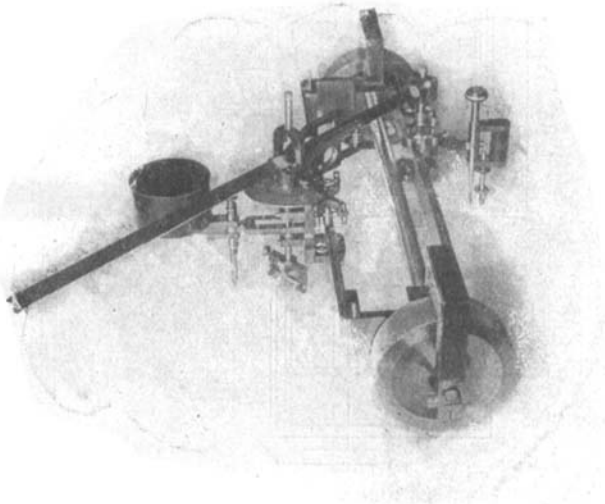


Abb 2

<sup>1)</sup> Ein Beispiel ist  $980 y''' + 208 y'' + 31 y' + y = Q(x)$ , wo  $\xi^3 - 31 \xi^2 + 208 \xi - 980$  die 3 reellen Wurzeln 14, 10, 7 hat. Die algebraische Gleichung hat eine Ähnlichkeit mit der »charakteristischen Gleichung«.

$y = e^{-x}$ , indem der Stift im Anfang auf den Punkt mit der Ordinate 1 und der Abszisse 0 gestellt wird. Dann integriert man wiederum, indem man als Anfangsbedingung einführt, daß dem Punkte mit der Ordinate  $p$  der Punkt mit der Ordinate  $q$  entspricht, endlich die dann erhaltene Kurve so, daß dem Punkte mit der Ordinate  $q$  der Punkt der Integralkurve mit der Ordinate  $r$  entspricht. Die Schnittpunkte der letzten Kurve mit der  $x$ -Achse liefern die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung.

**3. Die Pascalschen Konstruktionen.** Beim Integrappen von Abdank-Abakanowicz ist in der Mitte des Instruments ein fester Zapfen vorhanden, um den sich das Lineal dreht. Auf letzterem läuft nun ein dritter Wagen, der dazu dient, mit Hilfe eines Gelenkparallelogramms die Ebene des Rädchens immer parallel dem Lineal zu halten. Auch hier bringt Pascal die Aenderung an, daß das Rädchen unter einem beliebigen konstanten Winkel gegen die Linealschiene gehalten werden kann, wodurch der Aufgabenkreis erweitert wird, dem dieser Apparat dient. Bei der Einstellung des Rädchens senkrecht zur Schiene ( $\alpha = 90^\circ$ ) findet man den Integrallogarithmus  $\int \frac{dx}{\lg x}$ , der die Anzahl der Primzahlen zwischen 2 und  $x$  mit großer Annäherung darstellt.

Ein andres Instrument hat zwei feste Zapfen; mit ihm kann die Riccatische Gleichung integriert werden. Auf einer Schiene, die den einen festen Zapfen  $O$  mit dem Differentialwagen  $G$  verbindet, läuft auch hier ein dritter Wagen  $S$ , durch den zwei Stangen vom andern Zapfen  $E$  und vom Integralwagen  $H$  aus geführt sind. Dadurch wird erreicht, daß die Verbindung des Differential- und Integralwagens immer parallel des Stange  $ES$  bleibt, wodurch die gegenseitige Lage der beiden Wagen geregelt wird.

