Über den Aufbau der transfiniten Arithmetik.

Von

Ernst Jacobsthal in Berlin.

Vorwort.

Die Begründung der arithmetischen Eigenschaften der transfiniten Ordnungszahlen ist von Georg Cantor auf einem nicht völlig einheitlichen Wege gegeben worden.*) Die Addition und Multiplikation und die Gesetze, denen diese beiden Operationen unterworfen sind, stützt Cantor auf mengentheoretische Verknüpfungen. Es wird zurückgegangen auf die Definition der Ordnungszahlen durch wohlgeordnete Mengen; zwei oder mehr derartige Mengen werden nach bestimmten Regeln komponiert, und die Ordnungszahl der resultierenden wohlgeordneten Menge wird als die Summe oder das Produkt der den Komponenten entsprechenden Ordnungszahlen bezeichnet.

Um den Potenzbegriff zu erhalten, hat Cantor einen anderen Weg eingeschlagen; es ist das — kurz gesprochen — der Weg der transfiniten Induktion.

Beide Methoden haben ihre Vorzüge. Da die erste Methode aus derjenigen Quelle schöpft, aus der sowohl der Ordinalzahl- als auch der Kardinalzahlbegriff fließt, so ist sie besonders geeignet, die Eigenschaften der Ordinalzahlen nutzbar zu machen für Fragen, die die Kardinalzahlen betreffen. So hat F. Hausdorff den Potenzbegriff nach der ersten Methode definiert**) und G. Hessenberg aus dieser Definition einen außerordentlich kurzen und einfachen Beweis des Satzes über die Multiplikation zweier Alefs abgeleitet.***)

---

*) G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, Math. Ann. Bd. 49.

**) F. Hausdorff: 1) Berichte der Math.-Phys. Klasse der kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Bd. LVIII, 26. II. 1906. Untersuchungen über Ordnungstypen, I. Die Potenzen von Ordnungstypen. 2) Math. Ann., Bd. 65. Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen.

***) G. Hessenberg: Potenzen transfiniter Ordnungszahlen. Jahresberichte der Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. 16. Heft 2. Wir zitieren diese Arbeit mit: P. t. O.

Dagegen hat die zweite Methode, die einen mehr arithmetisch-funktionalen Charakter zeigt, den Vorzug, die den Operationen wesentlichen Eigenschaften zum Zwecke der Definition an die Spitze zu stellen und deutlich die arithmetischen Voraussetzungen hervortreten zu lassen, die den Operationen und ihren Gesetzen zugrunde liegen. Und vor allem zeigt sich, daß man bei diesem Verfahren eine ganze Reihe analoger Sätze über Summen, Produkte und Potenzen von Ordnungszahlen auf allgemeiner funktionaler Grundlage mit einem Schlage beweisen und dadurch zugleich die eigentlichen Quellen und Voraussetzungen dieser Sätze und den Grund dieser Analogien kennen lernen kann. Ein sehr wesentlicher Vorteil des induktiven Definitionsverfahrens scheint mir aber auch darin zu liegen, daß es leicht ist, mit Hilfe dieses Verfahrens zu Operationen oder Funktionen mit vorgeschriebenen Eigenschaften zu gelangen.

Diese Methode setzt nur die beiden folgenden Sätze über Ordnungszahlen voraus:

A) *Jede Menge*) von Ordnungszahlen ist wohlgeordnet.*

B) *Zu jeder Menge von Ordnungszahlen* α *gibt es eine Zahl* μ, *die für jedes dieser* α *die Bedingung* $\mu > \alpha$ *erfüllt.*

Nach A) gibt es dann ein kleinstes derartiges μ, das wir mit $\bar{\alpha}$ bezeichnen. Gibt es unter den gegebenen Zahlen α keine größte, dann hat $\bar{\alpha}$ keine unmittelbar vorhergehende Zahl, und $\bar{\alpha}$ heißt dann der *Limes* der Zahlen α, in Zeichen: $\bar{\alpha} = \lim \alpha$. Diese Limeszahl $\bar{\alpha}$ erfüllt die beiden charakteristischen Bedingungen:

a) *Wenn für eine Zahl* β *jedes* α *kleiner als* β, *d. h. wenn* $\alpha < \beta$ *ist, dann ist* $\bar{\alpha} \leqq \beta$.

b) *Wenn* $\beta < \bar{\alpha}$ *ist, dann gibt es ein* α, *so daß* $\beta < \alpha < \bar{\alpha}$ *ist.*

Den Limes der endlichen Zahlen $0, 1, 2, 3, \cdots$ bezeichnet man mit ω**); diese Zahl ist die erste Limeszahl.

Im folgenden wird viel benutzt der Satz von der *transfiniten Induktion.* Er lautet***): *Wenn eine Behauptung* $\varphi(\alpha)$ *folgenden Bedingungen genügt:*

1) $\varphi(\alpha)$ ist richtig für $\alpha = \beta$,
2) aus der Richtigkeit von $\varphi(\alpha)$ für jedes der Bedingung $\beta \leqq \alpha < \alpha'$ genügende α folgt auch die Richtigkeit von $\varphi(\alpha')$,

so ist $\varphi(\alpha)$ *für jedes* $\alpha \geqq \beta$ *richtig.*

---

*) Wir legen den von Zermelo eingeführten Mengenbegriff zugrunde. Math. Annalen, Bd. 65: Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I.

**) Transfinite Zahlen bezeichnen wir mit griechischen, endliche Zahlen mit lateinischen Buchstaben.

***) Man vgl. G. Cantor, l. c. pag. 231 f., F. Hausdorff, pr. l. c. pag. 127 f. und A. Schoenflies: Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Jahresberichte der Deutschen Mathem.-Vereinigung, Bd. 8. pag. 45.

Denn gäbe es Zahlen $\alpha > \beta$, für die $\varphi(\alpha)$ falsch wäre, so gäbe es unter ihnen nach A) eine kleinste Zahl α'. Es wäre also $\varphi(\alpha')$ falsch, aber $\varphi(\alpha)$ richtig für jedes der Bedingung $\beta \leqq \alpha < \alpha'$ genügende α. Da das 2) widerstreitet, muß $\varphi(\alpha)$ richtig sein für jedes $\alpha \geqq \beta$.

Mit Hilfe dieses Satzes von der transfiniten Induktion werden in § 1 Operationen oder Funktionen zweier Variabeln definiert, unter denen als ganz spezielle Fälle die Addition, Multiplikation und Potenzierung enthalten sind. Der Verlauf dieser Funktionen läßt sich durch Aufstellung von Ungleichungen in gewisser Weise beschreiben; es zeigt sich, daß für jede derartige Operation gewisse Zahlen — *Hauptzahlen* der Funktion nennen wir sie — von hervorragender Bedeutung sind, die das eigentümliche Verhalten dieser Funktionen charakterisieren und deren Studium für die Untersuchung der Funktionen wichtig ist. Doch will ich an dieser Stelle keine Einzelheiten hervorheben. — In den folgenden Paragraphen*) werden speziell die Addition, die Multiplikation und Potenzierung als Anwendung der allgemeinen Prinzipien behandelt. Von den hier sich bietenden Spezialfragen erwähne ich nur die, die sich auf den Begriff der Primzahl und auf die Divisoren und Vielfachen gegebener Zahlen beziehen; gerade für diese Fragen sind die Untersuchungen wichtig, die die oben erwähnten Hauptzahlen betreffen. Es zeigt sich, daß unter allen betrachteten Operationen die Addition eine ausgezeichnete Stellung einnimmt. Ist die endliche Zahlentheorie multiplikativer Art, so sind es im Bereich der transfiniten Zahlen die additiven Gesetze, denen eine entsprechende Bedeutung zukommt. Diese Vollkommenheit und durchsichtige Gesetzmäßigkeit tritt bei den multiplikativen Formeln nicht immer auf. Es liegt das zum Teil an der Ungültigkeit des kommutativen Gesetzes; die Vollkommenheit der additiven Gesetze wird, trotzdem auch hier das kommutative Prinzip nicht gilt, gewährleistet durch die charakteristische Eigenschaft der additiven Hauptzahlen, für die additive Operation Primzahlen zu sein.

§ 1.

Funktionen transfiniter Variabeln.

Bedeutet α eine beliebige Ordnungszahl, dann bezeichnen wir die auf α unmittelbar folgende Zahl mit $s(\alpha)$.

Es sei nun β_0 eine bestimmte Ordnungszahl und jeder Ordnungszahl $\alpha \geqq \beta_0$ sei eine eindeutig bestimmte Ordnungszahl zugeordnet, d. h. es sei

*) § 3 enthält als Fortsetzung von § 1 allgemeine Untersuchungen; die in § 2 entwickelte Addition wird hier benutzt, und es zeigt sich, daß sie allen anderen Funktionen gegenüber eine besondere Stellung einnimmt.

eine Funktion $w(\alpha)$ gegeben, die für jeden Wert $\alpha \geqq \beta_0$ eindeutig definiert sei, wobei die Funktionswerte wieder Ordnungszahlen sind; $w(\alpha)$ *besitze die Eigenschaft, beständig zu wachsen;* es gelte also stets:

(a) *aus* $\alpha > \alpha' \geqq \beta_0$ *folge* $w(\alpha) > w(\alpha')$.

Unter dieser Voraussetzung kann $w(\alpha)$ nach unten hin abgeschätzt werden. Denn es gilt

Satz I. *Bedeutet* λ_0 *die kleinste nicht unterhalb* β_0 *gelegene Zahl, für die* $w(\lambda_0) \geqq \lambda_0$ *ist, dann ist* $w(\alpha) \geqq \alpha$ *für jedes der Bedingung* $\alpha \geqq \lambda_0$ *genügende* α.

Dieser Satz ist evident für die Funktion $w(\alpha) = s(\alpha)$, da ja $s(\alpha) > \alpha$ ist für $\alpha \geqq 0$. In § 2 benutzen wir nun gerade diese Funktion $w(\alpha) = s(\alpha)$. Also sind alle Folgerungen, die wir aus I ziehen, für den Inhalt von § 2 als bindend anzusehen. Es wird I in seiner Allgemeinheit erst hinterher mit den in § 2 entwickelten Hilfsmitteln bewiesen werden. — Wir können hier jedenfalls ohne Schwierigkeit einen Teil von I beweisen, nämlich folgendes: ist für eine Zahl $\xi \geqq \beta_0$ die Ungleichung $w(\xi) \geqq \xi$ erfüllt, dann ist $w(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha \geqq \xi$.

