Das vollständige Formensystem einer binären Form achter Ordnung.

Von

von Gall in Darmstadt.

Einleitung.

Nach Herrn Prof. Gordan erhält man das vollständige Formensystem einer binären Form 8^{ter} Ordnung durch Verbindung des Systems:

$$f = a_x^8; \quad H_x^{12} = (ff)_2; \quad T_x^{18} = (Hf)_1; \quad i_x^8 = (ff)_4; \quad \Theta_x^{14} = (fi)_1;$$
$$S_x^{18} = (Hi)_1; \quad p_x^{12} = (fi)_2; \quad A = (ff)^8; \quad B = (fi)^8$$

mit dem vollständigen System der biquadratischen Form

$$k_x^4 = (ff)^6; \quad \Delta_x^4 = (kk)_2; \quad \mathsf{T}_x^6 = (k\Delta)_1; \quad C = (kk)_4; \quad D = (k\Delta)_4.$$

Mit Hilfe der von Herrn Prof. Gordan gegebenen, die symbolische Rechnung wesentlich vereinfachenden Polarenbildungen I_a, I_b, I_c und der Identität III seines Werkes über das Formensystem binärer Formen*) hält es nicht schwer das vollständige Formensystem endgültig aufzustellen. Zu dem Ende verbinden wir zuerst jede einzelne Form des Systems $f, H, T \cdots$ mit dem vollen System der Form k, zeigen dann, dass die Ueberschiebungen von T und S über Formen k alle und diejenigen von Θ bis auf eine auf Ueberschiebungen anderer Formen des Systems $f, H, T, \cdots$, mit dem System k zurückzuführen sind und dass ein Gleiches von den meisten der aus H und p entstehenden Formen nachgewiesen werden kann. Nach diesem wird sich ergeben, dass die Ueberschiebungen aller Producte $f^{\alpha_1} H^{\alpha_2} T^{\alpha_3} \ldots$ mit Producten $k^{\beta_1} \Delta^{\beta_2} \mathsf{T}^{\beta_3}$ durch zerfallende Theile ersetzt werden können, mithin auszulassen sind. Den Schluss bildet die Aufstellung des vollen Systems. Wir verstehen in Nachfolgendem unter $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ oder φ_k; $\varphi', \varphi'', \varphi''', \varphi''''$ oder φ_Δ; $\varphi_{kk}, \varphi_{k\Delta}, \varphi_{\Delta^2}$ u. s. w. die Ueberschiebungen $[\varphi, k]_1, [\varphi, k]_2, [\varphi, k]_3, [\varphi, k]_4, [\varphi, \Delta]_1, [\varphi, \Delta]_2, [\varphi, \Delta]_3, [\varphi, \Delta]_4, [\varphi, k^2]_8, [\varphi, k\Delta]^8, [\varphi, \Delta^2]^8$ u. s. w. Es ist ohne Weiteres klar, dass wir unter $\begin{pmatrix} \varphi & \psi & \chi \\ m & n & p \end{pmatrix}$ die Specialisirung der Gordan'schen Identität III für den

*) Leipzig, Teubner 1875.

Fall $\alpha_1 = m$, $\alpha_2 = n$, $\alpha_3 = p$ verstehen. Im § 1. schicken wir das Nothwendigste über die Formen dritten Grades in den Coefficienten von f_x^3 voraus, im § 2. entwickeln wir einige allgemeine Sätze über Ueberschiebungen einer biquadratischen Form mit einer beliebigen Form φ_x^m. In den folgenden Paragraphen werden die Formen untersucht, die resp. ausser einem Symbol H, Θ, T, S und p nur Symbole k, Δ, T enthalten, und wir verstehen hierbei unter J, P und F Ueberschiebungen von der Form:

$$[i, k^{\alpha_1}\Delta^{\alpha_2}\mathsf{T}^{\alpha_3}], \quad [p, k^{\alpha_1}\Delta^{\alpha_2}\mathsf{T}^{\alpha_3}], \quad [f, k^{\alpha_1}\Delta^{\alpha_2}\mathsf{T}^{\alpha_3}].$$

Im letzten Paragraphen findet sich das volle System, so weit es mir gelungen ist, dasselbe zu reduciren.

§ 1.

Formen dritten Grades.

Man erhält der Reihe nach für:

$$(1) \quad \underset{0\,3\,4}{f\,f\,f}; \quad \frac{\sum\binom{4}{i}\binom{3}{i}}{\sum\binom{9-i}{i}}[(ff)^{4+i}f]^{3-i} = \frac{\sum\binom{5}{i}\binom{4}{i}}{\sum\binom{11-i}{i}}[(ff)^{3+i}f]^{4-i}$$

und

$$(fi)_3 = \frac{1}{7}(fk)_1;$$

$$(2) \quad \underset{0\,3\,5}{f\,f\,f}; \quad \frac{\sum\binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\sum\binom{7-i}{i}}[(ff)^{5+i}f]^{3-i} = \sum\frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}}[(ff)^{3+i}f]^{5-i}$$

und

$$(fi)_4 = -\frac{4}{35}(fk)_2 + \frac{1}{30}A\cdot f;$$

$$(3) \quad \underset{1\,4\,4}{f\,f\,f}; \quad \sum\frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}}[(ff)^{4+i}f]^{5-i} = -\sum\frac{\binom{3}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}}[(ff)^{4+i}f]^{5-i} = 0$$

und

$$(fi)_5 = -\frac{6}{7}(fk)_3;$$

$$(4) \quad \underset{2\,5\,3}{f\,f\,f}; \quad \sum\frac{\binom{3}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}}[(ff)^{3+i}f]^{7-i} = \sum\frac{\binom{1}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}}[(ff)^{5+i}f]^{5-i}$$

und

$$(fi)_6 = \frac{3}{14}(fk)_4;$$

$$(5)\ \begin{matrix} f & f & f \\ 3 & 4 & 4 \end{matrix};\ \sum \frac{\binom{1}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{1+i} f]^{7-i} = - \sum \frac{\binom{1}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} [(ff)^{4+i} f]^{7-i} = 0$$

und

$$(fi)_7 = 0.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} f & f & f \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

ergeben sich die Relationen:

$$(1)\qquad (Hf)_2 = \frac{5}{22}\, i \cdot f,$$

$$(2)\qquad (Hf)_3 = - \frac{2}{11}\, \Theta,$$

$$(3)\qquad (Hf)_4 = - \frac{7}{11}\, p + \frac{1}{6}\, k \cdot f,$$

$$(4)\qquad (Hf)_5 = - \frac{1}{66}\, f_1.$$

§ 2.

Ueberschiebungen einer biquadratischen Form k mit φ_i^m.

Der Theorie der biquadratischen Formen entlehnen wir die Relationen:

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} & (k\Delta)_1 = \mathrm{T}, \qquad (\Delta\Delta)_2 = - \frac{C}{6}\, \Delta + \frac{D}{3}\, k, \\ & (k\Delta)_2 = \frac{C}{6}\, k, \\ & (k\Delta)_3 = 0, \\ & (k\Delta)_4 = D, \\ & (k\mathrm{T})_1 = - \frac{\Delta^2}{2} + \frac{C}{12}\, k^2, \\ & (k\mathrm{T})_2 = 0, \\ & (k\mathrm{T})_3 = \frac{1}{4}\, D\Delta + \frac{C^2}{24}\, k, \\ & (k\mathrm{T})_4 = 0, \\ & \qquad \mathrm{T}^2 = - \frac{1}{2}\, \Delta^3 + \frac{C}{4}\, \Delta k^2 - \frac{D}{6}\, k^3. \end{aligned} \right.$$

Aus

$$\begin{pmatrix} k & \varphi & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & \varphi & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & k & \varphi \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & k & \varphi \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man weiter:

$$(2)\quad \begin{cases} (\Delta\varphi)_1 = [\varphi_2 k]_1 - \frac{m-2}{m}\varphi_3\cdot k, \\ (\Delta\varphi)_2 = -\frac{2}{3}[\varphi_3 k]_1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{m-3}{m-2}\varphi_4\cdot k - \frac{1}{6}C\cdot\varphi, \\ (\Delta\varphi)_3 = [\varphi_3 k]_2 - \frac{m-4}{m-2}(\varphi_4 k)_1, \\ (\Delta\varphi)_4 = -2[\varphi_3 k]_3 + 2\cdot\frac{m-5}{m-2}[\varphi_4 k]_2. \end{cases}$$