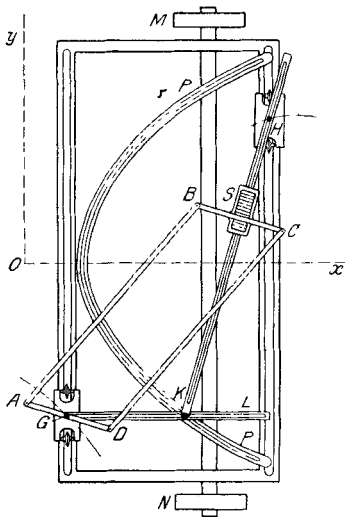


Abb. 3

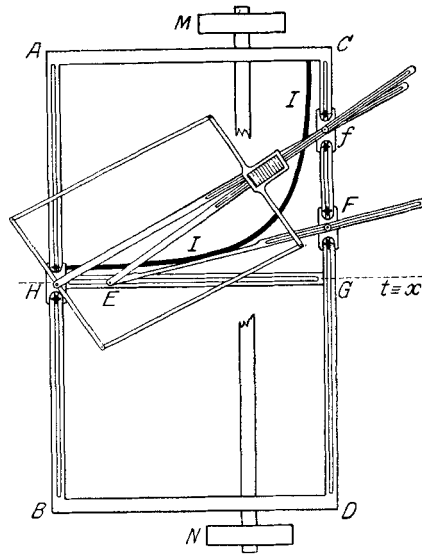


Abb. 4

Von besonderer Bedeutung ist dann noch ein Instrument (Abb. 3), bei dem ein beweglicher Zapfen  $K$  (statt des festen bei Abdank) angebracht ist, um den sich das Lineal dreht. Entweder wird der Zapfen durch den Differential- oder durch den Integralwagen bewegt. Hängt die Bewegung von letzterem ab, so gelingt es, damit die natürliche Differentialgleichung der Geschößbewegung zu integrieren<sup>1)</sup>, d. h. die differentielle Beziehung zwischen Neigungswinkel und Geschwindigkeit in der Geschößbahn. Diese Aufgabe kann man theoretisch nur für gewisse Fälle des Gesetzes der Abhängigkeit vom Luftwiderstande lösen, dieses Instrument löst sie für ein beliebiges Gesetz, wenn dieses graphisch dargestellt wird. Hängt aber die Bewegung des Zapfens vom Differentialwagen ab, so ist ein solches Instrument (Abb. 4) imstande, Integralgleichungen (Volterra) zu lösen. Um

<sup>1)</sup> L. Jacob beschäftigte sich auch mit dieser Aufgabe, der von ihm erdachte Apparat ist aber komplizierter. — In Abb. 3 sind  $G$  und  $H$  vertauscht.

die lineare Differentialgleichung mit allgemeinen Koeffizienten  $y' = F(x)y + \psi(x)$  zu integrieren, ist noch ein Gelenkparallelogramm erforderlich, durch welches die Schiene  $Hf$  (Abb. 5) der von der Mitte  $K$  der Seite  $AB$  ausgehenden Stange  $K\varphi$  parallel gehalten wird.

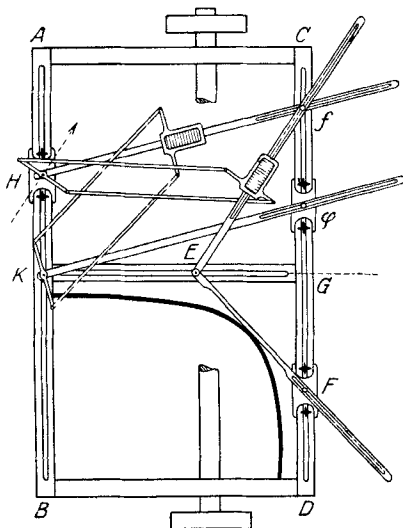


Abb. 5

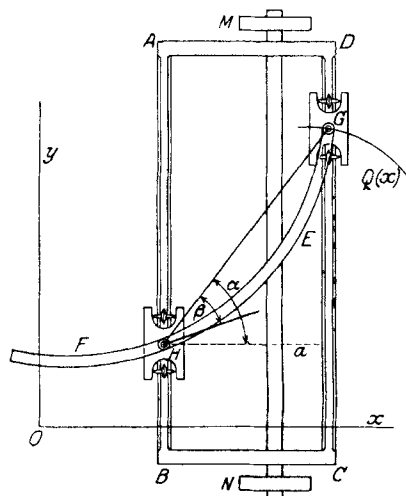


Abb. 6

Die Integration der Riccatischen und ebenso der Abelschen Gleichung wird aber auch durch ein Instrument (Abb. 6) geleistet, bei dem an Stelle des geraden Lineals, das die beiden Wagen verbindet, ein Kurvenlineal eingesetzt ist. Bei dieser Art von Instrumenten sind zwei Möglichkeiten vorhanden. Entweder ist das gekrümmte Lineal am Differential- oder am Integralwagen drehbar befestigt, während der andre Wagen mit seinem Zapfen in einem Schlitz des Lineals sich verschiebt. Die Ebene des Integrierrädchens muß sich im ersteren Falle immer in die Richtung der Tangente der Linealkurve stellen. Die Form der Differentialgleichung, die integriert wird, ist  $y' = \Psi(Q(x) - y)$  und man kann für eine gegebene Funktion  $\Psi$  die Gestalt der Kurve bestimmen, die das Lineal haben muß.