Nach dem Satz von der transfiniten Induktion ist nur zu zeigen, daß $w(\alpha') \geqq \alpha'$ ist, falls für jedes der Beziehung $\alpha' > \alpha \geqq \xi$ genügende α stets $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist. Ist nun α' keine Limeszahl, d. h. $\alpha' = s(\alpha'') > \alpha'' \geqq \xi$, dann ist $w(\alpha'') \geqq \alpha''$, also nach (a):

$$w(\alpha') > w(\alpha'') \geqq \alpha'', \quad \text{d. h.} \quad w(\alpha') \geqq s(\alpha'') = \alpha'.$$

Ist aber α' Limeszahl, dann besitzt wegen (a) die Zahlenfolge $w(\alpha)$ $(\xi \leqq \alpha < \alpha')$ einen Limes ϑ und da nach (a) $w(\alpha') > w(\alpha)$ ist, so ist $w(\alpha') \geqq \vartheta$; andererseits ist nach Voraussetzung für jedes dieser α auch $w(\alpha) \geqq \alpha$, also $\vartheta = \lim\limits_{\alpha < \alpha'} w(\alpha) \geqq \lim \alpha = \alpha'$. Somit ist $w(\alpha') \geqq \vartheta \geqq \alpha'$.

Aus diesem Beweise geht hervor, daß es, um I in seinem ganzen Umfange zu beweisen, nur noch nötig ist, die Existenz *einer* Zahl ξ nachzuweisen, die der Beziehung $w(\xi) \geqq \xi$ genügt. Das wird eben später nachgeholt werden.

Um nun unsere Funktionen zweier Variabeln definieren zu können, müssen wir außer $w(\alpha)$ noch eine Funktion zweier Variabeln, die eine einfache Eigenschaft hat, als gegeben annehmen.

Es sei $g(\xi, \eta)$ eine für $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta_0$ eindeutig erklärte Funktion von ξ und η; *es besitze* $g(\xi, \eta)$ *die Eigenschaft, beständig größer als das erste Argument* ξ *zu sein,* in Zeichen:

(b) *es sei* $g(\xi, \eta) > \xi$ *für jedes Wertepaar* $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta_0$.

Eine solche Funktion ist speziell $g(\xi, \eta) = s(\xi)$ $(\xi_0 = \eta_0 = 0)$, die von η gar nicht abhängt.

Aus Satz I folgt, daß für $\alpha \geqq \max(\xi_0, \lambda_0)$ stets $w(\alpha) \geqq \alpha \geqq \xi_0$ ist.

Es werde nun unter den Zahlen $\alpha \geqq \max(\eta_0, \lambda_0)$ die kleinste, die der Beziehung $w(\alpha) \geqq \xi_0$ genügt, mit λ bezeichnet; *die Zahl λ ist also die kleinste Zahl, die die beiden Bedingungen $\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0)$, $w(\lambda) \geqq \xi_0$ zugleich erfüllt.*

Wir definieren nun eine Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit Hilfe von $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$.

Satz II.*) *Es gibt für den Variabilitätsbereich $\alpha \geqq \lambda$, $\beta \geqq 1$ der Veränderlichen α und β eine einzige, völlig bestimmte, eindeutige Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $$f(\alpha, 1) = w(\alpha)^{**}),$$

(2) $$f(\alpha, s(\beta)) = g(f(\alpha, \beta), \alpha),$$

(3) $$f(\alpha, \bar{\beta}) = \lim_{\beta} f(\alpha, \beta),$$

wenn $\bar{\beta}$ eine Limeszahl bedeutet, und β auf der rechten Seite der Gleichung (3) *alle Zahlen $\beta < \bar{\beta} = \lim \beta$ durchläuft.*

Beweis. Nach (1) ist $f(\alpha, 1)$ für $\alpha \geqq \lambda$ eindeutig definiert und nach Gleichung (2) und Voraussetzung (b) ist $f(\alpha, 2) = g(f(\alpha, 1), \alpha) > f(\alpha, 1)$, da ja $\alpha \geqq \lambda$ ist und λ derart bestimmt war, daß zugleich die Bedingungen $f(\alpha, 1) = w(\alpha) \geqq \xi_0$ und $\alpha \geqq \eta_0$ erfüllt sind. Nehmen wir nun an, die Existenz der Funktion mit allen behaupteten Eigenschaften sei für den Variabilitätsbereich $\alpha \geqq \lambda$, $1 \leqq \beta < \beta'$ nachgewiesen, so ist nur noch zu zeigen, daß die Funktion auch in dem Bereich $\alpha \geqq \lambda$, $1 \leqq \beta \leqq \beta'$ existiert und die verlangten Eigenschaften besitzt. Dann folgt nach dem Satz von der transfiniten Induktion die Behauptung in ihrem ganzen Umfange.

Sei also β' erstens keine Limeszahl, d. h. $\beta' = s(\beta'')$; dann ist $f(\alpha, \beta'')$ erklärt, und nach (2) folgt: $f(\alpha, \beta') = g(f(\alpha, \beta''), \alpha)$. Also ist auch $f(\alpha, \beta')$ eindeutig erklärt. Ist aber β' eine Limeszahl, dann beachte man, daß aus (2) und (b) in Verbindung mit (3) folgt: $f(\alpha, \beta)$ wächst bei konstantem α zugleich mit β. Also ist nach (3) auch $f(\alpha, \beta')$ eindeutig erklärt durch die Gleichung $f(\alpha, \beta') = f(\alpha, \lim \beta) = \lim_{\beta} f(\alpha, \beta)$.

Zugleich folgt aus dem Beweise, daß $f(\alpha, \beta)$ mit β zugleich wächst, wenn α konstant bleibt. Diese wichtige Tatsache mit den sich daraus unmittelbar ergebenden Folgerungen heben wir hervor durch

Satz III. *Ist $\alpha \geqq \lambda$***) und $\beta > \beta' \geqq 1$, dann ist $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \beta')$; ist $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \beta')$, so ist umgekehrt $\beta > \beta'$; aus $f(\alpha, \beta) = f(\alpha, \beta')$ folgt $\beta = \beta'$.*

---

*) Wir schließen uns hier eng an G. Cantor an, l. c. pag 231 f.

**) Es erweist sich im Hinblick auf die Anwendungen nicht als zweckmäßig, $f(\alpha, 0) = w(\alpha)$ zu setzen.

***) Das erste Argument von f wird in § 1 stets nicht unterhalb λ angenommen, falls nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt wird.

Die Gleichung (3) definiert $f(\alpha, \bar{\beta})$ für den Fall, daß $\bar{\beta}$ eine Limeszahl ist, durch eine Limesreihe, aber dabei werden alle Zahlen $\beta < \bar{\beta}$ benutzt. Es ist aber, um zu $f(\alpha, \bar{\beta})$ zu gelangen, nur nötig, irgend eine Reihe zu benutzen, deren Limes die Zahl $\bar{\beta}$ ist. Es gilt nämlich:

Satz IV. *Sei eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann besteht die Gleichung $f(\alpha, \bar{\beta}) = f(\alpha, \lim \delta) = \lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$.*

Beweis. Da $\bar{\beta} > \delta$ ist, so ist nach III auch $f(\alpha, \bar{\beta}) > f(\alpha, \delta)$; also ist $f(\alpha, \bar{\beta}) \geqq \sigma$, wenn σ die Zahl $\lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta)$ bezeichnet. Die Behauptung besagt: $f(\alpha, \bar{\beta}) = \sigma$, also ist nur aus $f(\alpha, \bar{\beta}) > \sigma$ ein Widerspruch zu folgern. Sei also $f(\alpha, \bar{\beta}) = \lim\limits_{\beta<\bar{\beta}} f(\alpha, \beta) > \sigma$, so folgt aus dem Begriff des Limes die Existenz einer Zahl $\beta' < \bar{\beta}$, so daß $f(\alpha, \beta') > \sigma$ ist, d. h. es ist $f(\alpha, \beta') > \sigma = \lim\limits_{\delta} f(\alpha, \delta) > f(\alpha, \delta)$ für jedes der gegebenen δ. Also ergibt sich nach III: $\beta' > \delta$ und daher $\beta' \geqq \lim \delta = \bar{\beta}$, während doch $\beta' < \bar{\beta}$ ist.

Der Wert von $f(\alpha, \beta)$ läßt nun nach unten hin zwei Abschätzungen zu, je nach der Bevorzugung der Variabeln α oder β:

Satz V. *Es ist $f(\alpha, \beta) \geqq \alpha$, wobei aber das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn zugleich $\alpha = w(\alpha)$ und $\beta = 1$ ist. — Ist $\alpha > 0$, dann ist $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$. Für $\lambda = 0$ ist aber auch $f(0, \beta) \geqq \beta$ für jedes überendliche β.*

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil: Es ist $f(\alpha, 1) = w(\alpha) \geqq \alpha$; für $\beta > 1$ folgt somit aus III: $f(\alpha, \beta) > f(\alpha, 1) \geqq \alpha$. Ist $w(\alpha) > \alpha$, dann ist aber auch noch $f(\alpha, 1) > \alpha$. Also ist $f(\alpha, \beta) = \alpha$ dann und nur dann, wenn $\beta = 1$ und $w(\alpha) = \alpha$ ist. — Der zweite Teil des Satzes folgt aus III in Verbindung mit I. Es ist nämlich $f(\alpha, \beta)$ bei konstantem α eine wachsende Funktion von β. Gibt es nun eine Zahl β, für die $f(\alpha, \beta) < \beta$ ist, dann folgt aus dem Beweise von I, daß auch $w(\alpha) = f(\alpha, 1) < 1$ ist; und da für $\alpha \geqq \lambda$ auch $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist, so folgt: $\alpha < 1$, d. h. $\alpha = 0$. Also ist für $\alpha > 0$ stets $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$. Daß aber für $\lambda = 0$ auch $f(0, \beta) \geqq \beta$ ist, falls $\beta \geqq \omega$ ist, folgt aus I; denn $f(0, \beta)$ ist eine wachsende Funktion von β und nach dem Beweise von I ergibt sich unsere Behauptung, wenn wir nur wissen, daß $f(0, \omega) \geqq \omega$ ist. Diese Gleichung ist aber richtig, da ja nach Definition $f(0, \omega)$ eine Limeszahl, ω aber die erste Limeszahl ist.