Analog findet man aus

$$\begin{pmatrix} k & \varphi & \Delta \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & \varphi & \Delta \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} k & \Delta & \varphi \\ (\varrho-3) & 3 & 1 \end{pmatrix},\quad [\varrho \gtreqless 3],$$

$$(3)\quad \begin{cases} (\mathsf{T}\varphi)_2 = [\varphi_2\Delta]_1 - \frac{m-2}{m}\varphi_3\cdot\Delta + \frac{C}{6}\cdot\varphi_1, \\ (\mathsf{T}\varphi)_3 = -[\varphi_3\Delta]_1 + \frac{m-3}{m-2}\varphi_4\cdot\Delta - \frac{1}{4}C\cdot\varphi_2 - \frac{1}{4}D\cdot\varphi, \\ [\mathsf{T}\varphi]_\varrho + \frac{1}{12}C\binom{6-\varrho}{1}[k\varphi]^{\varrho-1} + \frac{\binom{6-\varrho}{3}}{\binom{4}{3}}[D\varphi]^{\varrho-3} \\ \qquad = (-1)^{\varrho-3}\sum \frac{\binom{m-\varrho}{i}\binom{1}{i}}{\binom{m-1-i}{i}}[(k\varphi)^{3+i}, \Delta]^{\varrho-2-i}. \end{cases}$$

Aus den Polarenbildungen:

$$k_x^2\, k_y^2\, \Delta_y^4 \quad \text{und} \quad \Delta_x^2\, \Delta_y^2\, k_y^4$$

erhält man:

$$(4)\qquad (\varphi_\Delta k)_2 - (\varphi_k\Delta)_2 = 2[\varphi\mathsf{T}]^5$$

und aus:

$$k_x\, k_y^3\, \Delta_y^4 \quad \text{und} \quad \Delta_x\, \Delta_y^3\, k_y^4,$$

$$(5)\qquad (\varphi_\Delta k)_3 - (\varphi_k\Delta)_3 = (\varphi\mathsf{T})^6.$$

§ 3.

Ueberschiebungen von H.

1. $\{Hk\}^4$.

Gehen wir aus von:

$$\begin{pmatrix} f & f & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix};\quad \sum\frac{\binom{6}{i}\binom{4}{i}}{\binom{13-i}{i}}[(ff)^{2+i}k]^{4-i} = \sum\frac{\binom{0}{i}\binom{2}{i}}{\binom{5-i}{i}}[(fk)^{4+i}f]^{2-i},$$

oder:

$$(1) \qquad H_4 + \frac{18}{11}\, i_2 + \frac{5}{42}\, k^2 = (f_4 f)_2$$

und bilden:

$$\begin{pmatrix} f & f & i \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} \left[(ff)^{5+i} i\right]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} \left[(fi)^{3+i} f\right]^{5-i},$$

oder

$$(2) \qquad \frac{3}{2}\, i_2 + \frac{1}{4}\, A i = ((fi)^3 f)^5 + \frac{5}{2}\, ((fi)^4 f)^4 + \frac{25}{9}\, ((fi)^5 f)^3 + \frac{25}{14}\, ((fi)^6 f)^2 + \frac{1}{6}\, B \cdot f$$

und

$$\begin{pmatrix} i & f & f \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}; \quad \sum \frac{\binom{3}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} \left[(if)^{5+i} f\right]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{5}{i}}{\binom{11-i}{i}} \left[(if)^{3+i} f\right]^{5-i},$$

oder

$$(3) \qquad ((fi)^3 f)^5 = \frac{5}{2}\, ((fi)^4 f)^4 - \frac{16}{9}\, ((fi)^5 f)^3 + \frac{2}{7}\, ((fi)^6 f)^2 - \frac{1}{12}\, B \cdot f.$$

Führen wir den Werth von $((fi)^3 f)^5$ in (2) ein und ersetzen wir die Formen dritten Grades $(fi)^k$ durch die Form $(fk)^l$, so geht die Identität (2) über in:

$$(4) \qquad \frac{3}{2}\, i_2 + \frac{1}{12}\, A i = -\frac{4}{7} (f_2 f)_1 - \frac{6}{7} (f_3 f)_3 + \frac{87}{14 \cdot 14} (f_1 f)_2 + \frac{1}{12} B \cdot f.$$

Nun erhält man aus

$$\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

die weiteren Identitäten:

$$\sum \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{i}}{\binom{9-i}{i}} \left[(fk)^{2+i} f\right]^{4-i} = \sum \frac{\binom{4}{i}\binom{2}{i}}{\binom{9-i}{i}} \left[(ff)^{4+i} k\right]^{2-i},$$

$$\sum \frac{\binom{1}{i}\binom{3}{i}}{\binom{7-i}{i}} \left[(fk)^{3+i} f\right]^{3-i} = \sum \frac{\binom{5}{i}\binom{3}{i}}{\binom{11-i}{i}} \left[(ff)^{3+i} k\right]^{3-i},$$

oder

$$(5) \qquad (f_2 f)_1 + (f_3 f)_3 + \frac{2}{7}\, (f_4 f)_2 = i_2 + \frac{2}{7}\, k^2$$

und

$$(6) \qquad (f_3 f)_3 + \frac{1}{2}\, (f_4 f)_2 = \frac{3}{2}\, i_2 + \frac{5}{28}\, k^2.$$

Eliminiren wir nun successive $(f_2 f)_4$, $(f_3 f)_3$ und $(f_1 f)_2$, so ergiebt sich zunächst aus (4) und (5):

$$\frac{29}{14} i_2 + \frac{8}{49} k^2 + \frac{1}{12} Ai - \frac{1}{12} Bf = - \frac{2}{7} (f_3 f)_3 + \frac{17}{28} (f_4 f)_2$$

und aus dieser und (6)

$$\frac{5}{2} i_2 + \frac{3}{14} k^2 + \frac{1}{12} Ai - \frac{1}{12} Bf = \frac{3}{4} (f_4 f)_2$$

und endlich mit Hilfe von (1):

$$(7) \qquad \frac{3}{4} H_4 = \frac{14}{11} i_2 + \frac{1}{8} k^2 + \frac{1}{12} Ai - \frac{1}{12} Bf.$$

2. $(Hk)_2$ und $(Hk)_3$.

Aus

$$\begin{pmatrix} f\ k\ f \\ 0\ 1\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} f\ k\ f \\ 0\ 1\ 4 \end{pmatrix}$$

erhält man die Identitäten:

$$\sum \frac{\binom{1}{i}\binom{1}{i}}{\binom{7-i}{i}} [(fk)^{3+i} f)^{1-i} = \sum \frac{\binom{7}{i}\binom{3}{i}}{\binom{15-i}{i}} [(ff)^{1+i} k]^{3-i},$$

$$(f_4 f)_1 = \sum \frac{\binom{7}{i}\binom{4}{i}}{\binom{15-i}{i}} [(ff)^{1+i} k]^{4-i},$$

oder

$$(1) \qquad H_2 = \frac{2}{3} (f_3 f)_1 + \frac{1}{9} f_4 \cdot f - \frac{7}{66} i \cdot k$$

und

$$(2) \qquad H_3 = \frac{1}{2} (f_4 f)_1 - \frac{7}{22} (ik)_1.$$

3. *Formen* $[H, k^\alpha \cdot \Delta^\beta \cdot \mathrm{T}^\gamma]^\varrho$, *die auszulassen sind.*

Da H_2 und H_3 Functionaldeterminanten sind, so folgt sofort, dass H' und H'' in Folge von Formel (2) § 2. auszulassen sind. Ebenso ergiebt sich aus der Form von $(Hk)^4$, dass, von Gliedern K, J und F abgesehen, jedes Glied und jede Ueberschiebung mit dem symbolischen Factor $(Hk)^4$ fortzulassen ist.

Nun erhält man analog H_k:

$$H_\Delta + \frac{18}{11} i''' + \frac{5}{42} k\Delta = (f_\Delta f)_2.$$

Es ist mithin von Formen J, K abgesehen $(H_\Delta k)_2$ ersetzbar durch

$$[(f_\Delta f)_2 k]_2.$$

Man erhält nun der Reihe nach für

$$\binom{f_\Delta\; f\; k}{0\;2\;2}, \quad \binom{f_\Delta\; f\; k}{0\;1\;3}, \quad \binom{f_\Delta\; f\; k}{0\;0\;4}$$

die Identitäten:

$$((f_\Delta f)^2 k)_2 + \frac{3}{2}((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{5}{7}(f_\Delta f)^4 \cdot k = ((f_\Delta k)_2 f)_2 + ((f_\Delta k)_3 f)_1 + \frac{1}{3} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{5}{6}(f_\Delta f)^4 \cdot k = ((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{3}{2}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{9}{10}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{4} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$(f_\Delta f)^4 \cdot k = (f_\Delta \cdot k, f)^4 + 2((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{12}{7}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{4}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{5} f_{\Delta k} \cdot f.$$

Analog der letzteren erhält man aus $\binom{k\; f\; f_\Delta}{0\;0\;4}$

$$f_k \cdot f_\Delta = (k \cdot f_\Delta, f)^4 - 2((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{12}{7}((f_\Delta k)^2 f)^2 - \frac{4}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{5} f_{k\Delta} \cdot f.$$

Aus diesen erhält man successive:

$$(f_\Delta f)^4 \cdot k - f_k \cdot f_\Delta = 4((f_\Delta k)^1 f)^3 + \frac{8}{5}((f_\Delta k)^3 f)^1,$$

$$((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{7}{12}(f_\Delta f)^4 \cdot k + \frac{1}{4} f_k \cdot f_\Delta = \frac{3}{2}((f_\Delta k)^2 f)^2 + \frac{1}{2}((f_\Delta k)^3 f)^1 + \frac{1}{4} f_{\Delta k} \cdot f,$$

$$((f_\Delta f)^2 k)_2 + \frac{5}{6}((f_\Delta f)^3 k)_1 + \frac{41}{126}(f_\Delta f)^4 \cdot k - \frac{1}{6} f_k \cdot f_\Delta = \frac{2}{3}((f_\Delta k)^3 f)_1 + \frac{1}{6} f_{k\Delta} \cdot f.$$

Es ist mithin $(H_\Delta k)_2$, von zerfallenden Formen und Formen J, K und F abgesehen, durch Functionaldeterminanten ersetzbar, daher ist $(H_\Delta \Delta)_1$ und $(H_\Delta \mathrm{T})_2$ wegen Formel (3), § 2. auszulassen.