Die zweite Anordnung verlegt den Drehpunkt des Lineals in den Zapfen des Integralwagens (Abb. 7). Das Integrierrädchen ist so mit dem Lineal verbunden, daß seine Ebene in die Richtung der Kurventangente fällt. Die Form des Kurvenlineals, das wieder über den Zapfen des andern, hier des Differentialwagens, verschiebbar ist, ist bei diesem Instrument eine andre. Die Kurve ist sozusagen die längere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Drehpunkt die gegenüberliegende Ecke des Dreiecks ist. Diese Ausführung ist in mancher Beziehung, namentlich auch in bezug auf die Herstellung der Kurve sehr vorteilhaft, hat aber den Nachteil, daß die Beweglichkeit bei gewissen Wagenstellungen versagt, und nur mittels eines besondern Handgriffs gelingt es, den nötigen Antrieb hervorzubringen.

Noch zwei andre Formen hat Pascal seinen Apparaten gegeben. Bei der einen läßt er die eine Schiene, nämlich die, auf der der Differentialwagen gleitet, ganz fort. Das Instrument (Abb. 8) hat dann eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Schneidenplanimeter, aber nur insofern, als der Stift, der am Ende des Lineals oder der Stange sitzt, die gegebene Kurve entlang geführt wird. Aber an Stelle der Schneide tritt hier der Integralwagen auf seiner Schiene und sein Rädchen.

Endlich hat Prof. Pascal noch Integraphen ausgedacht, bei denen die Schiene, auf welcher der Integralwagen läuft, nicht geradlinig ist, sondern in einer bestimmten Kurvenform gegeben (Abb. 9). Dann können noch bei diesem neuen Typus wieder alle andern Verschiedenheiten eingeführt werden, die bei dem Instrument mit geraden Schienen erwähnt wurden. Auch mit diesem Apparate läßt sich die Differentialgleichung der Geschösbewegung im widerstehenden Mittel integrieren, aber es muß hier für jedes Widerstands-

gesetz eine anders geformte Schiene angefertigt werden, während in dem früheren Falle es nur nötig war, eine andere Kurve zu zeichnen.

**4. Polarintegrgraphen.** Wesentlich verschieden von den bisher besprochenen cartesischen Inte-

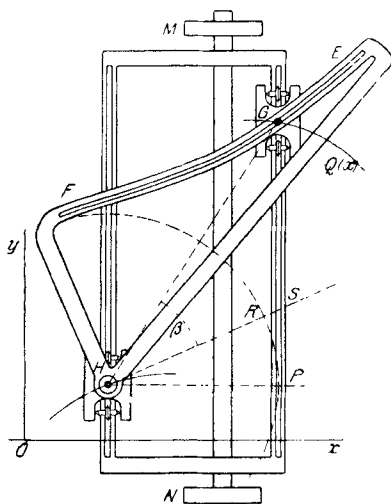


Abb. 7

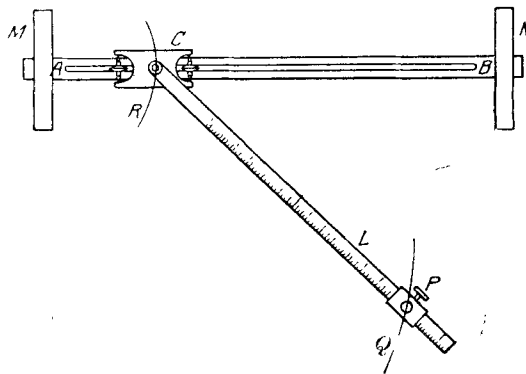


Abb. 8

graphen ist der Polarintegrgraph. Auf seine Erfindung hat wohl Prof. Pascal besondern Wert gelegt, und eine Abbildung desselben schmückt das Titelblatt seines Buches.

Das Instrument (Abb. 10) hat die Gestalt eines Kreissektors mit einem festen und einem drehbaren Schenkel, deren Winkelstellung an einem geteilten Quadranten abgelesen und durch eine Klemmschraube fixiert wird. Beide Schenkel dienen als Schienen, der erste für den Differentialwagen, der drehbare für den Integralwagen, die im einfachsten Falle durch eine gerade Stange verbunden sind. Die drei Stützpunkte des Instruments werden durch den Zapfen O im Kreiszentrum, durch eine Walze, deren Achse mit dem Ende des festen Schenkels zusammenfällt, und durch den Rand des mit dem Integralwagen verbundenen Rädchens gebildet. Das Lineal, die Verbindungsstange der Wagen, ist um den Zapfen des Integralwagens drehbar und verschiebt sich über den Zapfen des Differentialwagens. Die Ebene des Rädchens bildet einen konstanten, aber verstellbaren Winkel mit dem Lineal.