Ist β und α gegeben, so wird es im allgemeinen nicht möglich sein, zu entscheiden, ob die Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ eine Wurzel ξ hat oder nicht. Gibt es eine solche Zahl ξ, so gibt es nur eine einzige, wie aus III folgt; ξ ist dann eine durch α und β eindeutig bestimmte Zahl, eine Funktion von α und β, und es gibt dann eine zu f inverse Operation, die eindeutig ist. Es läßt sich aber im allgemeinen nicht entscheiden, für welche Wertepaare α, β diese inverse Operation definiert ist. Ein Satz läßt sich aber doch in dieser Richtung aussagen, der für die Addition die völlige Entscheidung über die Auflösbarkeit der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ geben wird; für die Multiplikation liefert uns dieser Satz später den Euklidischen Algorithmus, und für die Potenzlehre werden wir aus ihm die Entwicklung einer Zahl β nach Potenzen von α folgern. Unser Satz lautet:

Satz VI. *Sei β gegeben und α eine der Beziehung $w(\alpha) \leqq \beta$ genügende Zahl ($\geqq \lambda$), dann existiert eine einzige wohlbestimmte Zahl ξ ($\geqq 1$), so daß die Beziehung $f(\alpha, s(\xi)) > \beta \geqq f(\alpha, \xi)$ erfüllt ist. Im allgemeinen ist $\xi \leqq \beta$. Nur für $\alpha = 0$ und endliches ξ kann $\xi > \beta$ sein, also nur dann, wenn $\alpha = 0$, $\beta < \omega$, $\xi < \omega$ ist. Ist $\alpha > 0$, dann folgt aus $\xi = \beta \geqq f(\alpha, \beta) \geqq \beta$, daß $\beta = f(\alpha, \beta)$ ist.*

Beweis. Sei $\alpha \geqq \lambda$ eine Zahl, für die $\beta \geqq w(\alpha) = f(\alpha, 1)$ ist. Also gibt es Zahlen ξ', für die $\beta \geqq f(\alpha, \xi')$ ist, und unsere Behauptung lautet einfach dahin: Unter diesen Zahlen ξ' gibt es eine größte. Gäbe es kein größtes ξ', so sei $\bar{\xi}$ der Limes dieser Zahlen ξ', und aus $\beta \geqq f(a, \xi')$ folgt: $\beta \geqq \lim\limits_{\xi'} f(\alpha, \xi') = f(\alpha, \bar{\xi})$, d. h. $\bar{\xi}$ wäre eine der Zahlen ξ', deren Limes $\bar{\xi}$ ist. Also kann $\bar{\xi}$ nicht existieren. Die Größen ξ' besitzen somit ein Maximum ξ, d. h. es ist $f(\alpha, s(\xi)) > \beta \geqq f(\alpha, \xi)$. Daß nur eine Zahl ξ diesen Bedingungen genügt, folgt leicht aus III. Nach V ist für $\alpha > 0$ stets $f(\alpha, \xi) \geqq \xi$, also ist $\xi \leqq \beta$, wenn $\alpha > 0$ ist. Und da auch $f(0, \xi) \geqq \xi$ für $\xi \geqq \omega$ ist, so kann $\xi > \beta$ nur für $\alpha = 0$ und $\xi < \omega$ stattfinden. Daß für $\alpha > 0$ und $\xi = \beta$ die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ folgt, ergibt sich ebenfalls aus V.

Ob es Wertepaare gibt, für die die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ erfüllt ist, wissen wir bis jetzt noch nicht; aber gerade diese Frage hängt mit wichtigen Eigenschaften von f zusammen, die wir noch kennen lernen werden. Gerade weil für die Funktion $f(\alpha, \beta)$ die Variabeln α und β verschiedene Rollen spielen (bereits bei der Definition von f), treten diese Eigenschaften auf. Diese Verschiedenartigkeit zeigt sich ja auch in Satz V: im allgemeinen ist $f(\alpha, \beta) > \alpha$, dagegen $f(\alpha, \beta) \geqq \beta$; wir werden gerade sehen, daß es stets Zahlen β gibt, für die $f(\alpha, \beta) = \beta$ ist. Aber auch in III zeigt sich der Unterschied der Variabeln: $f(\alpha, \beta)$ wächst bei konstantem α mit β zugleich; aber trotzdem $f(\alpha, \beta)$ für $\beta = 1$ mit wachsendem α wächst, gilt das keineswegs für beliebiges konstantes β, und es kann auch nie gelten, wie wir später sehen werden. Wohl aber läßt sich erreichen, daß bei konstantem β die Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit wachsendem α nie abnimmt, falls wir noch eine Voraussetzung über die Funktion $g(\xi, \eta)$ machen. Wir unterwerfen $g(\xi, \eta)$ der weiteren Bedingung:

(c) *aus $\xi \geqq \xi' \geqq \xi_0$, $\eta \geqq \eta' \geqq \eta_0$ folge $g(\xi, \eta) \geqq g(\xi', \eta')$, d. h. wenn beide Variabeln ξ, η nicht abnehmen, soll auch $g(\xi, \eta)$ nicht abnehmen.*

Die schärfere Bedingung:

(c′) *aus* $\xi \geqq \xi' \geqq \xi_0$, $\eta > \eta' \geqq \eta_0$ *folge*

$$g(\xi, \eta) > g(\xi', \eta') \quad \text{und} \quad g(\xi, \eta') \geqq g(\xi', \eta'),$$

werden wir nicht immer voraussetzen; wir werden aber stets, falls wir aus (c′) Folgerungen ziehen, ausdrücklich hinzusetzen, daß wir statt (c) die schärfere Bedingung (c′) vorausgesetzt haben.

Satz VII. *Ist $\alpha \geqq \alpha' \geqq \lambda$, dann ist $f(\alpha, \beta) \geqq f(\alpha', \beta)$; also folgt aus $f(\alpha, \beta) > f(\alpha', \beta)$, daß $\alpha > \alpha'$ ist. Setzt man statt* (c) *die Bedingung* (c′) *voraus, dann wächst die Funktion $f(\alpha, \beta)$ mit α, wenn β eine konstante Zahl ohne unmittelbar vorhergehendes Element ist, d. h. ist $\alpha > \alpha' \geqq \lambda$, dann ist $f(\alpha, s(\beta')) > f(\alpha', s(\beta'))$ für $\beta' \geqq 0$; also folgt aus $f(\alpha, s(\beta')) = f(\alpha', s(\beta'))$, daß $\alpha = \alpha'$ ist, und wenn $f(\alpha, \beta) = f(\alpha', \beta)$ für $\alpha > \alpha'$ ist, dann ist β eine Limeszahl.*

Beweis. Wir beweisen zunächst nur den ersten Teil des Satzes, der sich auf (c) stützt. Da für $\beta = 1$ der Satz richtig ist, so ist nur noch unter der Annahme, daß er für $\beta < \beta'$ gilt, zu zeigen, daß er auch für $\beta = \beta'$ gilt. Der Satz gelte also als bewiesen für $\beta < \beta'$; dann ist $\beta' \geqq 2$. Sei erstens β' keine Limeszahl, $\beta' = s(\beta'')$, $\beta'' \geqq 1$; daher ist für $\alpha \geqq \alpha'$ auch $f(\alpha, \beta'') \geqq f(\alpha', \beta'')$. Weiter ist

$$f(\alpha, \beta') = g(f(\alpha, \beta''), \alpha) \geqq g(f(\alpha', \beta''), \alpha') = f(\alpha', \beta').$$

Sei zweitens β' eine Limeszahl, also für $\alpha \geqq \alpha'$ und $\beta < \beta'$ nach Voraussetzung $f(\alpha, \beta) \geqq f(\alpha', \beta)$; läßt man hier β gegen β' konvergieren, so folgt $f(\alpha, \beta') \geqq f(\alpha', \beta')$. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Wir setzen nun (c′) voraus. Es ist für $\alpha > \alpha'$ nach (a):

$$f(\alpha, 1) > f(\alpha', 1).$$

Sei $s(\beta') > 1$, d. h. $\beta' \geqq 1$. Da (c′) die Bedingung (c) enthält, so ist für $\alpha > \alpha'$ nach dem soeben Bewiesenen $f(\alpha, \beta') \geqq f(\alpha', \beta')$. Also folgt:

$$f(\alpha, s(\beta')) = g(f(\alpha, \beta'), \alpha) > g(f(\alpha', \beta'), \alpha') = f(\alpha', s(\beta')).$$

Damit ist der Satz bewiesen.

In den Vorbemerkungen zu Satz VI besprachen wir die Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$. Wenn β und α gegeben ist, dann gibt es höchstens eine Lösung ξ dieser Gleichung. Wir denkeu uns nun aber nur β fest und fragen: zu welchen α gibt es eine Lösung ξ? Doch können wir hier im allgemeinen darüber auch noch nichts aussagen, obgleich sich diese Frage für spezielle Fälle entscheiden läßt. Dagegen ist es möglich zu zeigen, daß man überhaupt nur endlich viele Wurzeln ξ erhält, wenn auch α beliebig variiert wird. Wir sprechen nämlich folgenden Satz aus:

Satz VIII. *Sei β gegeben, dann gibt es nur endlich viele Zahlen ξ, zu denen Lösungen α der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ gehören.**) *Hat jede dieser*

*) Es ist damit nicht gesagt, daß zu jedem β überhaupt solche Zahlen ξ existieren.

durch β *bestimmten Zahlen* ξ *eine unmittelbar vorhergehende Zahl, was z. B. der Fall ist, wenn* β *eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzt, so gibt es unter der Voraussetzung* (c′) *zu jedem dieser endlich vielen* ξ *genau eine Wurzel* α *der Gleichung* $\beta = f(\alpha, \xi)$.