Um $(H_\Delta \Delta)_2$ zu bilden, überlegen wir, dass, wegen der obigen Gleichung für H_Δ, $(H_\Delta k)_3$ ersetzbar ist durch $[(f_\Delta f)_2 k]_3$ und Formen J und K. Bilden wir uns nach:

$$\binom{f\; f_\Delta\; k}{0\;3\;2}, \quad \binom{f\; f_\Delta\; k}{0\;2\;3}, \quad \binom{f\; f_\Delta\; k}{0\;1\;4}, \quad \binom{f\; f_\Delta\; k}{1\;1\;3}$$

die Identitäten:

$$((ff_\Delta)^2 k)^3 + \frac{3}{4}((ff_\Delta)^3 k)^2 + \frac{1}{7}((ff_\Delta)^4 k)_1 = (f_3 f_\Delta)^2 + \frac{1}{3}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$((ff_\Delta)^3 k)^2 + \frac{1}{3}((ff_\Delta)^4 k)^1 = (f_2 f_\Delta)^3 + \frac{3}{4}(f_3 f_\Delta)^2 + \frac{1}{7}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$((ff_\Delta)^4 k)^1 = (f_1 f_\Delta)^4 + \frac{6}{5}(f_2 f_\Delta)^3 + \frac{1}{2}(f_3 f_\Delta)^2 + \frac{1}{14}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$((ff_\Delta)^3 k)^2 = -(f_1 f_\Delta)^4 - \frac{3}{5}(f_2 f_\Delta)^3 - \frac{1}{12}(f_3 f_\Delta)^2;$$

aus denen wir durch successive Elimination der Ueberschiebungen auf der rechten Seite erhalten:

$$((ff_\Delta)^4 k)^1 + ((ff_\Delta)^3 k)_2 = \frac{3}{5}(f_2 f_\Delta)^3 + \frac{5}{12}(f_3 f_\Delta)^2 + \frac{1}{14}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$24((ff_\Delta)^4 k)^1 + 12((ff_\Delta)^3 k)^2 = -(f_3 f_\Delta)^2 - \frac{3}{7}(f_4 f_\Delta)_1,$$

$$\frac{169}{7}((ff_\Delta)^4 k)_1 + \frac{51}{4}((ff_\Delta)^3 k)_2 + ((ff_\Delta)^2 k)_3 = -\frac{2}{21}(f_4 f_\Delta)_1.$$

Da aber, wie man sofort sieht, $((ff_\Delta)^3 k)_2$ aus Formen J, K und solchen, die zerfallen, besteht, so ist $[(ff_\Delta)^2 k]_3$, von eben solchen Formen abgesehen, ein Aggregat von Functionaldeterminanten und mithin wegen Formel (2) und (3) § 2. $(H_\Delta \Delta)_2$ und $(H_\Delta \mathrm{T})_3$ auszulassen. Da ferner die durch Faltung aus H und Δ^3 entstehenden Formen einerseits nur i, k, A, andererseits nur Formen K ergeben, so ist $(H\Delta)^4 (H\Delta')^4 (Hk)^2 H_x^2 k_x^2$, von den auszulassenden Formen J, K, A abgesehen, ersetzbar durch das Glied:

$$(ab)^2 (a\Delta)^4 (b\Delta')^1 (ak)^2 k_x^2 b_x^2,$$

das seinerseits durch die Formen $[(f_\Delta k)^2 f_\Delta]^2$, $[(f_\Delta k)^3 f_\Delta]^1$ und $(f_\Delta k)^1 f_\Delta$ ersetzbar ist. Nach $\begin{pmatrix} f_\Delta & k & f_\Delta \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f_\Delta & k & f_\Delta \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ erhält man nun:

$$((f_\Delta k)^2 f_\Delta)^2 + ((f_\Delta k)^3 f_\Delta)^1 + \frac{1}{3}(f_\Delta k)^4 \cdot f_\Delta = ((f_\Delta f_\Delta)^2 k)^2 + \frac{1}{3}(f_\Delta f_\Delta)^4 \cdot k,$$

$$\frac{2}{3}((f_\Delta k)^3 f_\Delta)^1 + \frac{1}{3}(f_\Delta k)^4 \cdot f_\Delta = ((f_\Delta f_\Delta)^2 k)_2 + \frac{1}{6}(f_\Delta f_\Delta)^4 \cdot k,$$

woraus sich sofort ergiebt:

$$((f_\Delta k)^2 f_\Delta)^2 + \frac{1}{3}((f_\Delta k)^3 f_\Delta)^1 = \frac{1}{6}(f_\Delta f_\Delta)^4 \cdot k,$$

und die Ausscheidbarkeit von $(H\Delta)^4 (H\Delta')^4 (H\Delta'')^1 H_x^3 \Delta_x''^3$ und $(H_{\Delta\Delta}\mathrm{T})_2$. Es bleiben also von H stammend die Formen:

(1) H_1, H_2, H_3.

(2) H''', H_Δ, H'''_Δ, $H_{\Delta\Delta}$, $H''_{\Delta\Delta}$, $H'''_{\Delta\Delta}$, $H_{\Delta\Delta\Delta}$,

(3) $(H\mathrm{T})_4$ $(H\mathrm{T})_5$ $(H\mathrm{T})_6$, $(H_\Delta\mathrm{T})_4$ $(H_\Delta\mathrm{T})_5$ $(H_\Delta\mathrm{T})_6$, $(H_{\Delta\Delta}\mathrm{T})_3$ $(H_{\Delta\Delta}\mathrm{T})_4$.

§ 4.

Ueberschiebungen von $T = (Hf)^1$.

Selbstredend sind $(Tk)_1$ und $(T\Delta)_1$ auszulassen, $(Tk)_2$ ist aber ersetzbar durch Glieder von der Form:

$$(Hf)\,(Hk)^2\,H_x^9\,f_x^7\,k_x^2, \quad ((Hf)_2 k)_1 \quad (Hf)_3 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_2 f)_1, \quad H_3 \cdot f, \quad (i \cdot f, k)_1, \quad \Theta \cdot k,$$

wenn man die über die Formen 3. Grades gebrachten Relationen berücksichtigt. Da aber auch H_2 durch zerfallende Formen und Functionaldeterminanten ersetzt werden darf, so besteht T_2 aus einem Aggregat zerfallender Formen und ist demnach auszulassen. Ein Gleiches gilt mithin auch für $(T\mathrm{T})_2$. Betrachten wir nunmehr auch eine jede Ueberschiebung von T als überflüssig, die auf Formen Θ, P, F, K zurückführbar ist, so kann man zeigen, dass alle Ueberschiebungen von T auszulassen sind. T_3 ist ersetzbar durch Glieder:

$$(Hf)\,(Hk)^3\,H_x^8\,f_x^7\,k_x, \quad ((Hf)_2 k)_2, \quad ((Hf)_3 k)_1, \quad (Hf)_4 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_3 f)_1, \quad (f \cdot i, k)_2, \quad (\Theta k)_1, \quad p \cdot k, \quad f \cdot k^2.$$

Da auch H_3 als ein Aggregat von Functionaldeterminanten dargestellt ist, so besteht auch T_3 aus lauter zerfallenden Gliedern und es ist T_3 mit $(T\Delta)_2$ und $(T\mathrm{T})_3$ auszulassen. T_k ist ersetzbar durch die Glieder

$$(Hf)\,(Hk)^4\,H_x^7\,f_x^7, \quad ((Hf)_2 k)_3, \quad ((Hf)_3 k)_2, \quad ((Hf)_4 k)_1, \quad (Hf)_5 \cdot k,$$

oder durch:

$$(H_4 f)_1, \quad (f \cdot i, k)_3, \quad (\Theta k)_2, \quad (pk)_1, \quad (f \cdot k, k)_1, \quad f_1 \cdot k.$$

Berücksichtigen wir den gefundenen Werth von H_4, so gehen diese über in:

(1) $$i_3 \cdot f, \quad (\Theta k)_2, \quad (pk)_1, \quad f_1 \cdot k.$$

Analog nehmen die zu T_3 gehörigen Formen die Gestalt an:

(2) $$H_4 \cdot f, \quad H \cdot f_4, \quad f \cdot i_2, \quad fk^2, \quad \Theta_1, \quad p \cdot k.$$

Hieraus folgt zunächst der Wegfall von T_4 und aller Formen mit dem symbolischen Factor $(Tk)^4$.