Die Wirkungsweise des Apparates übersieht man wieder am besten, wenn man ihn zunächst einfache Operationen ausführen läßt. Klemmt man die Walze fest und hebt den Stift des Differentialwagens und das Rädchen des Integralwagens etwas an, so daß

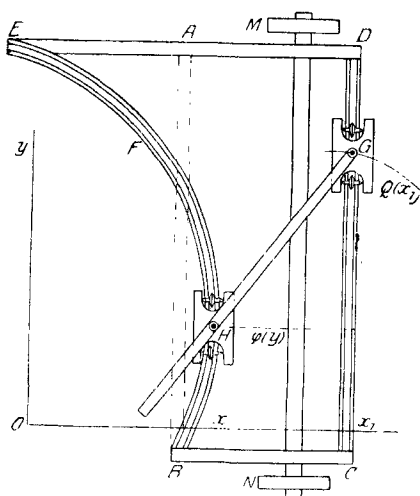


Abb. 9

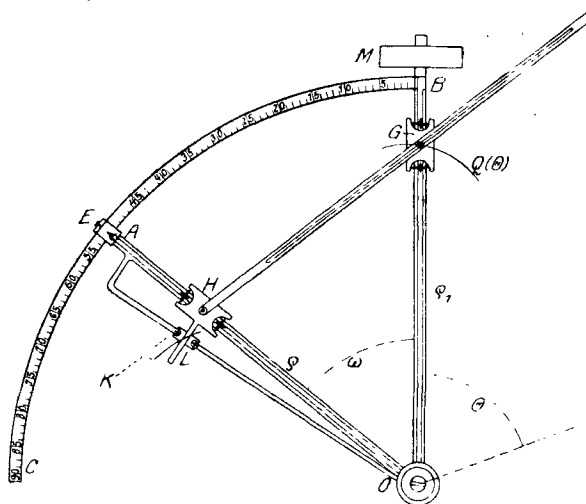


Abb. 10

sie die Ebene der Zeichnung nicht berühren, so zieht die Schreibfeder, wenn man den Integralwagen rollen läßt, eine durch das Zentrum gehende Gerade. Stellt man den drehbaren Schenkel unter verschiedenen Winkeln gegen den festen, so erhält man auf diese Weise in  $O$  konvergierende Gerade. Die Winkel, die sie untereinander bilden, kann man an der Quadrantenteilung ablesen.

Stellt man dagegen den Integralwagen auf seiner Schiene fest und läßt das ganze Instrument auf der Walze um das Zentrum rollen, so beschreibt die Ziehfeder einen Kreis um das Zentrum. Durch Veränderung der Stellung des Wagens auf seiner mit einer Teilung versehenen Schiene bekommt man konzentrische Kreise, deren Halbmesserslängen auf der Schiene des Integralwagens abgelesen werden können.

Da sich die Wagen nicht bis zum Zentrum verschieben lassen, kann man das Lineal vom Differentialwagen abheben und über das Zentrum legen. Stellt man dann das Rädchen normal zum Lineal ( $\alpha = 90^\circ$ ), so wird bei der Drehung des Apparates die Schreibfeder einen Kreis um den Mittelpunkt beschreiben. Wenn man aber  $\alpha = 75^\circ, 60^\circ$  usw. macht, so erhält man logarithmische Spiralen, da in diesem Falle das Rädchen einen Zug auf den Integralwagen ausübt.

Während das Rädchen sich unter dem Integralwagen befindet, ist die Schreibfeder seitlich gegen ihn verrückt, in der Weise, daß beide den gleichen Abstand vom Zentrum haben, aber ihre beiden Radien einen konstanten Winkel, bei Pascal von  $15^\circ$ , miteinander einschließen. Dadurch wird die Integralkurve, ohne ihre Gestalt zu ändern, um das Zentrum gedreht.