Beweis. Sei ξ eine Zahl, zu der es eine oder mehrere Lösungen α gibt, dann bedeute α die Minimallösung; ξ_1 sei eine andere Zahl, zu der es eine Lösung gibt; α_1 sei die Minimallösung. Es werde $\xi < \xi_1$ angenommen, dann folgt: $\beta = f(\alpha_1, \xi_1) = f(\alpha, \xi) < f(\alpha, \xi_1)$. Nach VII ist daher $\alpha > \alpha_1$. Ordne ich also die Zahlen ξ nach steigender Größe, so bildet die Reihe der zugehörigen Minimallösungen eine fallende Reihe, bricht also nach endlich vielen Gliedern ab, d. h. es gibt nur endlich viele ξ, zu denen Lösungen α der Gleichung $\beta = f(\alpha, \xi)$ gehören. — Setzen wir nun (c′) voraus. Gibt es zu einem ξ zwei verschiedene Wurzeln α und α', ist also $\beta = f(\alpha, \xi) = f(\alpha', \xi)$, so ist nach dem letzten Teil von VII die Zahl ξ und somit auch $\beta = f(\alpha, \xi)$ eine Limeszahl. Wenn also ξ keine Limeszahl ist, dann gibt es nur *eine* zu ξ gehörige Zahl α, für die $\beta = f(\alpha, \xi)$ ist. Das tritt z. B. ein, wenn β keine Limeszahl ist. Es bestimmen sich dann die Zahlen α und ξ gegenseitig eindeutig.

Erklärung. *Hat eine Zahl* γ *die Eigenschaft, daß* $\gamma > \lambda$ *und* $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ *für jedes der Bedingung* $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ *genügende* α, *dann nennen wir* γ *eine Hauptzahl der Funktion* $f(\alpha, \beta)$.*)

Diese Hauptzahlen sind irreduzibel in Bezug auf die Funktion $f(\alpha, \beta)$, d. h. es kann γ nicht aus kleineren Zahlen mit Hilfe der Funktion f erzeugt werden; beschränke ich nämlich die Variabilität von α und β durch $\lambda \leqq \alpha < \gamma$, $1 \leqq \beta < \gamma$, so ist $f(\alpha, \beta) < f(\alpha, \gamma) = \gamma$, d. h. ich gelange mit Hilfe der Operation f nicht aus dem Bereich der Zahlen unterhalb γ heraus. Also findet die Funktion f in der Zahl γ eine unübersteigbare Schranke, die f hindert, aus einem vorgeschriebenen Wertevorrat ($< \gamma$) neue Zahlen ($\geqq \gamma$) zu erzeugen.

Es handelt sich nun für uns darum, die Hauptzahlen von f zu charakterisieren und aus unserer Erklärung Kriterien dafür abzuleiten, wann eine Zahl Hauptzahl der Funktion ist.

Satz IX. *Jede oberhalb* 2 *gelegene Hauptzahl ist eine Limeszahl.*

Beweis: Es sei $\beta \geqq \max(\lambda, 1)$, dann ist nach III: $f(\beta, s(\beta)) > f(\beta, \beta)$ und nach V ist $f(\beta, \beta) > \beta$, falls $\beta > 1$ oder auch noch für $\beta = 1 \geqq \max(\lambda, 1)$, falls $w(1) > 1$ ist. Somit ist $f(\beta, s(\beta)) > s(\beta)$ für $\beta > 1$ und auch noch für $\beta = 1$, falls $\lambda \leqq 1 < w(1)$ ist. Also ist $s(\beta)$ für $\beta > 1$ keine Hauptzahl, d. h. jede Hauptzahl $\gamma > 2$ ist eine Limeszahl. — Es ist sogar

*) Diese Bezeichnung wähle ich im Einverständnis mit G. Hessenberg, der den Namen Hauptzahl bereits für den Fall eingeführt hat, daß die Operation f die Addition ist.

$s(1) = 2$ keine Hauptzahl, falls $\lambda \leqq 1 < w(1)$ ist. Es kann nicht zugleich 1 und 2 eine Hauptzahl sein, denn wenn 1 eine Hauptzahl ist, so ist $\lambda = 0$ und $f(0, 1) = 1 = w(0) < w(1) = f(1, 1)$, d. h. $f(1, 1) \geqq 2$. Wäre nun noch 2 eine Hauptzahl, so müßte $f(1, 1) < 2$ sein.

Wir nennen alle Hauptzahlen $\gamma > 2$ *eigentliche Hauptzahlen;* jede eigentliche Hauptzahl ist also eine Limeszahl. Unser Satz IX leistet das Maximum dessen, was man verlangen kann, denn es gibt in der Tat Operationen, die die Zahl 1 zur Hauptzahl besitzen, und auch solche Funktionen, für die 2 eine Hauptzahl ist; für die Addition ist es die 1, die 2 für die Multiplikation.

Ebenso wie die Limeseigenschaft (3) der Funktion f durch Satz IV auf allgemeinere Limesreihen übertragen wurde, so ist die Eigenschaft einer Zahl γ, Hauptzahl zu sein, bereits in der Tatsache enthalten, daß die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für irgend eine Folge von Zahlen α gilt, deren Limes γ ist. Es wird das ausgedrückt durch

Satz X. *Es gebe zu einer Zahl γ eine Folge von Zahlen α, für die 1) $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ und 2) $\gamma = \lim \alpha$ ist, dann ist γ eine Hauptzahl der Funktion f.*

Beweis. Da stets $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ ist, so ist jedes $\alpha \geqq \lambda$; also $\gamma > \alpha \geqq \lambda$. Sei β eine Zahl, für die $\gamma > \beta \geqq \lambda$ ist, dann ist nur die Gleichung $\gamma = f(\beta, \gamma)$ zu zeigen. Da nun $\gamma > \beta$ ist, so existiert ein α derart, daß $\gamma > \alpha > \beta$ und $\gamma = f(\alpha, \gamma) \geqq f(\beta, \gamma) \geqq \gamma$ ist. Also ist $\gamma = f(\beta, \gamma)$ für jedes der Bedingung $\gamma > \beta \geqq \lambda$ genügende β, d. h. γ ist eine Hauptzahl.

Es ist nun wichtig ein Kriterium zu besitzen, das die Entscheidung über die Frage gestattet, wann eine Folge von Zahlen eine Hauptzahl zum Limes hat. Es wird dann nämlich möglich sein, derartige Zahlreihen zu konstruieren, deren Limes eine Hauptzahl ist; damit wird der Nachweis der Existenz der Hauptzahlen erbracht sein. — Dazu betrachten wir nun $h(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$; diese Funktion ist definiert für $\alpha \geqq \max(\lambda, 1)$. Aus III und VII folgt, daß für $\alpha > \alpha' \geqq \max(\lambda, 1)$ auch $h(\alpha) > h(\alpha')$ ist, und aus V folgt $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq \max(\lambda, 2)$; ist aber $\lambda = 0, 1$ und $w(1) > 1$, dann ist auch $h(1) = w(1) > 1$. — Ist nun γ eine Hauptzahl und $\gamma > \alpha \geqq \lambda$, dann ist $h(\alpha) = f(\alpha, \alpha) < \gamma$. Also hat die Gesamtheit der Zahlen $\alpha < \gamma$ die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $h(\alpha)$ der Gesamtheit angehört. Diese Eigenschaft charakterisiert aber auch γ als Hauptzahl; es gilt der

Satz XI. *Hat eine Folge von Zahlen α ($\geqq \max(\lambda, 1)$) die Eigenschaft, daß mit α zugleich $h(\alpha)$ der Folge angehört, dann hat die Folge einen Limes γ und γ ist eine Hauptzahl der Funktion f.*

Beweis. Da eine Folge mindestens zwei Zahlen enthält und hier jede $\geqq 1$ ist, so ist von der zweiten Zahl α ab $h(\alpha) > \alpha$; da mit α auch

$h(\alpha)$ der Folge angehören soll, so kann die Folge kein letztes Element ϑ besitzen, da ja auf ϑ noch das Element $h(\vartheta) > \vartheta$ folgte. Also hat die Folge einen Limes γ. Es sei nun α irgend eine der gegebenen Zahlen, dann betrachte man nur noch die Zahlen α' der Folge, die oberhalb α liegen, d. h. für die $\alpha < \alpha' < \gamma$ ist. Da auch $h(\alpha')$ der Folge angehört, so ist $h(\alpha') < \gamma$, also $\gamma > h(\alpha') = f(\alpha', \alpha') \geqq f(\alpha, \alpha') \geqq \alpha$. Läßt man nun α' gegen γ wachsen, so folgt $\gamma \geqq f(\alpha, \gamma) \geqq \gamma$, d. h. $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für jedes α der Folge, deren Limes γ ist. Nach X ist also γ eine Hauptzahl der Funktion f.