Nach Formel (2) § 2. ist aber $(T\Delta)_3$ ersetzbar durch $(T_3 k)_2$ und $(T_4 k)_1$. Das letzte Glied enthält den Factor $(Tk)^4$, ist also nicht zu berücksichtigen. Das erste liefert nach vorstehender Formel (2) Glieder von der Form

$$H_4 \cdot f_2, \quad [(H_4 f)^1 k]_1, \quad (H_4 f)_2 \cdot k,$$
$$H_2 \cdot f_4, \quad [(H f_4)^1 k]_1, \quad (H f_4)_2 \cdot k$$

und Formen

$$f_2 \cdot i_2, \quad \Theta, \quad P, \quad F,$$

ist also auszulassen mit $(T\Delta)^3$. Nach Formel (2) § 2. ist

$$(T\Delta)_4 = -2(T_3k)_3 + \frac{7}{5}(T_4k)_2.$$

Das letzte Glied ist wegzulassen, das erste ist äquivalent mit Gliedern von der Form:

$$[(H_4f)^{1+i}, k]^{2-i}, \quad [(H, f_4)^{1+i}, k]^{2-i}, \quad H_{k,3}\cdot f, \quad H\cdot f_{k,3}, \quad f_3\cdot i_2$$

und Formen

$$\Theta,\ P \text{ und } F.$$

Die beiden ersten Klammergrössen

$$(Hf_4)^{1+i} \text{ und } (H_4f)^{1+i}$$

geben:

(1) $$(Hf)(fk)^4 \text{ und } (Hf)(Hk)^4,$$

d. i.

$$(Tk)^4,\ (i\cdot f, k)^3,\ (\Theta k)^2,\ (pk)_1 \text{ und } F,$$

(2) $$(Hf)^2(fk)^4 \text{ und } (Hf)^2(Hk)^4$$

d. i.

$$(i\cdot f, k)_4,\ (\Theta k)_3,\ P \text{ und } F,$$

(3) $$(Hf)^3(fk)^4 \text{ und } (Hf)^3(Hk)^4,$$

d. i.

$$(\Theta k)_4,\ P \text{ und } F.$$

Mithin ist $(T\Delta)_4$ äquivalent mit einem Aggregat von Formen $(Tk)^4\cdot Q$, Formen Θ, P, K, F, $(f_m\cdot i_{5-m})$, $(H_{k,3}\cdot f)$, $(H\cdot f_{k,3})$.

Berücksichtigen wir die für H_k gewonnene Form, so liefert $(H_{k,3}\cdot f)$ wieder zerfallende Formen und schon vorhandene Θ, P u. s. w. $((T\Delta)^4\Delta)^i$ giebt deshalb nur durch $[H\cdot f_{k,3}, \Delta]^i$ etwas wesentlich Neues. Diese Ueberschiebung liefert $(H\Delta)^i\cdot f_{k,3}$ und das Glied

$$[(Hf)\,H_x^{11}(fk)^3(fk')^4\,k_x,\ \Delta]^{i-1}.$$

Nun ist aber einmal $(Hf)(fk^2)^7 = (Tk^2)^7 + q((Hf)_2 k^2)^6 + \cdots$ und ferner $(Hf)(fk^2)^7 = (fk)^4(fk')^3(Hf) + (fk)^4(fk')^4\cdot H$. Mithin ist auch das zu untersuchende Glied von der alten Form. Es ist also auch jedes Glied mit dem symbolischen Factor $(T\Delta)_4$ auszulassen. In Folge der sich aus (3) § 3. ergebenden Relationen:

$$(\mathrm{T}T)^4 + \frac{1}{6}C(kT)_3 = -[(kT)_3\Delta]^2 - \frac{7}{8}[(kT)^4\Delta]_1,$$

$$(\mathrm{T}T)^5 + \frac{1}{12}C(kT)_1 = [(kT)_3\Delta]^3 + \frac{13}{16}[(kT)^4\Delta]_2,$$

$$(\mathrm{T}T)^6 \quad = -[(kT)_3\Delta]_4 - \frac{3}{4}[(kT)_4\Delta]_3$$

ergiebt sich, dass $(T\mathrm{T})_4$ und $(T\mathrm{T})^5$ aus denselben Gründen wie $(T\Delta)_3$ und $(T\Delta)_4$ wegzulassen sind. $(T\mathrm{T})_6$ liefert ausser wegzulassenden

Gliedern $[(H, f_k)^{1+\iota}, \Delta]^{3-\iota}$ und $H \cdot f_{k\Delta}$. Man folgert daher wie oben bei $(T\Delta)_4$, dass $(T\mathrm{T})_6$ aus einem Aggregat von Formen

$$\Theta, P, K, F, (f_m \cdot i_n)$$

und

$$(H\Delta)^\iota \cdot f_{k\Delta}$$

besteht und daher auch jedes Glied mit dem symbolischen Factor $(T\mathrm{T})^6$ auszulassen ist.

Diese Untersuchungen wiederholen sich für alle Ueberschiebungen von $S = (Hi)_1$.

§ 5.

Ueberschiebungen von Θ.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ergeben sich die Relationen:

$$(1) \quad \Theta_\iota + p_1 + \tfrac{1}{26} f_1 \cdot k = (f_2 i) + \tfrac{1}{4} f_3 \cdot i$$

$$(2) \quad p_1 + \tfrac{1}{14} f_1 \cdot k = (f_1 i) + \tfrac{3}{5} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{12} f_3 \cdot i$$

$$(3) \quad \tfrac{1}{7} f_1 \cdot k = (f \cdot k, i)_3 + (f_1 i)_2 + \tfrac{18}{55} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{30} f_3 \cdot i.$$

Aus der Polarenbildung

$$a_x^8\, k_y^3\, k_x = \sum \frac{\binom{8}{i}\binom{3}{i}}{\binom{13-i}{i}} (ak)^i_{y^{3-i}} (xy)^i$$

ergiebt sich ferner

$$(4) \quad -f \cdot i_3 = (f \cdot k, i)_3 - 2(f_1, i_2) + \tfrac{84}{55} (f_2 i)_1 - \tfrac{7}{15} f_3 \cdot i.$$

Hieraus erhält man successive:

$$\tfrac{1}{7} f_1 \cdot k + f \cdot i_3 = 3(f_1 i)_2 - \tfrac{6}{5} (f_2 i)_1 + \tfrac{1}{2} f_3 \cdot i,$$

$$\text{I.} \quad 3p_1 + \tfrac{1}{14} f_1 \cdot k - f \cdot i_3 = 3(f_2 i)_1 - \tfrac{1}{4} f_3 \cdot i,$$

$$\text{II.} \quad 3\Theta_2 + \tfrac{4}{91} f_1 \cdot k + f \cdot i_3 = f_3 \cdot i.$$

Mithin ist Θ_2 *wegzulassen und* $(\Theta\mathrm{T})_2$.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, sowie der Polarenentwickelung $a_x^8 \cdot k_y^4$ ergeben sich die Relationen:

$$\begin{aligned}
\Theta_3+\tfrac{3}{2}p_2+\tfrac{21}{26}[(fi)^3k]_1+\tfrac{7}{44}(fi)_4\cdot k &= (f_3i)_1+\tfrac{1}{6}f_4\cdot i,\\
p_2+[(fi)^3k]_1+\tfrac{3}{11}(fi)_4\cdot k &= (f_2i)_2+\tfrac{1}{2}(f_3i)_1+\tfrac{1}{21}f_4\cdot i,\\
[(fi)^3k]_1+\tfrac{1}{2}(fi)_4\cdot k &= (f_1i)_3+\tfrac{9}{10}(f_2i)_2+\tfrac{1}{4}(f_3i)_1+\tfrac{1}{56}f_4\cdot i,\\
(fi)_4\cdot k &= (f\cdot k,i)_4+\tfrac{4}{3}(f_1i)_3+\tfrac{36}{55}(f_2i)_2+\tfrac{2}{15}(f_3i)_1+\tfrac{1}{126}f_4\cdot i,\\
f\cdot i_4 &= (f\cdot k,i)_4-\tfrac{8}{3}(f_1i)_3+\tfrac{168}{55}(f_2i)_2-\tfrac{28}{15}(f_3i)_1+\tfrac{5}{9}f_4\cdot i.
\end{aligned}$$

Hieraus erhält man successive:

$$\begin{aligned}
(fi)_4\cdot k-f\cdot i_4 &= 4(f_1i)_3-\tfrac{12}{5}(f_2i)_2+2(f_3i)_1-\tfrac{23}{42}f_4\cdot i.\\
4[(fi)_3k]_1+(fi)_4\cdot k+f\cdot i_4 &= 6(f_2i)_2-1(f_3i)_1+\tfrac{23}{21}f_4\cdot i,\\
6p_2+2[(fi)_3k]_1+\tfrac{7}{11}(fi)_4\cdot k-f\cdot i_4 &= 4(f_3i)_1-\tfrac{1}{3}f_4\cdot i,\\
4\Theta_3+\tfrac{16}{13}[(fi)_3k]_1+f\cdot i_4 &= f_4\cdot i;
\end{aligned}$$

oder durch Einsetzung von $(fi)_3=\frac{1}{7}f_1$ und Entwickelung von $(f_1k)_1$:

$$\text{III.}\qquad 4\Theta_3=f_4\cdot i-f\cdot i_4-\tfrac{16}{97}\left(\tfrac{7}{10}f_2\cdot k-\tfrac{1}{2}f\Delta\right).$$

Es ist mithin Θ_3, $(\Theta\Delta)_2$ $(\Theta\mathrm{T})_3$ und $(p\Delta)_1$ $(p\mathrm{T})_2$ auszulassen.