Stellt man den Stift des Differentialwagens auf einen Punkt der Zeichenebene ein und klemmt man ihn fest, dreht dann das ganze Instrument um  $15^\circ$  rückwärts, so kann man nach diesem Punkte konvergierende Gerade, Kreise um ihn als Mittelpunkt, Spiralen usw. ziehen, indem man bei feststehendem Apparate den beweglichen Schenkel, der den Integralwagen trägt, nach Lösung der Schraube längs des Quadranten gleiten läßt und das Rädchen auf Stellungen von  $\alpha = 0^\circ, 90^\circ$  usw. gegen das Lineal bringt.

Man kann leicht Tangenten oder Normalen an eine Kurve mit dem Apparat zeichnen. Hat die Schreibfeder eine Kurve bis zu einem gewissen Punkte gezogen, so hält man die Bewegung des Instrumentes an, löst die Schraube, mit der die Schiene des Integralwagens am Quadranten geklemmt ist und dreht die Schiene um den Mittelpunkt. Ist  $\alpha = 0$ , d. h. das Rädchen in der Richtung des Lineals, so beschreibt die Feder die Tangente; ist  $\alpha = 90^\circ$ , so zeichnet sie die Normale an die Kurve in dem betreffenden Punkte. Man kann auf diese Weise auch eine beliebig gegen die Tangente geneigte Gerade ziehen, wenn man das Rädchen unter einem andern Winkel gegen das Lineal einstellt.

**5. Theorie der Polarintegrirphen.** Eine gegebene Kurve beziehen wir bei diesem Apparate auf Polarkoordinaten und stellen sie in der Form  $\varrho_1 = Q(\theta)$  vor. Als Pol gilt das Zentrum  $O$ , und von einer beliebig gewählten Richtung durch  $O$  wird der Polarwinkel  $\theta$  gezählt. Ist der Winkel des Sektors, der am Quadranten abgelesen wird,  $\omega$ , so bildet die Schiene des Integralwagens mit ihr den Winkel  $\theta + \omega$ .

Ist  $\alpha = 0^\circ$ , also die Rollrichtung des Rädchens mit der Linealrichtung zusammenfallend, so ist der Winkel  $\varphi$  der Tangente der Integralkurve (von der Normale auf dem Radius Vektor im positiven Sinne gezählt) durch  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{d\varrho}{\varrho d(\theta + \omega)} = \frac{d\varrho}{\varrho d\theta}$  gegeben. Da

andererseits  $\cos \varphi = \frac{\varrho_1 \sin \omega}{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos \omega}}$  ist, so wird  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{\varrho - \varrho_1 \cos \omega}{\varrho_1 \sin \omega}$ , und die durch den

Apparat integrierte Differentialgleichung lautet  $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2}{\sin \omega Q(\theta)} - \varrho \operatorname{ctg} \omega$ , worin  $Q$  eine willkürliche Funktion und  $\omega$  eine Konstante ist. Ist  $\alpha$  von 0 verschieden, so erhält man statt dessen ( $\operatorname{tg} \alpha = m$  gesetzt)

$$\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\varrho^2 + \varrho Q(\theta)(m \sin \omega - \cos \omega)}{Q(\theta)(m \cos \omega + \sin \omega) - m\varrho} \quad \text{oder} \quad \frac{\varrho^2 + m\varrho\varrho'}{Q(\theta)(m \cos \omega + \sin \omega) - \varrho(m \sin \omega - \cos \omega)} = Q(\theta).$$

Für  $\alpha = 0^\circ$  erhält man natürlich die vorige Gleichung, für  $\alpha = 90^\circ$  erhält man  $\frac{d\varrho}{d\theta} = \frac{\sin \omega \cdot Q(\theta) \cdot \varrho}{\cos \omega \cdot Q(\theta) - \varrho}$ . Endlich leistet der Apparat die polare Quadratur, indem man aus

der ersten und letzten Gleichung für  $\omega = 90^\circ$  die Gleichungen bekommt:  $\frac{d\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{d\theta} = -\frac{1}{Q(\theta)}$



und  $\frac{d\varrho}{d\theta} = -Q(\theta)$ . Ferner kann der Apparat lineare Differentialgleichungen, Bernoulli'sche und kompliziertere Differentialgleichungen integrieren.

Von andern Anwendungen sei, abgesehen von Kurvenzeichnungen, die z. T. schon erwähnt wurden, auf die graphische Konstruktion der Zahl  $\pi$ , die der Integrator von Abdank-Abakanowicz umständlicher zustande bringt, und auf die Winkelteilung hingewiesen. Ferner stellt der Apparat die Kurven für die elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung her und kann zur Berechnung der besonders in der Ballistik auf-

tretenden Integrale  $\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\cos^n \theta}$  verwendet werden.