Satz XII. *Der Limes einer Folge von Hauptzahlen der Funktion f ist eine Hauptzahl derselben Funktion.*

Beweis. Eine Folge von Hauptzahlen γ besitze einen Limes $\bar{\gamma}$; es ist $\bar{\gamma} > \gamma > \lambda$. Es sei $\bar{\gamma} > \alpha \geqq \lambda$, dann betrachte ich nur noch die Hauptzahlen der Folge, die oberhalb α liegen; für sie ist $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ und wenn hierin γ gegen $\bar{\gamma}$ konvergiert, so folgt: $\bar{\gamma} = f(\alpha, \bar{\gamma})$ für jedes α, das der Bedingung $\bar{\gamma} > \alpha \geqq \lambda$ genügt. Also ist $\bar{\gamma}$ eine Hauptzahl der Funktion f. — Man kann auch so schließen: sei $\bar{\gamma} > \alpha$ und $\gamma > \alpha$ eine Zahl der Folge, dann ist $\bar{\gamma} > \gamma = f(\alpha, \gamma) > f(\alpha, \alpha) = h(\alpha)$. Also gehört mit α zugleich $h(\alpha)$ dem Bereich der Zahlen unterhalb $\bar{\gamma}$ an; daher ist $\bar{\gamma}$ nach XI eine Hauptzahl der Funktion. — Aus diesem Satz folgt: *ist β gegeben, dann gibt es unter den Hauptzahlen γ, für die $\gamma \leqq \beta$ ist, eine größte.*

Wie bereits angedeutet wurde, stützt sich der Nachweis für die Existenz der Hauptzahlen auf XI. Es sei nun im voraus bemerkt, daß für die Funktion $f(\alpha, \beta)$ auf Grund von XI die Zahl ω eine Hauptzahl ist, falls $f(\alpha, \beta)$ für endliches α und β selbst endlich ist. Allgemein aber beweisen wir die Existenz der Hauptzahlen durch folgenden

Satz XIII. *Ist α eine Zahl, für die $h(\alpha) > \alpha$ ist*), und setzt man $\alpha' = h(\alpha)$, $\alpha'' = h(\alpha')$, $\alpha''' = h(\alpha'')$, $\cdots$, dann ist die erste Hauptzahl über α der Limes der Folge $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$.*

Beweis. Da mit $\alpha^{(n)}$ zugleich auch $h(\alpha^{(n)})$ der Folge angehört, so hat nach XI diese Folge einen Limes, der eine Hauptzahl γ ist. Es ist nur noch zu zeigen, daß für jede Hauptzahl $\gamma' > \alpha$ auch $\gamma' \geqq \gamma$ ist. Das ergibt sich so: es ist $\gamma' > \alpha$ und daher

$$\gamma' = f(\alpha, \gamma') > f(\alpha, \alpha) = h(\alpha) = \alpha';$$

also
$$\gamma' = f(\alpha', \gamma') > f(\alpha', \alpha') = h(\alpha') = \alpha''.$$

Ganz allgemein folgt ebenso $\gamma' > \alpha^{(n)}$, also $\gamma' \geqq \lim\limits_{n} \alpha^{(n)} = \gamma$.

*) Es ist $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq \lambda \geqq 2$. Ist aber $\lambda = 0, 1$, so ist $h(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq 2$ und auch noch für $\alpha = 1$, wenn $w(1) > 1$ ist. (Man vgl. die Vorbemerkungen zu Satz XI.)

Damit ist nicht nur die Existenz der Hauptzahlen bewiesen, sondern auch ein Verfahren angegeben, um von einer beliebigen Zahl α zu der nächsten Hauptzahl vermittels einer Limesreihe aufzusteigen; es gibt also insbesondere noch oberhalb jeder Zahl α Hauptzahlen der Funktion. Besonders bemerkenswert erscheint es, daß man aus α die nächste über α gelegene Hauptzahl stets durch eine Reihe $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$ vom Typus ω gewinnt. Aus der Existenz der Hauptzahlen folgt nun, daß *das kommutative Gesetz für f nicht gilt.* Denn es ist für jede eigentliche Hauptzahl $\gamma = f(\alpha, \gamma)$, falls $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ ist, aber für $\alpha > 1$ ist $f(\gamma, \alpha) > \gamma$. Somit ist für $\max(\lambda, 2) \leqq \alpha < \gamma$ stets $f(\gamma, \alpha) > f(\alpha, \gamma)$. — Die Reihe

$$\alpha, \alpha' = f(\alpha, \alpha), \quad \alpha'' = f(\alpha', \alpha') = f(f(\alpha, \alpha), f(\alpha, \alpha)), \cdots$$

ist unter symmetrischer Behandlung der beiden Variabeln konstruiert; in den speziellen Fällen der Addition etc. benutzt man eine andere Reihe, die wegen gewisser Voraussetzungen, die in diesen Fällen zutreffen, auch zum Ziele führt; man konstruiere folgende Reihe: es sei

$$h(\alpha) = f(\alpha, \alpha) = \alpha' > \alpha,$$

dann setze man $\alpha' = \alpha_1, \quad \alpha_2 = f(\alpha, \alpha_1), \quad \alpha_3 = f(\alpha, \alpha_2), \cdots,$

dann ist $$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 \cdots,$$

wie leicht nachzuweisen ist. Der Limes der so konstruierten Reihe sei $\bar{\alpha}$; es ist $\bar{\alpha} = \lim\limits_n \alpha_{n+1} = \lim\limits_n f(\alpha, \alpha_n) = f(\alpha, \lim \alpha_n) = f(\alpha, \bar{\alpha})$. Also ist $\bar{\alpha}$ eine Wurzel β der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ und zwar die kleinste; denn ist β irgend eine dieser Wurzeln, so ist $\beta > \alpha$, also $\beta = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \alpha) = \alpha_1$ und daher auch ferner $\beta = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \alpha_1) = \alpha_2$; also ganz allgemein: $\beta > \alpha_n$, d. h. $\beta \geqq \bar{\alpha}$. Ob nun aber diese kleinste Wurzel $\bar{\alpha}$ der betrachteten Gleichung eine Hauptzahl ist, wird wohl im allgemeinen kaum entschieden werden können; dagegen läßt es sich sehr wohl beweisen für den Fall, daß die Funktion f das assoziative Gesetz $f(f(\alpha, \beta), \delta) = f(\alpha, f(\beta, \delta))$ erfüllt.

Da es nach XIII oberhalb jeder Zahl Hauptzahlen gibt, so gibt es also zu jedem $\alpha \geqq \lambda$ Wurzeln β unserer Gleichung, die oberhalb einer beliebig vorgeschriebenen Zahl δ liegen. Betrachtet man aber in der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ die Zahl β als gegeben und fragt nach den Wurzeln α, so liegen die Verhältnisse anders. Es braucht keine Wurzel α vorhanden zu sein. Gibt es aber Wurzeln, dann gilt:

Satz XIV. *Es besitze bei gegebenem festem $\beta > 1$ die Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ eine Wurzel α; dann existiert eine Zahl β', die folgenden Bedingungen genügt: es ist $\lambda < \beta' \leqq \beta$; für jedes der Bedingung $\lambda \leqq \xi < \beta'$ genügende ξ ist $\beta = f(\xi, \beta)$*), dagegen ist für $\xi \geqq \beta'$ stets $f(\xi, \beta) > \beta$.*

*) Für $\lambda = 0$ braucht bei *endlichem* β die Behauptung $\beta = f(\xi, \beta)$ für die Zahl $\xi = 0$ nicht richtig zu sein; es kann in diesem Fall $f(0, \beta) < \beta$ sein.

Beweis. Da $\beta > 1$ ist, so folgt für die nach Voraussetzung vorhandene Wurzel α, daß $\beta = f(\alpha, \beta) > \alpha$ ist, also ist auch $\beta > \lambda$. Nun ist $f(\beta, \beta) > \beta$; betrachte ich daher $f(\xi, \beta)$, wenn ξ von α bis β wächst, so ist zu Anfang die Funktion gleich β, am Ende des Intervalls aber größer als β. Also gibt es im Intervall eine kleinste Zahl $\xi = \beta'$, für die $f(\xi, \beta) = f(\beta', \beta) > \beta$ ist. Dann ist natürlich nach VII auch $f(\xi, \beta) > \beta$ für jedes $\xi \geqq \beta'$. Es liegt nun β' im Intervall zwischen α und β und es ist genauer $\alpha < \beta' \leqq \beta$. Es sei nun ξ eine Zahl, für die $\lambda \leqq \xi < \beta'$ ist, dann ist wegen der Minimaleigenschaft von β' stets $f(\xi, \beta) \leqq \beta$, während nach V zugleich $f(\xi, \beta) \geqq \beta$ ist. (Man vergl. die Anm. der vorigen Seite.) Also folgt $\beta = f(\xi, \beta)$.

Zusatz. 1) Unter der Voraussetzung (c′) kann es, falls β keine Limeszahl ist, höchstens eine Wurzel α geben. Es ist das, falls $\lambda > 0$ ist, die Zahl λ selbst.

2) Für die speziellen Funktionen, die wir als Anwendungen bringen werden, tritt es ein, daß mit α zugleich auch $h(\alpha)$ eine Wurzel ξ der Gleichung $\beta = f(\xi, \beta)$ ist; also ist in diesem Fall β' eine Hauptzahl. (XI)*).

Daß aus dem Bestehen der Gleichung $\beta = f(\alpha, \beta)$ die andere Gleichung $\beta = f(h(\alpha), \beta)$ folgt, tritt z. B. ein, wenn das assoziative Gesetz erfüllt ist. Dann ist nämlich: $f(h(\alpha), \beta) = f(f(\alpha, \alpha), \beta) = f(\alpha, f(\alpha, \beta)) = f(\alpha, \beta) = \beta$. *Wenn also das assoziative Gesetz gilt, dann ist β' eine Hauptzahl γ.* Aus dem assoziativen Gesetz läßt sich noch eine andere Folgerung ziehen: gibt es eine Hauptzahl γ', so daß $\beta = f(\gamma', \eta)$ eine Lösung η hat, dann ist $\gamma' \leqq \beta' = \gamma$. Denn es sei $\beta = f(\gamma', \eta)$ und $\gamma' > \beta' = \gamma$, dann ist $\gamma' = f(\beta', \gamma')$, also $\beta = f(f(\beta', \gamma'), \eta) = f(\beta', f(\gamma', \eta)) = f(\beta', \beta)$, während doch $f(\beta', \beta) > \beta$ ist.

Satz XV. *Besitzt bei gegebenen β und η die Gleichung $\beta = f(\xi, \eta)$ unendlich viele Wurzeln ξ**), die einen Limes ξ_1 besitzen, und hat die Gleichung $\beta = f(\xi_1, \eta_1)$ eine Lösung η_1, dann ist $\eta > \eta_1$, und es gibt keine Zahl η_2 zwischen η und η_1, für die die Gleichung $\beta = f(\xi_2, \eta_2)$ eine Lösung ξ_2 hat.*

Beweis. Da $\xi_1 = \lim \xi > \xi$ ist, so folgt aus $f(\xi, \eta) = f(\xi_1, \eta_1) \geqq f(\xi, \eta_1)$, daß $\eta \geqq \eta_1$ ist. Wäre $\eta = \eta_1$, also $\beta = f(\xi_1, \eta)$, so wäre ξ_1 eine der Größen ξ, deren Limes ξ_1 ist; also ist $\eta > \eta_1$. Sei nun $\beta = f(\xi_2, \eta_2)$, dann ist zu zeigen, daß $\eta_2 \geqq \eta$ oder $\eta_2 \leqq \eta_1$ ist.