Man kann aber $(\Theta\Delta)_2$ d. i. Θ'' und Θ''' wie p'' analog entwickeln, und mithin sind auch Θ'', Θ''' fortfallend.

Zur Bildung von $(\Theta k)_4$ haben wir aus:

$$\begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 4 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} f & i & k\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

und der Polarentwickelung

$$f_x^7 f_y k_y^4$$

$$\begin{aligned}
\Theta_4+2p_3+\tfrac{21}{13}[(fi)^3k]_2+\tfrac{7}{11}[(fi)^4k]_1+\tfrac{7}{66}(fi)^5\cdot k &= (f_4i),\\
p_3+\tfrac{3}{2}[(fi)^3k]_2+\tfrac{9}{11}[(fi)^4k]_1+\tfrac{1}{6}(fi)^5\cdot k &= (f_3i)_2+\tfrac{1}{8}(f_4i)_1,\\
[(fi)^3k]_2+[(fi)^4k]_1+\tfrac{5}{18}(fi)^5\cdot k &= (f_2i)_3+\tfrac{3}{4}(f_3i)_2+\tfrac{1}{7}(f_4i)_1,\\
[(fi)^4k]_1+\tfrac{1}{2}(fi)^5\cdot k &= (f_1i)_4+\tfrac{6}{5}(f_2i)_3+\tfrac{1}{2}(f_3i)_2+\tfrac{1}{14}(f_4i)_1,\\
(fi)^5\cdot k &= (f\cdot k,i)_5+\tfrac{5}{3}(f_1i)_4+\tfrac{12}{11}(f_2i)_3+\tfrac{1}{3}(f_3i)_2+\tfrac{5}{126}(f_4i)_1,\\
-(i_4f)_1 &= (f\cdot k,i)_5-\tfrac{7}{3}(f_1i)_4+\tfrac{7\cdot 18}{11\cdot 5}(f_2i)_3-\tfrac{7}{6}(f_3i)_3+\tfrac{5}{18}(f_4i)_1.
\end{aligned}$$

Aus diesen erhält man successive:

$$(fi)_5 \cdot k + (i_4 f)_1 = 4(f_1 i)_1 - \frac{6}{5}(f_2 i)_3 + \frac{3}{2}(f_3 i)_2 - \frac{5}{21}(f_4 i)_1,$$

$$4[(fi)^4 k]_1 + (fi)_5 \cdot k - (i_4 f)_1 = 6(f_2 i)_3 + \frac{1}{2}(f_3 i)_2 + \frac{11}{21}(f_4 i)_1,$$

$$6[(fi)^3 k]_2 + 2[(fi)^4 k]_1 + \frac{2}{3}(fi)^5 \cdot k + (i_4 f)_1 = 4(f_3 i)_2 + \frac{1}{3}(f_4 i)_1,$$

$$4p_3 + \frac{14}{11}[(fi)^4 k]_1 - (i_4 f)_1 = (f_4 i)_1,$$

$$2\Theta_4 + \frac{42}{13}[(fi)^3 k]_2 + \frac{7}{33}(fi)_5 \cdot k + (i_4 f)_1 = (f_4 i)_1.$$

Ersetzt man $(fi)^3$ und $(fi)^5$ resp. durch $\frac{1}{7} f_1$ und $-\frac{6}{7} f_3$ und berücksichtigt die aus $\begin{pmatrix} f & k & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ folgende Relation:

$$(f_1 k)_2 = \frac{2}{5}(f_2 k)_1 + \frac{1}{6} f_3 \cdot k,$$

so geht die Gleichung für Θ_4 über in:

$$2\Theta_4 + \frac{12}{65}(f_2 k)_1 - \frac{15}{143} f_3 \cdot k + (i_4 f)_1 - (f_4 i)_1 = 0.$$

Es ist daher nicht nur Θ_4 sondern auch p_3 Functionaldeterminante, wonach also $(\Theta_4 k)_1$ $(\Theta_4 \Delta)_1$ $(p\Delta)_2$ und $(pT)_3$ auszulassen sind. Wir können endlich auch sagen, Θ_4 ist bis auf p_3 und Formen F durch $(f_4 i)_1$ oder $(i_4 f)_1$ darstellbar. Ebenso ist p_4, was aus $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ oder

$$\sum \frac{\binom{6}{i}\binom{4}{i}}{\binom{13-i}{i}} [(fi)^{2+i} k]^{4-i} = (f_4 i)_2$$

sofort folgt, durch Formen F ausdrückbar und $(f_4 i)_2$ oder $(i_4 f)^2$. Aus

$$\begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_4 & i & k \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & i & f_4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

folgt aber ($f_4 = \varphi$ gesetzt):

$$[(f_4 i)^1 k]^2 + \frac{7}{5}[(f_4 i)^2 k]_1 + \frac{7}{12}(f_4 i)_3 \cdot k = (\varphi_2 i)_1 + \frac{1}{2}\varphi_3 \cdot i,$$

$$[(f_4 i)^2 k]_1 + \frac{3}{4}(f_4 i)^3 \cdot k = (\varphi_1 i)_2 + (\varphi_2 i)_1 + \frac{3}{10}\varphi_3 \cdot i,$$

$$(f_4 i)^3 \cdot k = (\varphi \cdot k, i)_3 + \frac{3}{2}(\varphi_1 i)_2 + \frac{6}{7}(\varphi_2 i)_1 + \frac{1}{5}\varphi_3 \cdot i,$$

$$-\varphi \cdot i_3 = (k \cdot \varphi, i)_3 - \frac{3}{2}(\varphi_1 i)_2 + \frac{6}{7}(\varphi_2 i)_1 - \frac{1}{5}\varphi_3 \cdot i.$$

Hieraus ergeben sich der Reihe nach die Gleichungen:

$$(\varphi i)_3 \cdot k + \varphi \cdot i_3 = 3\,(\varphi_1 i)_2 + \frac{2}{5}\,\varphi_3 \cdot i\,,$$

$$3((\varphi i)^2 k)_1 + \frac{5}{4}\,(\varphi i)^3 \cdot k - \varphi \cdot i_3 = 3\,(\varphi_2 i)_1 + \frac{1}{2}\,\varphi_3 \cdot i\,,$$

$$3[(\varphi i)^1 k]_2 + \frac{6}{5}\,[(\varphi i)^2 k]_1 + \frac{1}{2}\,(\varphi i)^3 \cdot k + \varphi \cdot i_3 = \varphi_3 \cdot i\,.$$

Es ist daher $(\Theta_4 k)_2$ durch Formen P, F und zerfallendende Glieder ausdrückbar, mithin wegzulassen. Dieselbe Entwickelung ist für $(\Theta_\Delta k)_2$ und $(\Theta_k \Delta)_2$ möglich.