Für die Auflösung algebraischer Gleichungen kann nicht die Gleichung  $\varrho = f(\theta)$  ohne weiteres zugrunde gelegt werden, weil der Integralwagen sich nicht dem Zentrum über einen gewissen Abstand nähern kann. Man muß daher zwei Kurven zeichnen  $\varrho = f(\theta) + \varphi(\theta)$  und  $\varrho = \varphi(\theta)$ , und die Aufgabe läuft dann darauf hinaus, die Werte von  $\theta$  zu bestimmen, für die  $f(\theta) = 0$  wird. Dazu können dann zwei verschiedene Verfahren verwendet werden, die indessen etwas umständlicher erscheinen als die mit den cartesischen Integratoren ausgeführten.

Ich bin im vorstehenden nur auf die Instrumente von Pascal eingegangen, einmal weil man sich über andre Apparate dieser Art durch das Werk von L. Jacob, *le calcul mécanique* (Paris 1911) und den von mir herausgegebenen Band 15 »Mathematische Instrumente« der Sammlung Jahnke (Berlin 1912) orientieren kann, dann aber auch, weil diese andern Konstruktionen meist wesentlich komplizierter sind und nicht so vielseitige Anwendungen zulassen. Als einen recht einfachen Apparat möchte ich nur noch den von L. Jacob zur Lösung der Riccati'schen Differentialgleichung erwähnen, der einem Prytzschen Stangenplanimeter nachgebildet ist. An Stelle der Schneide tritt hier ein scharfrandiges Rädchen. Die Stange ist durch den Mittelpunkt eines geteilten Kreises hindurchgeführt; ein Durchmesser dieses horizontalen Kreises wird durch zwei miteinander verbundene Gelenkparallelogramme stets einer bestimmten gegebenen Richtung parallel gehalten, wenn der Fahrstift auf der gegebenen Kurve entlang geführt wird. Der ganze Mechanismus wird von kleinen Rollen getragen, damit der Kreis und die Parallelogramme sich mit möglichst wenig Reibung bewegen können. An der Stange ist ein Nonius angebracht, der an dem Kreise gleitet und den Winkel, den die Stange in irgend einem Augenblick mit der Anfangsrichtung einschließt, abzulesen gestattet. Die Richtung der Stange ist jederzeit Tangente der vom Berührungspunkte des Schneidenrades beschriebenen Kurve. Allerdings ist dieser Apparat kein eigentlicher Integrator, da er die Integrationskurve nicht aufzeichnet, sondern Ablesungen erfordert, indessen scheint es mir nicht schwierig, ihn noch mit einer Schreibfeder auszustatten. Zunächst liefert der Apparat die Integration der Riccati'schen Gleichung  $\frac{du}{dt} = Pu^2 + Qu + R$  nur

in dem besonderen Fall, daß  $P + R = 0$  ist. Aber Jacob führt in geschickter Weise den allgemeinen Fall auf den besonderen zurück. Für die Abelsche Gleichung  $\frac{du}{dt} = pu^3 + qu^2 + ru + s$  hat er ein andres Instrument konstruiert, das dem Prinzip nach dem vorigen ähnlich ist, aber an Stelle der Parallelführung tritt die Führung der Kurvenschiene in einer durch die Koeffizienten der Gleichung vorgeschriebenen Weise. Der Vergleich mit der von Pascal und Ajello angegebenen Integration durch den Apparat mit gekrümmtem Lineal dürfte aber zugunsten des letzteren ausfallen, zumal dabei beide Gleichungen, wenn auch durch verschieden geformte Lineale, integriert werden.

Der Nutzen, den die Anwendung von Instrumenten, wie die Integratoren, stiften kann, wird besonders bei häufiger Wiederholung derselben Operation hervortreten und sich vornehmlich in Zeitersparnis zeigen. Es wurde ferner bereits darauf hingewiesen, daß die graphische Darstellung manche Eigenschaften des Resultats ungesucht und deutlicher zeigt, als die rechnerische Behandlung einer Aufgabe. Endlich bieten Instrumente dieser Art auch ein hohes wissenschaftliches Interesse, worauf Henry S. H. Shaw in seinem kleinen Werke »Mechanical Integrators« (New York 1886) hinweist, indem er sagt: *Aside from the labor-saving quality which most of them possess, they have a value arising from the fact that they represent thoughts of more or less complexity expressed in mechanism.*

227

Potsdam, Oktober 1922.