Sei erstens $\xi_2 < \xi_1$, dann gibt es ein ξ zwischen ξ_2 und ξ_1, so daß $\beta = f(\xi, \eta) = f(\xi_2, \eta_2) \leqq f(\xi, \eta_2)$ ist, d. h. es ist $\eta_2 \geqq \eta$.

---

*) Es muß dazu eine Wurzel α vorhanden sein, für die $h(\alpha) > \alpha$ ist.

**) Unter der Voraussetzung (c′) kann das nur eintreten, wenn η, also auch β, eine Limeszahl ist.

Zweitens sei $\xi_2 \geqq \xi_1$. Aus $f(\xi_1, \eta_1) = f(\xi_2, \eta_2) \geqq f(\xi_1, \eta_2)$ folgt: $\eta_2 \leqq \eta_1$.

Wir wenden uns nun in § 2 zur Betrachtung einer speziellen Funktion und werden in § 3 die allgemeinen Fragen von neuem aufnehmen.

§ 2.

Die Addition.

1) Unter $w(\alpha)$ verstehen wir die Zahl $s(\alpha)$. Es ist (a) erfüllt und $w(\alpha) = s(\alpha) > \alpha$ für $\alpha \geqq 0$. Also ist $\lambda_0 = \beta_0 = 0$. Wir setzen ferner

$$g(\xi, \eta) = s(\xi) > \xi \quad \text{für} \quad \xi \geqq \xi_0 = 0,\ \eta \geqq \eta_0 = 0.$$

Es ist (b) erfüllt, aber auch (c), da aus $\xi \geqq \xi'$ auch $s(\xi) \geqq s(\xi')$ folgt. Dagegen ist bei unserer Wahl von $g(\xi, \eta)$ die Bedingung (c′) nicht erfüllt. Die Zahl λ ist die kleinste Zahl, die die beiden Bedingungen

$$\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0) = \max(0, 0) = 0, \qquad w(\lambda) = s(\lambda) \geqq \xi_0 = 0$$

erfüllt. Mithin ist $\lambda = 0$.

Die durch diese Festsetzungen definierte Funktion oder Operation bezeichnen wir mit $f(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$. Wir nennen $\alpha + \beta$ die *Summe von α und β*; α heißt der *Abschnitt*, β der *Rest der Summe*. Wir nennen diese Operation die *Addition*.

2) Es ist nach § 1, II:

(1) $$\alpha + 1 = s(\alpha),$$

(2) $$\alpha + s(\beta) = s(\alpha + \beta)$$

oder wegen (1):

(2) $$\alpha + (\beta + 1) = (\alpha + \beta) + 1,$$

(3) $$\alpha + \bar{\beta} = \lim_{\beta} (\alpha + \beta),$$

wenn auf der rechten Seite dieser Gleichung β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\bar{\beta}$ durchläuft. — Es ist durch (1)—(3) die Operation $\alpha + \beta$ für $\alpha \geqq \lambda = 0$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (2) erhellt die Zweckmäßigkeit der Festsetzung:

(4) $$\alpha + 0 = \alpha \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0.$$

Damit ist nun $\alpha + \beta$ für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ erklärt.

3) Nach III folgt unter Berücksichtigung von Gleichung (4) der vorigen Nr.: ist $\beta > \beta'$, so ist $\alpha + \beta > \alpha + \beta'$, und wenn $\alpha + \beta > \alpha + \beta'$ ist, dann ist $\beta > \beta'$. Aus $\alpha + \beta = \alpha + \beta'$ ergibt sich $\beta = \beta'$.

Insbesondere ist für $\beta > \beta' = 0$ stets $\alpha + \beta > \alpha + 0 = \alpha$, d. h. *die Summe ist größer als der Abschnitt, falls der Rest nicht gleich Null ist.*

4) Es sei eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann ist nach IV: $\lim\limits_{\delta} (\alpha + \delta) = \alpha + \bar{\beta} = \alpha + \lim \delta$.

5) Nach V ist $\alpha + \beta > \alpha$ für $\beta > 0$ $(w(\alpha) > \alpha)$; ein uns nach Nr. 3 bereits bekanntes Resultat. Der zweite Teil von V ergibt: $\alpha + \beta \geqq \beta$ (für $\alpha = 0$ liefert V diese Beziehung erst von $\beta = \omega$ an: es ist indessen durch transfinite Induktion leicht zu zeigen, daß für jedes β die Beziehung $0 + \beta = \beta$**) gilt, so daß wirklich die Ungleichung $\alpha + \beta \geqq \beta$ immer gilt).

Die Beziehung $\alpha + \beta \geqq \beta$ besagt: *die Summe ist nie kleiner als der Rest.*

6) Aus VI folgt (es ist auch Gleichung (4) der Nr. 2 zu berücksichtigen): sei $\beta \geqq \alpha = \alpha + 0$, dann existiert eine durch α und β eindeutig bestimmte Zahl ξ, so daß $\alpha + (\xi + 1) = (\alpha + \xi) + 1 > \beta \geqq \alpha + \xi$ ist. Da nun $(\alpha + \xi) + 1$ auf $(\alpha + \xi)$ unmittelbar folgt, so ist daher $\beta = \alpha + \xi$. *Ist also $\beta \geqq \alpha$, dann hat die Gleichung $\beta = \alpha + \xi$ stets eine einzige Lösung $\xi \leqq \beta$; wenn $\beta \geqq \alpha$ ist, dann ist somit α ein Abschnitt von β.*

7) Ist $\alpha \geqq \alpha'$, dann ist nach VII: $\alpha + \beta \geqq \alpha' + \beta$. Umgekehrt folgt aus $\alpha + \beta > \alpha' + \beta$, daß $\alpha > \alpha'$ ist.

8) *Es gilt das assoziative Gesetz:* $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Man bezeichnet daher beide Seiten unserer Gleichung zweckmäßig mit $\alpha + \beta + \gamma$.*)

Beweis. Nach Gleichung (2) und (4) ist unsere Gleichung richtig für $\gamma = 0, 1$. Es sei die Gleichung richtig für jedes $\gamma < \gamma'$. Dann ist nur noch für den Beweis der Allgemeingültigkeit zu zeigen, daß die Behauptung auch für $\gamma = \gamma'$ gilt.

Ist γ' eine Limeszahl, dann folgt der Beweis leicht aus Nr. 4. Ist aber $\gamma' = \gamma'' + 1$, so ist nach Voraussetzung für γ'' der Satz richtig, also $(\alpha + \beta) + \gamma'' = \alpha + (\beta + \gamma'')$. Nun ist

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta) + \gamma' = (\alpha+\beta) + (\gamma''+1) &= ((\alpha+\beta)+\gamma'') + 1 \quad &&[\text{Nr. 2, Gl. (2)}]\\ &= (\alpha + (\beta+\gamma'')) + 1 &&[\text{Voraussetzung}]\\ &= \alpha + ((\beta+\gamma'')+1) &&[\text{Nr. 2, Gl. (2)}]\\ &= \alpha + (\beta + (\gamma''+1)) &&[\text{desgl.}]\\ &= \alpha + (\beta+\gamma').\end{aligned}$$

Damit ist das assoziative Gesetz als richtig dargetan.**)

9) Ist n eine feste endliche Zahl, d. h. $n < \omega$, und x eine variable endliche ganze Zahl, dann wächst die endliche Zahl $n + x$ mit x zugleich gegen ω und es ist $n + \omega = \omega$. Ist $\beta \geqq \omega$, dann ist nach Nr. 6: $\beta = \omega + \xi$. Daher folgt nach Nr. 8: $n + \beta = (n + \omega) + \xi = \omega + \xi = \beta < \beta + n$, falls $\omega > n \geqq 1$ ist. Das kommutative Gesetz $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ gilt also

*) Das Gesetz gilt natürlich auch für mehr Zahlen, so daß der Begriff der Summe $\alpha + \beta + \gamma + \cdots + \varkappa$ für endliche viele Summanden als erklärt gelten darf.

**) Aus dem assoziativen Gesetz folgt für $\beta = 0$:

$$(\alpha + 0) + \gamma = \alpha + \gamma = \alpha + (0 + \gamma), \quad \text{also} \quad \gamma = 0 + \gamma.$$

im allgemeinen nicht, eine Erscheinung, die bei allen in § 1 betrachteten Operationen eintritt, wie wir früher sahen. Es läßt sich aber leicht aus den Gleichungen (1), (2), (4) der Nr. 2 zeigen, daß stets $n+m=m+n$ ist, falls $n, m < \omega$ ist.

10) Satz VIII sagt aus: es gibt nur endlich viele Zahlen η, für die bei gegebenem festem β die Gleichung $\beta = \xi + \eta$ Lösungen ξ besitzt. Da im Falle einer Lösung η ein Rest von β heißt, so sagen wir kurz: *Jede Zahl β hat nur endlich viele Reste.* Ein zweiter Beweis dieses Satzes beruht auf dem

Satz. *Der Rest ν' einer Summe $\mu + \nu$ ist entweder Rest von ν oder Rest von μ vermehrt um ν.*

Beweis. Da ν' Rest von $\mu+\nu$ ist, so ist $\mu+\nu=\mu'+\nu'$. Sei erstens $\mu' \geqq \mu$, also $\mu' = \mu + \varrho$; es ist dann $\mu + \varrho + \nu' = \mu + \nu$ und somit $\nu = \varrho + \nu'$. Es ist also ν' ein Rest von ν, und ν gleich einem Reste ϱ von μ' vermehrt um ν'.

Ist also zweitens $\mu > \mu'$, so muß ganz entsprechend ν' gleich einem Reste von μ vermehrt um ν sein.