Endlich findet man aus

$$\begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varphi & i & k\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}k & i & \varphi\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}:$$

$$((\varphi i)^1 k)_3 + \frac{21}{10}\,((\varphi i)^2 k)_2 + \frac{7}{4}\,((\varphi i)^2 k)_1 + \frac{5}{8}\,(\varphi i)_4 \cdot k = (\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{2}\,\varphi_4 \cdot i,$$

$$((\varphi i)^2 k)_2 + \frac{3}{2}\,((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{5}{7}\,(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi_2 i)_2 + (\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{3}\,\varphi_4 \cdot i\,,$$

$$((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{5}{6}\,(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi_1 i)_3 + \frac{3}{2}\,(\varphi_2 i)_2 + \frac{9}{10}\,(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{4}\,\varphi_4 \cdot i\,,$$

$$(\varphi i)^4 \cdot k = (\varphi \cdot k, i)_4 + 2(\varphi_1 i)_3 + \frac{12}{7}\,(\varphi_2 i)_2 + \frac{4}{5}\,(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{5}\,\varphi_4 \cdot i\,,$$

$$i_4 \cdot \varphi = (\varphi \cdot k, i)_4 - 2(\varphi_1 i)_3 + \frac{12}{7}\,(\varphi_2 i)_2 - \frac{4}{5}\,(\varphi_3 i)_1 + \frac{1}{5}\,\varphi_4 \cdot i\,.$$

Hieraus ergiebt sich successive:

$$(\varphi i)_4 \cdot k - i_4 \cdot \varphi = 4(\varphi_1 i)_3 + \frac{8}{5}\,(\varphi_3 i)\,,$$

$$\frac{7}{3}\,(\varphi i)_4 \cdot k + 4((\varphi i)^3 k)_1 + i_4 \cdot \varphi = 6\,(\varphi_2 i)_2 + 2(\varphi_3 i)_1 + \varphi_4 \cdot i\,,$$

$$\frac{41}{21}(\varphi i)_4 \cdot k + 5\,((\varphi i)^3 k)_1 + 6((\varphi i)^2 k)_2 - i_4 \cdot \varphi = 4(\varphi_3 i)_1 + \varphi_4 \cdot i\,,$$

$$\frac{23}{42}(\varphi i)_4 \cdot k + 2\,((\varphi i)^3 k)_1 + \frac{12}{5}((\varphi i)^2 k)_2 + 4((\varphi i)^1 k)_3 + i_4 \cdot \varphi = \varphi_1 \cdot i\,.$$

Wegen $(\varphi i)_3 = (ak)^4\,(ai)^3\,a_x\,i_x^5$ und $(fi)_3 = \frac{1}{7} f_1$ u. s. w. ist mithin $(\Theta_4 k)_3$ durch Formen F, P und zerfallende Formen darstellbar. Dieselbe Entwickelung ist für $(\Theta_\Delta k)_3$, $(\Theta_k \Delta)_3$ $(\Theta_\Delta \Delta)_3$ möglich. Zugleich folgt hieraus, dass von Formen F und zerfallenden Formen abgesehen $(p_4 k)_2$ durch Functionaldeterminanten ersetzbar ist. Es ist also auch $(p_4 \Delta)_1$ $(p_4 \mathrm{T})_2$ und ebenso $(p_\Delta \Delta)_1$ und $(p_\Delta \mathrm{T})_2$ überflüssig.

Die 4. Relation (2) § 2. bedingt nunmehr auch das Fortfallen von $(\Theta \Delta)_4$; denn das letzte Glied liefert nach Obigem nur wegzulassende Formen. $(\Theta_3 k)_3$ ergiebt aber ausser Formen F: $(f_4 \cdot i, k)_3$ und $(f \cdot i_4, k)_3$. Entwickeln wir aber $f_{4x}{}^4\, i_y{}^3\, i_x{}^5$ oder $i_{4x}{}^1\, f_y{}^3\, f_x{}^5$ und ersetzen in dem Resultat die y durch k, so erhalten wir:

$$f_4 \cdot i_3 = [(f_4 i)^0 k]_3$$

und Glieder

$$[(f_4 i)^1 k]_2,\ [(f_4 i)^2 k]_1,\ (f_4 i)^3 \cdot k,$$

d. h. es ist

$$(f_4\, i, k)_3 = f_4 \cdot i_3 + (\Theta_4 k)_2 + (p_4 k)_1 + P + F.$$

Dasselbe ergiebt sich für $(i_4 \cdot f, k)_3$ aus der zweiten Darstellung von Θ_4, woraus die Ueberflüssigkeit *von* $(\Theta_\varDelta)$ *ohne* Weiteres folgt. Ebenso liefert: $(\Theta \mathrm{T})_4$, $(\Theta \mathrm{T})_5$, $(\Theta \mathrm{T})_6$ ausser zerfallenden Formen resp.: $(\Theta_3 \Delta)_2$ und $(\Theta_4 \Delta)_1$, $(\Theta_3 \Delta)_3$ und $(\Theta_4 \Delta)_2$, $(\Theta_3 \Delta)_4$ und $(\Theta_4 \Delta)_3$ oder mit Hinzuziehung des Ausdruckes für Θ_3 und Hinweglassung von Formen P und F nur die schon untersuchten:

$$(\Theta_4 \Delta)_1\ (\Theta_4 \Delta)_2\ (\Theta_4 \Delta)_3.$$

Mithin sind auch *alle Formen* $(\Theta \mathrm{T})^\varrho$ auszulassen.

Nach Analogie der Entwickelung von $(H_\varDelta k)_3$ erhält man aus:

$$\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

die Gleichung:

$$\frac{169}{7}((if_k)^4 k)_1 + \frac{51}{4}((if_k)^3 k)_2 + ((if_k)^2 k)_3 = -\frac{2}{21}(i_4 f_k)_1.$$

Es ist also $(p_4 k)_3$ bis auf Formen F Functionaldeterminante und mithin $(p_4 \Delta)_2$ und $(p_4 \mathrm{T})_3$ auszulassen und mit diesen $(p_\varDelta \Delta)_2$, $[p_\varDelta \mathrm{T}]_3$. Verbindet man hiemit noch die aus $\begin{pmatrix} i & f_k & k \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ resultirende Gleichung:

$$((if_k)^1 k)_4 + \frac{6}{5}((if_k)^2 k)_3 + \frac{1}{2}((if_k)^3 k)_2 + \frac{1}{14}((if)^4 k)_1 = (i_4 f_4)_1,$$

so ergiebt sich, dass auch $(\Theta_4 k)_4$ auf Formen P und F zurückzuführen und mithin auszulassen ist. Dieselbe Entwickelung ist auch *für* $(\Theta_4 \Delta)_4$ *möglich*, und da auch schon $(\Theta \mathrm{T})_6$ als hinwegfallend erkannt ist und alle höheren Ueberschiebungen von Θ sich aus $(\Theta_4 k)_4$, $(\Theta_4 \Delta)_4$ und $\Theta_\varDelta$ resultiren, so folgt sofort die Ueberflüssigkeit aller weiteren Formen Θ.

Hieran schliesst sich noch die Betrachtung der restirenden Formen P. Da p_4 durch $(f_4 i)^2$ und Formen F ersetzbar ist, so wird p_8 gleich einem Aggregat von Formen:

$$[(f_4 i)^2 (ik)^4 f_{4x}^2\, i_x^2],\ [(f_4 i)^3, k]^3,\ [(f_4 i)^4, k]_2;$$

da aber die beiden letzten die symbolischen Factoren $(ai)^3$ und $(ai)^4$ besitzen, so ist p_8 durch $(f_4 i_4)^2$ ersetzbar.

Aus $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f_4 & i_4 & k \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} k & i_4 & f_4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ erhält man:

$$(f_4 = \varphi,\ i_4 = \psi),$$

$$[(f_4 i_4)^2 k]_2 + [(f_4 i_4)^3 k]_1 + \frac{1}{3}(f_4 i_4)^4 k = \qquad (\varphi_2 \psi)_2 + \qquad (\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{3}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$[(f_4 i_4)^3 k]_1 + \frac{1}{2}[f_4 i_4]^4 \cdot k = (\varphi_1 \psi)_3 \quad + \frac{3}{2}(\varphi_2 \psi)_2 + \frac{9}{10}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{4}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$[f_4 i_4]^4 \cdot k = [\varphi \cdot k, \psi]_4 + 2(\varphi_1 \psi)_3 \quad + \frac{12}{7}(\varphi_2 \psi)_3 + \frac{4}{5}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot \psi,$$

$$\psi_4 \cdot \varphi \quad = [\varphi \cdot k, \psi]_4 - (\varphi_1 \psi)_3 \quad + \frac{12}{7}(\varphi_2 \psi)_3 - \frac{4}{5}(\varphi_3 \psi)_1 + \frac{1}{5}\varphi_4 \cdot \psi,$$

und hieraus sofort durch Elimination der Glieder auf der rechten Seite

$$6[(f_4 i_4)^2 k]_2 + 2[(f_4 i_4)^3 k]_1 + (f_4 i_4)^4 \cdot k - \psi_4 \cdot f_4 = 4(\varphi_3 \psi)_1 + \varphi_4 \cdot \psi.$$

Es ist mithin $(p_8 k)_2$ bis auf auszulassende und zerfallende Formen Functionaldeterminante. Es fällt daher

$$(p_8 \Delta)_1 \ (p_8 \mathrm{T})_2 \text{ und } (p_{\Delta\Delta} \Delta)_1 \ (p_{\Delta\Delta} \mathrm{T})_2$$

aus demselben Grunde aus.

§ 6.

Entwickelung von p_4.

Aus $\begin{pmatrix} f & i & f \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ erhält man mit Benützung der Relationen zwischen den Formen 3. Gerades:

$$-(f_3 f)_5 + \frac{1}{8}(f_4 f)_4 = \frac{7}{4}(ii)_6 + \frac{5}{24} i_4$$

und

$$(f_3 f)_5 + \frac{5}{6}(f_4 f)_4 = \frac{3}{2}\Delta + \frac{1}{4} Ak$$

oder

$$\frac{23}{24}(f_4 f)_4 = \frac{3}{2}\Delta + \frac{7}{4}(ii)_6 + \frac{5}{24} i_4 + \frac{1}{4} Ak$$

oder

$$(f_4 f)_4 = \frac{36}{23}\Delta + \frac{42}{23}(ii)_6 + \frac{5}{23} i_4 + \frac{6}{23} Ak.$$

Aus $\begin{pmatrix} f & k & f \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ erhält man aber auch:

$$(f_4 f)_4 = i_4 + \frac{12}{7}\Delta + \frac{1}{5} Ak$$

und endlich:

$$(ii)_6 = \frac{3}{7} i_4 + \frac{4}{49}\Delta - \frac{1}{30} Ak.$$

Ebenso ist

$$(ii)_8 = (ab)^4 (ai)^4 (bi)^4 = [(fi)^4 f]_8 = -\frac{4}{35}(f_2 f)_8 + \frac{1}{30} A^2$$

$$= -\frac{4}{35}(ak)^2 (ab)^6 (kb)^2 + \frac{1}{30} A^2 = -\frac{4}{35} C + \frac{1}{30} A^2,$$

also

$$(ii)_8 = -\frac{4}{35}C + \frac{1}{30}A^2.$$

Nun folgt aus $\begin{pmatrix} i & i & f \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 \cdot f = -[(fi)_3 i]_5 + \frac{5}{2}[(fi)_4 i]_4 - \frac{25}{9}[(fi)^5 i]_3$$
$$\frac{25}{14}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{6}B \cdot i.$$

Da aber aus $\begin{pmatrix} f & i & i \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ die Relation sich ergiebt:

$$[(fi)^3 i]_5 = -\frac{5}{2}[(fi)^4 i]_4 - \frac{16}{9}[(fi)^5 i]_3 - \frac{2}{7}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{12}Bi,$$

so geht die vorhergehende über in:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 f = 5[(fi)^4 i]_4 - [(fi)^5 i]_3 + \frac{29}{4}[(fi)^6 i]_2 + \frac{1}{12}Bi.$$

Ersetzen wir hierin die $(fi)^k$ durch f_ϱ auf bekannte Weise, so wird sie zu:

$$\frac{3}{2}[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{4}(ii)_8 f = -\frac{4}{7}(f_2 i)_4 + \frac{1}{6}A(fi)_4 + \frac{6}{7}(f_3 i)_3$$
$$+ \frac{87}{14^2}(f_4 i)_2 + \frac{1}{12}Bi.$$

Berücksichtigen wir aber die beiden aus $\begin{pmatrix} f & k & i \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & k & i \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ folgenden Relationen:

$$(f_2 i)_4 + (f_3 i)_3 + \frac{2}{7}(f_4 i)_2 = [(fi)^4 k]_2 + [(fi)^5 k]_1 + \frac{2}{7}(fi)^6 k,$$

$$(f_3 i)_3 + \frac{1}{2}(f_4 i)_2 = [(fi)^3 k]_3 + \frac{3}{2}[(fi)^4 k]_2 + \frac{5}{6}[(fi)^5 k]_1 + \frac{5}{28}(fi)^6 k,$$

so geht sie über in die Form:

$$[(ii)^6 f]_2 + \frac{1}{6}(ii)_8 f - \frac{1}{9}A(fi)_4 - \frac{1}{18}Bi - \frac{20}{21}[(fi)_3 k]_3$$
$$-\frac{22}{21}[(fi)^4 k]_2 - \frac{26}{63}[(fi)^5 k]_1 - \frac{3}{49}(fi)^6 \cdot k = -\frac{1}{14}(f_4 i)_2.$$

Setzen wir hierin die oben gefundenen Werthe für $(ii)_6$ und $(ii)_8$, so erhalten wir eine Relation zwischen

$$(f_4 i)_2 \quad \text{und} \quad (i_4 f)_2$$

$$3[i_4 f]_2 + \frac{4}{7}(f\Delta)_2 - \frac{2}{15}Cf - \frac{7}{18}Bi - \frac{20}{3}[(fi)^3 k]_3 - \frac{22}{3}[(fi)^4 k]_2$$
$$-\frac{26}{9}[(fi)^5 k]_1 - \frac{3}{7}(fi)^6 k - \frac{13}{90}Af_2 + \frac{7}{540}A^2 f = -\frac{1}{2}(f_4 i)_2.$$

Combiniren wir aber die beiden aus $\begin{pmatrix} i & k & f \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} f & i & k \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ resultirenden Formeln:

$$p_4 - 2[(fi)^3k]_3 + \frac{18}{11}[(fi)^4k]_2 - \frac{2}{3}[(fi)^5k]_1 + \frac{5}{42}(fi)^6 \cdot k = (i_4f)_2$$

und

$$p_4 + 2[(fi)^3k]_3 + \frac{18}{11}[(fi)^4k]_2 + \frac{2}{3}[(fi)^5k]_1 + \frac{5}{42}(fi)^6k = (f_4i)_2,$$

so erhalten wir eine zweite Relation zwischen $(i_4f)_2$ und $(f_4i)_2$

$$(f_4i)_2 = (i_4f)_2 + 4[(fi)^3k]_3 + \frac{4}{3}[(fi)^5k]_1 .$$

Berechnen wir hieraus $(i_4f)_2$ und setzen diesen Werth in die erste der vorstehenden Darstellungen von p_4 ein, so wird endlich:

$$\begin{aligned} p_4 = & -\frac{8}{49}(f\Delta)_2 + \frac{4}{105}Cf + \frac{1}{9}Bi + \frac{13}{315}Af_2 - \frac{1}{270}A^2f \\ & + \frac{10}{3}[(fi)^3k]_3 + \frac{106}{231}[(fi)^4k]_2 + \frac{82}{63}[(fi)^5k]_1 + \frac{1}{294}(fi)^6k. \end{aligned}$$

Es ist hiermit der Nachweis geliefert, dass p_4 *als ein Aggregat von zerfallenden Formen und Formen* F dargestellt werden kann.

Bei einer schliesslichen Darstellung von p_4 durch andere Formen des vollständigen Systems wäre $[(fi)^3k]_3$, $[(fi)^4k]_2$, $[(fi)^5k]_1$, $(fi)^6$ resp. durch:

$$\frac{1}{7}(f_1k)_3, \quad -\frac{4}{35}(f_2k)_2 + \frac{1}{30}Af_2, \quad -\frac{6}{7}(f_3k)_1, \quad \frac{3}{14}f_4$$

zu ersetzen. Die hier auftretenden Ausdrücke $(f_1k)_3$, $(f_2k)_2$, $(f_3k)_1$ ergeben sich leicht aus $\begin{pmatrix} k & f & k \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} k & f & k \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} k & f & k \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ in der Form

$$\begin{cases} (f_1k)_3 = \frac{7}{24}f_4k - \frac{3}{20}Cf, \\ (f_2k)_2 = \frac{15}{28}f_4k - \frac{1}{24}Cf - \frac{5}{4}(f\Delta)_2, \\ (f_3k)_1 = \frac{5}{6}f_4k - \frac{1}{4}Cf - \frac{3}{2}(f\Delta)_2, \end{cases}$$

so dass endlich p_4 als Aggregat der Formen

$$f'', f_4 \cdot k, Cf, Bi, Af_2, A^2f$$

erscheint.

Es sind also auch alle Formen mit dem symbolischen Factor $(pk)^4$ auszulassen. Es bleiben mithin von Unterschiebungen mit p:

$$p$$

$$p_1, p_2, p_3, p''', p_\Delta, p_\Delta''', p_{\Delta\Delta}, p_{\Delta\Delta}'', p_{\Delta\Delta}''', p_{\Delta\Delta\Delta},$$

$$(pT)_4\ (pT)_5\ (pT)_6,\ (p_\Delta T)_4\ (p_\Delta T)_5\ (p_\Delta T)_6,\ (p_{\Delta\Delta}T)_3\ (p_{\Delta\Delta}T)_4.$$

§ 7.

Ueberschiebungen von Producten $P_f = f^{\alpha_1} \cdot H^{\alpha_2} \cdot T^{\alpha_3} \cdot i^{\alpha_4} \cdot \Theta^{\alpha_5} \cdot S^{\alpha_6} \cdot p^{\alpha_7}$ über Producte $P_k = k^{\beta_1} \cdot \Delta^{\beta_2} \cdot \mathsf{T}^{\beta_3}$.