Daß nun jede Zahl β nur endlich viele Reste hat, folgt hieraus leicht durch transfinite Induktion. Die Zahl $\beta = 1$ hat nur die Reste 0 und 1. ($1 = 1 + 0 = 0 + 1$.) Sei die Behauptung richtig für jedes $\beta < \beta'$, dann ist zu zeigen, daß β' auch nur endlich viele Reste besitzt. Die Zerlegungen $\beta' = 0 + \beta' = \beta' + 0$ lehren, daß β' die Reste 0 und β' hat. Hat β' keinen von 0 und β' verschiedenen Rest, dann ist der Satz richtig; β' habe einen weiteren Rest β; sei also $\beta' = \alpha + \beta$, und hierin sei α minimal gewählt. Es ist hier nach Voraussetzung $0 < \beta < \beta'$ und daher $0 < \alpha < \beta'$. Also haben α und β einzeln nur endlich viele Reste; nach dem obigen Satz ist jeder Rest von $\beta' = \alpha + \beta$ entweder einer der endlich vielen Reste von β oder einer der um β vermehrten endlich vielen Reste von α. Somit hat β' nur endlich viele Reste. Jede Zahl $\beta > 0$ hat nun mindestens zwei Reste 0 und β. Es entsteht die Frage: gibt es Zahlen mit genau zwei Resten? Ja. Es sind das die Hauptzahlen der Addition.

11) Nach XIII existieren Hauptzahlen der Addition. Es sind das Zahlen $\gamma > \lambda = 0$, für die stets $\gamma = \alpha + \gamma$ ist, wenn $0 \leqq \alpha < \gamma$ ist. Diese additiven Hauptzahlen nennt Hessenberg*) „Hauptzahlen". Da wir andere als additive Hauptzahlen in diesem Paragraphen nicht betrachten, so lassen wir in ihm das Beiwort „additiv" fort; wir bezeichnen eine Hauptzahl mit π. Es ist also $\pi > 0$ und für jedes $\alpha < \pi$ ist $\pi = \alpha + \pi$,

*) G. Hessenberg: Grundbegriffe der Mengenlehre, Abhandl. der Friesschen Schule, I. Bd., 4. Heft (als Sonderdruck erschienen), § 64. Wir zitieren diese Arbeit in Zukunft mit: G. d. M. — Man vgl. die in § 1 zur Erklärung der allgemeinen Hauptzahlen gegebene Anmerkung.

so daß die Hauptzahl π genau zwei Reste 0 und π besitzt. Hat umgekehrt eine Zahl β genau zwei Reste, dann ist β eine Hauptzahl. Denn wenn β zwei Reste hat, so ist $\beta > 0$; ist dann $\beta > \alpha \geqq 0$, so ist nach Nr. 6 die Zahl $\beta = \alpha + \xi$; hier muß der Rest ξ von β einer der beiden Reste 0 und β sein. Da nun $\beta > \alpha$ ist, so ist $\xi > 0$, also $\xi = \beta$, d. h. es ist $\beta = \alpha + \beta$ für jedes α unterhalb β. Somit ist β eine Hauptzahl.

12) Da $1 = 0 + 1$ ist, so ist 1 eine Hauptzahl. Nach den sich an den Beweis von IX anschließenden Bemerkungen kann 2 für die Addition keine Hauptzahl sein, was ja auch die Zerlegung $2 = 1 + 1$ lehrt. Denn es besitzt nach diesen Bemerkungen eine Operation höchstens eine Hauptzahl, die keine Limeszahl ist. Die 2 kann aber auch deshalb keine Hauptzahl sein, weil in unserem Fall $w(1) > 1$ ist. Die erste Limeszahl ω ist die erste überendliche Hauptzahl, da nach Nr. 9 stets $\omega = n + \omega$ für $n < \omega$ ist.

Die Sätze X ff. lauten in unserem Fall:

(a) *Ist eine Zahl π der Limes einer Folge von Zahlen α und besteht für jedes dieser α die Gleichung $\pi = \alpha + \pi$, dann ist π eine Hauptzahl.*

(b) *Hat eine Folge von Zahlen α die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $\alpha + \alpha$ der Folge angehört, dann hat die Folge einen Limes π und π ist eine Hauptzahl.*

(c) *Der Limes einer Menge von Hauptzahlen ist eine Hauptzahl.*

(d) *Ist $\alpha > 0$, dann ist die erste Hauptzahl über α der Limes der Folge $\alpha, \alpha + \alpha, \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$**). — Für $\alpha = 1$ ist also die erste überendliche Hauptzahl der Limes der Folge $1, 2, 3, 4, \cdots$, d. h. die Zahl ω, ein uns bekanntes Resultat.

Daß wir, um die erste Hauptzahl über α zu erhalten, die Reihe α, $\alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha, \cdots$, anstatt der Partialreihe α, $\alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$ benutzen können, das liegt nach den sich an XIII anschließenden Bemerkungen darin begründet, daß das assoziative Gesetz gilt. Zugleich ergibt sich nach den dortigen Erörterungen, daß die kleinste Lösung ξ der Gleichung $\xi = \alpha + \xi$ die erste Hauptzahl $\pi > \alpha$ ist.

Nach Nr. 9 ist für jedes überendliche β stets $1 + \beta = \beta$, also hat für jedes $\beta \geqq \omega$ die Gleichung $\beta = \alpha + \beta$ eine Wurzel $\alpha > 0$. Somit ist für jedes $\beta \geqq \omega$ Satz XIV anwendbar. Nach XIV existiert aber zu jeder Zahl $\beta \geqq \omega$ eine oberhalb 0 und nicht oberhalb β gelegene Zahl β', so daß $\beta = \xi + \beta$ ist für jedes $\xi < \beta'$, aber $\beta < \xi + \beta$ ist für $\xi \geqq \beta'$. Da das assoziative Gesetz erfüllt ist, so ist nach Satz XIV, Zusatz 2 die Zahl β' eine Hauptzahl π und da $\beta \geqq \pi$ ist, so ist nach Nr. 6: $\beta = \pi + \beta_1 < \xi + \beta$ für jedes $\xi \geqq \pi$. Also folgt speziell $\pi + \beta_1 < \pi + \beta$, d. h. $\beta_1 < \beta$.

*) Nach XIII selbst ist eine Partialfolge zu nehmen:
α, $\alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha$, $\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \alpha, \cdots$

Da für jede Hauptzahl $\pi' \leqq \beta$ nach Nr. 6: $\beta = \pi' + \eta$ ist, so folgt weiter nach Satz XIV, Zusatz 2, daß $\pi' \leqq \pi$ ist, d. h. es ist π die größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl. Nach XV folgt außerdem noch, daß β_1 der größte unterhalb β gelegene Rest von β ist, da ja $\beta = \pi + \beta_1$ ist und π der Limes der Wurzeln ξ der Gleichung $\beta = \xi + \beta$ ist. Wir fassen alles dies zusammen:

(e) *Zu jeder Zahl $\beta \geqq \omega$ gibt es eine größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl π; es ist $\beta = \xi + \beta$ für jede Zahl $\xi < \pi$, aber $\beta = \pi + \beta_1$, wo β_1 der größte unterhalb β gelegene Rest von β ist.*

Für eine endliche Zahl $\beta = b$ gilt derselbe Satz; er wird ausgedrückt durch die Gleichung $b = 1 + (b-1)$.

13) Die Hauptzahlen jeder Operation sind, wie wir sahen, irreduzibel in bezug auf die Operation. Da nun in unserem Fall jede Zahl mit nur zwei Resten eine Hauptzahl ist, so folgt umgekehrt, daß jede additiv irreduzibele Zahl $\beta > 0$ eine Hauptzahl ist, d. h. es ist jede Zahl $\beta > 0$, die sich nicht als Summe zweier kleineren Zahlen darstellen läßt, eine Hauptzahl. *Es sind also die Begriffe „additive Hauptzahl" und „additive irreduzibele Zahl" gleichwertig.* Wir werden bei der Multiplikation sehen, daß sich die Sache dort anders verhält. Es gibt multiplikativ irreduzibele Zahlen, die keine multiplikativen Hauptzahlen sind. Die additiven Hauptzahlen sind also ausgezeichnet durch diese Eigenschaft; es kommt ihnen aber noch eine Eigentümlichkeit zu, die uns diese Zahlen als noch bemerkenswerter erscheinen läßt: *die Hauptzahlen π sind additive Primzahlen.* Denn es gilt der

Satz: *Ist eine Hauptzahl π Rest einer Summe $\alpha + \beta$*), so ist π Rest von β; und ist π ein Abschnitt von $\alpha + \beta$, so ist die Zahl π ein Abschnitt von α, falls $\alpha + \beta > \beta$ ist.*

Diese Eigenschaft der Zahlen π ist das additive Analogon der Eigenschaft der endlichen multiplikativen Primzahlen p: wenn p ein Teiler von ab ist, dann ist p ein Teiler von a oder von b. Daher dürfen wir π als additive Primzahlen bezeichnen. Wir wenden uns zum Beweise des Satzes.

Beweis. Sei π ein Rest von $\alpha + \beta$, dann ist nach Nr. 10 entweder π ein Rest von β, was wir ja behaupten, oder es ist $\pi = \varrho + \beta$; da π Hauptzahl ist und wir $\beta > 0$ annehmen, so muß $\beta = \pi = 0 + \pi$ sein; also ist auch hier π ein Rest von β. — Sei nun zweitens π ein Abschnitt von $\alpha + \beta$ und $\alpha + \beta > \beta$, d. h. $\alpha + \beta = \pi + \gamma$. Wäre $\alpha < \pi$, $\pi = \alpha + \pi$; so folgte $\alpha + (\alpha + \beta) = (\alpha + \pi) + \gamma = \pi + \gamma = \alpha + \beta$, d. h. $\alpha + \beta = \beta$, was gegen die Annahme $\alpha + \beta > \beta$ verstößt; daher ist $\alpha \geqq \pi$, d. h. $\alpha = \pi + \xi$, und es ist π ein Abschnitt von α.

*) Wo $\beta > 0$ ist.