Jede Ueberschiebung von der Form:

$$[P_f, k\mathsf{T}]^\varrho \quad \text{und} \quad [P_f, \Delta\mathsf{T}]^\varrho$$

ist auszulassen, da sie ein zerfallendes Glied von der Form $f_4 \cdot (H\mathsf{T})^6 \cdot P_f$ enthält. Es ist ferner jede Ueberschiebung

$$[P_f, k^2 \cdot P_k]^\varrho; \; [P_f, k\Delta \cdot P_k]^\varrho; \; [P_f, \Delta^2 P_k]^\varrho$$

überflüssig, sobald P_f den wirklichen Factor f oder i enthält, da ein Theil der Ueberschiebung eine Invariante von der Form $f_{k\lambda}$, $i_{k\Delta}$ u. s. w. zum Factor hat. Die Ueberschiebungen:

$$[P_f, k^2\mathsf{T}]^\varrho, \quad [P_f, k\Delta\mathsf{T}]^\varrho, \quad [P_f, \Delta^2\mathsf{T}]^\varrho$$

fallen aus: weil man T und den anderen Factor von P_k auf zwei verschiedene Factoren von P_f vertheilen kann und man hierdurch einen zerfallenden Theil erhält. Alle Ueberschiebungen:

$$[P_f, k^3 P_k]^\varrho; \; [P_f, k^2 \Delta P_k]^\varrho \text{ u. s. w.}$$

fallen aus, sobald P_f H oder p zum Factor hat. Es bleiben daher nur Ueberschiebungen von der Form:

$$[\Theta^{\alpha_1} \cdot T^{\alpha_2} \cdot S^{\alpha_3}, T_k]^\varrho$$

zu untersuchen. Wegen der Ordnung der Covarianten Θ_x^{14}, T_x^{18}, S_x^{18} und der Zahlengleichengleichungen $14 = 2 \cdot 4 + 6$ und $18 = 3 . 4 + 6$ enthalten diese aber stets ein zerfallendes Glied, sobald P_k den Factor $\mathsf{T}_x{}^6$ enthält. Es bleiben daher nur Ueberschiebungen von der Form

$$[\Theta^{\alpha_1} \cdot T^{\alpha_2} \cdot S^{\alpha_3}, k^{\beta_1} \Delta^{\beta_2}]^\varrho$$

übrig, oder wegen der Zahlengleichungen $2 \cdot 14 = 7 \cdot 4$, $2 \cdot 18 = 4 \cdot 9$ und $14 + 18 = 4 \cdot 8$ nur die Ueberschiebungen:

$$[\Theta^2, P_k]^\varrho, \; [\Theta T, P_k]^\varrho, \; [T^2, P_k]^\varrho \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber nach Clebsch's „Binären Formen“ pag. 119

$$\Theta^2 = -\frac{1}{2}[H \cdot i^2 - 2p \cdot f \cdot i + (ii)^2 \cdot f^2].$$

Es führt also $[\Theta^2, P_k]^\varrho$ von schon untersuchten Ueberschiebungen abgesehen auf: $[(ii)_2 \cdot f^2, P_k]^\varrho$. Eine Abzählung ergiebt aber, dass $(ii)_2$ durch die Formen: H_2, $f \cdot f_4$, $A \cdot H$, ki linear dargestellt werden kann, also $[(ii)_2 f^2, P_k]^\varrho$ durch $[H_2, P_k]^\varrho$, $[f \cdot f_1, P_k]^\varrho$, $[AH, P_k]^\varrho$ und $[k \cdot i, P_k]^\varrho$ ausdrückbar ist. Wir können nun nicht direct sagen, dass auch diese durch Theile ersetzt werden dürfen, da sie nicht in dem Schema $[P_f, P_k]^\varrho$ enthalten sind. Die dritte ist allerdings in diesem Schema enthalten; die anderen können aber durch Ueberschiebungen von der Form

$$[H, P_k]^{\varrho_1} [f^2, P_k]^{\varrho_2} [i, P_k]^{\varrho_3}$$

ersetzt werden und sind mit diesen auszulassen. (Vergleiche Clebsch pag. 276.)

Es ist ferner

$$T^2 = -\frac{1}{2}[(HH)_2 \cdot f^2 - 2(Hf)^2 \cdot H \cdot f + H^3],$$

und da

$$(HH)_2 = m_1 pf + m_2 \cdot Hi + m_3 f^2 k, \quad (Hf)_2 = \frac{5}{22} if$$

ist, so führt $[T^2, P_k)^\varrho$ auf frühere Productenüberschiebungen und $[f^2 \cdot k, P_k)^\varrho$ zurück; aber auch das letztere ist durch Formen $[f^2, P_k]^{\varrho_1}$ darstellbar.

Ebenso ist

$$S^2 = -\frac{1}{2}[(HH)_2 i^2 - 2(Hi)^2 Hi + (ii)^2 H^2]$$

auszulassen, da

$$(Hi)^2 = m_1 f \cdot f_2 + m_2 i^2 + m_3 Hk + m_4 Af^2$$

ist.

Analog erhält man:

$$\Theta \cdot T = -\frac{1}{2}[(Hf)^2 if - H^2 i - (Hi)^2 \cdot f^2 + pfH],$$

$$\Theta \cdot S = -\frac{1}{2}[(Hf)^2 \cdot i^2 - piH - (Hi)^2 \cdot fi + (ii)_2 f \cdot H],$$

$$S \cdot T = -\frac{1}{2}[(HH)_2 \cdot fi - (Hi)_2 fH - (Hf)_2 Hi + pH^2];$$

und beweist dann analog dem Obigen auch die Auslassbarkeit der Ueberschiebungen dieser Producte über P_k.

§ 8.

Aufstellung des vollen Systems.

Wir können nunmehr zur Aufstellung des vollen Systems schreiten, womit natürlich nicht gesagt ist, dass auch unter den restirenden Formen eine oder die andere auszulassen ist.

1. *Formen 1. Grades:* f.
2. *Formen 2. Grades:* H, i, k, A.
3. *Formen 3. Grades:* Θ, p, T, B, f_1, f_2, f_3, f_4.
4. *Formen 4. Grades:* S, Δ, H_1, H_2, H_3, i_1, i_2, i_3, i_4, C.
5. *Formen 5. Grades:* Θ_Δ, p_1, p_2, p_3, $f_{k,1}$, $f_{k,2}$, $f_{k,3}$, $f_{k,k}$, f', f'', f''', f_Δ.
6. *Formen 6. Grades:* T, D, $i_{k,1}$, $i_{k,2}$, $i_{k,3}$, $i_{k,k}$, H''', H_Δ, i', i'', i''', i_Δ.
7. *Formen 7. Grades:* p''', p_Δ, f_k', f_k'', f_k''', $f_{k\Delta}$, $(f\mathsf{T})^{2+\iota}$, $(i = 0 \text{ bis } i = 4)$.
8. *Formen 8. Grades:* i_k', i_k'', i_k''', $i_{k\Delta}$, $(H\mathsf{T})^{4+\iota}$, $(i\mathsf{T})^{2+\iota}$.
9. *Formen 9. Grades:* $(p\mathsf{T})^{4+\iota}$, $(f_k\mathsf{T})^{3+i}$, f_Δ', f_Δ'', f_Δ''', $f_{\Delta\Delta}$.
10. *Formen 10. Grades:* $\underset{i=0,\,\iota=1}{(i_k\mathsf{T})^{3+\iota}}$, H_Δ''', $H_{\Delta\Delta}$, i_Δ', i_Δ'', i_Δ''', $i_{\Delta\Delta}$.
11. *Formen 11. Grades:* p_Δ''', $p_{\Delta\Delta}$, $(f_\Delta\mathsf{T})^3$, $(f_\Delta\mathsf{T})^4$.
12. *Formen 12. Grades:* $(H_\Delta\mathsf{T})^{4+\iota}$, $(i_\Delta\mathsf{T})^3$, $(i_\Delta\mathsf{T})^4$.
13. *Formen 13. Grades:* $(p_\Delta\mathsf{T})^{4+i}$.
14. *Formen 14. Grades:* $H_{\Delta\Delta}''$, $H_{\Delta\Delta}'''$, $H_{\Delta\Delta\Delta}$.
15. *Formen 15. Grades:* $p_{\Delta\Delta}''$, $p_{\Delta\Delta}'''$, $p_{\Delta\Delta}$.
16. *Formen 16. Grades:* $(H_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_3$, $(H_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_4$.
17. *Formen 17. Grades:* $(p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_3$, $(p_{\Delta\Delta}\mathsf{T})_4$.*)

Darmstadt, Februar 1880.

---

*) Anm. der Red. Dem Herrn Verf. sind die neueren Untersuchungen Sylvester's über vollständige Formensysteme unzugänglich gewesen. In einer auf p. 223 des zweiten Bandes des American Journal of Mathematics abgedruckten Tabelle giebt Sylvester die Zahl der Grundformen des zur binären Form 8. Ordnung gehörigen Systems auf 70, ausserdem Grad und Ordnung der Grundformen an. Es wird eine wichtige und dankenswerthe Aufgabe sein, die von Herrn v. Gall entwickelten Ueberlegungen so weit auszubilden, dass sie mit diesen Angaben übereinstimmen. [Juni 1880.]