Die Eigenschaft von π, additive Primzahl zu sein, zerfällt in zwei Behauptungen, wie ja die Form unseres Satzes zeigt; das hat seinen Grund darin, daß das kommutative Gesetz nicht gilt. Unser Satz behauptet also von π in Wahrheit zwei Eigenschaften. Es zeigt sich nun, *daß auch der Begriff „Hauptzahl" mit dem Begriff „Primzahl" zusammenfällt;* dabei ergibt sich aber, daß jede der beiden Eigenschaften, die wir oben für π behaupteten, umgekehrt einzeln π als Hauptzahl charakterisiert. Es gilt der

Satz. *Folgt für eine Zahl $\gamma > 0$ aus der Tatsache, daß γ Rest von $\alpha + \beta > \alpha$ ist, stets, daß γ auch Rest von β ist, so ist γ eine Hauptzahl.*

Folgt für eine Zahl $\gamma > 0$ aus der Tatsache, daß γ Abschnitt der Zahl $\alpha + \beta > \beta$ ist, stets, daß γ auch Abschnitt von α ist, dann ist γ eine Hauptzahl.

Beweis. Wir beweisen den ersten Teil so: es ist $\gamma > 0$; sei α eine beliebige unterhalb γ gelegene Zahl, dann ist nach Nr. 6: $\gamma = \alpha + \beta$, wo $\beta > 0$ ist. Also ist, da γ Rest von $\gamma = \alpha + \beta$ ist, nach Voraussetzung γ auch Rest von β, d. h. $\beta \geqq \gamma \geqq \beta$. Daher ist $\gamma = \beta$, d. h. $\gamma = \alpha + \gamma$ für $\gamma > \alpha \geqq 0$. Somit ist γ eine Hauptzahl.

Der zweite Teil wird auf folgende Weise erledigt: es sei $\gamma > 0$ keine Hauptzahl, dann gibt es also eine Zerlegung $\gamma = \alpha + \beta$, bei der $\gamma > \beta > 0$ ist, d. h. es ist $\alpha + \beta > \beta$. Es wäre demnach γ ein Abschnitt von $\gamma = \alpha + \beta$, also nach Voraussetzung auch von α, d. h. es wäre $\alpha \geqq \gamma > \alpha$. Der Widerspruch $\alpha > \alpha$ zeigt also, daß γ eine Hauptzahl sein muß.

Wir fassen nunmehr zusammen: *Die Addition hat die Eigenschaft, daß für sie die drei Begriffe „Hauptzahl", irreduzibele Zahl", „Primzahl" äquivalent sind, d. h. die drei durch diese Begriffe definierten Zahlbereiche fallen in unserem Fall in einen Bereich zusammen.**)

14) Wie man nun in der endlichen multiplikativen Zahlentheorie jede Zahl in eindeutiger Weise multiplikativ aus endlichen Primzahlen zusammensetzt, so zeigt sich, daß für unseren erweiterten Bereich der transfiniten Zahlen ein analoger additiver Satz gilt:

Satz. *Jede von Null verschiedene Zahl läßt sich in eindeutiger Weise als Summe endlich vieler, nicht zunehmender Hauptzahlen darstellen.*

Diese von Cantor**) herrührende Darstellung heißt die Normalform einer transfiniten Zahl. Bei Cantor ist jedoch diese Darstellung nicht rein additiver Natur, sondern wird aus dem Potenzbegriff mit Hilfe eines Satzes abgeleitet, der unserem Satz VI entspricht. Auf die obige rein

*) Allerdings ist die Zahl 0 von der Betrachtung auszuschließen.

**) l. c. pag. 237.

additive Form gebracht und mit lediglich additiven Mitteln bewiesen hat zuerst Hessenberg*) den Satz.

Wir zeigen die Eindeutigkeit zu allerletzt und legen zuerst dar, daß jede Zahl β als endliche Summe nicht zunehmender Hauptzahlen darstellbar ist. Es genügt aber zu zeigen, daß β sich als endliche Summe von Hauptzahlen darstellen läßt; denn ist etwa $\beta = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ und ist $\pi_2 < \pi_3$, d. h. $\pi_2 + \pi_3 = \pi_3$, so folgt: $\beta\,\cancel{\pi} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = \pi_1 + \pi_3$; ist außerdem noch $\pi_1 < \pi_3$, so folgt: $\beta = \pi_3$, d. h. ich kann in einer solchen Darstellung jede Hauptzahl unterdrücken, auf die noch eine größere Hauptzahl folgt. Es bleibt dann in der Tat eine Reihe endlich vieler, nicht zunehmender Hauptzahlen übrig. Wir wenden uns jetzt zum Beweise.

Beweis 1.**) Nach Nr. 12, (c) ist $\beta = \pi + \beta_1$, wo π die größte nicht oberhalb β gelegene Hauptzahl und β_1 der größte *unterhalb* β gelegene Rest von β ist, d. h. $\beta > \beta_1$. Für β_1 gilt eine entsprechende Gleichung: $\beta_1 = \pi_1 + \beta_2$, $\beta_1 > \beta_2$ etc. Die Reihe der Zahlen $\beta, \beta_1, \beta_2, \cdots$ nimmt beständig ab und bricht daher ab; also erhalten wir folgende Kette von Gleichungen:

$$\begin{array}{llll}
\beta &= \pi + \beta_1, & \beta &> \beta_1,\\
\beta_1 &= \pi_1 + \beta_2, & \beta_1 &> \beta_2,\\
\vdots & & \vdots & \\
\beta_{r-1} &= \pi_{r-1} + \beta_r, & \beta_{r-1} &> \beta_r,\\
\beta_r &= \pi_r. & &
\end{array}$$

Daraus folgt sofort:

$$\beta = \pi + \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r.\text{***}$$

Beweis 2. Wir benutzen die Kenntnis der Existenz der Hauptzahlen nicht.

Unter allen Resten von β gibt es einen kleinsten Rest oberhalb Null; er heiße π_1'. Unter den zum Rest π_1' gehörigen Abschnitten sei der kleinste Abschnitt β', dann ist $\beta = \beta' + \pi_1' > \beta'$. Da nun jeder Rest von π_1' nicht größer als π_1' ist und dabei nach dem assoziativen Gesetz auch Rest von β ist, so folgt, da π_1' der kleinste von Null verschiedene Rest von β ist,

---

*) G. d. M., Kap. XIX.

**) Das ist im wesentlichen der Hessenbergsche Beweis (l. c.). Nur definiert Hessenberg die Zahlen $\beta_1, \beta_2, \cdots$ nicht rekurrierend.

***) Es ist hier auch $\pi \geqq \pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_r$. Wäre nämlich $\pi_s > \pi_{s-1}$, so wäre π_s die größte Hauptzahl, die oberhalb β_{s-1} liegt, während doch $\pi_{s-1} < \pi_s$ diese Hauptzahl ist. In unserem Fall braucht also keine Hauptzahl unterdrückt zu werden. Dasselbe gilt übrigens auch bei dem folgenden Beweise.

daß π_1' nur die beiden Reste 0 und π_1' hat, d. h. π_1' ist eine Hauptzahl, womit die Existenz der Hauptzahlen von neuem bewiesen ist. — Nun ist $\beta > \beta'$ und für β' existiert eine entsprechende Gleichung: $\beta' = \beta'' + \pi_2'$, $\beta' > \beta''$. Hier ist β'' wieder der zu π_2' gehörige Minimalabschnitt von β' etc. Der Beweis geht genau so weiter wie der vorige. Daß hier $\pi_1' \leqq \pi_2' \leqq \pi_3' \leqq \cdots$ ist, folgert man leicht daraus, daß die Zahlen $\beta', \beta'', \cdots$ minimal gewählt waren.

Beweis 3. Nach den allgemeinen Vorbemerkungen zum Beweise unseres Satzes genügt es zu zeigen: β ist eine endliche Summe von Hauptzahlen. Für $\beta = 1$ ist das richtig, da ja 1 selbst eine Hauptzahl ist. Sei bereits bewiesen, daß alle Zahlen $\beta' < \beta$ solche Summen sind, dann müssen wir nach dem Prinzip von der transfiniten Induktion es auch für β beweisen. Ist nun β eine Hauptzahl, dann ist der Satz sicher auch für β richtig. Sei also β keine Hauptzahl. Dann hat β einen Rest β', für den $0 < \beta' < \beta$ ist. Es ist also $\beta = \alpha' + \beta'$, wo etwa wieder α' minimal gewählt sein mag; da nun $0 < \beta' < \beta$ und $0 < \alpha' < \beta$ ist, so sind α' und β' darstellbar als Summen endlich vieler Hauptzahlen. Also ist auch die Zahl $\beta = \alpha' + \beta'$ so darstellbar.

Wir haben also bisher bewiesen, daß für jede Zahl $\beta \geqq 1$ eine Darstellung besteht: $\beta = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r$, wo $\pi_1 \geqq \pi_2 \geqq \cdots \geqq \pi_r$ ist. Die Eindeutigkeit dieser Darstellung erhellt aus folgendem

Satz. *Sei $\alpha = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_r$, wo die Hauptzahlen $\pi_1, \pi_2, \cdots$ mit wachsendem Index nicht zunehmen, und sei ebenso $\beta = \pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_s'$, wo ebenfalls $\pi_1' \geqq \pi_2' \geqq \cdots \geqq \pi_s'$ sein möge; es sei ferner*

$$\pi_1 = \pi_1', \ \pi_2 = \pi_2', \cdots, \pi_t = \pi_t',$$

aber $\pi_{t+1} > \pi'_{t+1}$, dann ist $\alpha > \beta$.

Beweis. Da

$$\pi_{t+1} > \pi'_{t+1} \geqq \pi'_{t+2} \geqq \cdots \geqq \pi'_s$$

ist, so ist

$$\pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1}, \ \pi'_{s-1} + \pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1}, \cdots, \pi'_{t+1} + \pi'_{t+2} + \cdots + \pi'_s + \pi_{t+1} = \pi_{t+1};$$

also ist

$$\pi_{t+1} + \pi_{t+2} + \cdots + \pi_r \geqq \pi_{t+1} > \pi'_{t+1} + \pi'_{t+2} + \cdots + \pi'_s.$$

Man addiere auf beiden Seiten dieser Ungleichung linksseitig die gleiche Zahl

$$\pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t = \pi_1' + \pi_2' + \cdots + \pi_t',$$

dann folgt $\alpha > \beta$.

Wenn also bei zwei Summen endlich vieler nicht zunehmender Hauptzahlen auch nur ein Glied nicht übereinstimmt, dann sind die Summen verschieden, und zwar bestimmt das erste (von links aus gezählt) abweichende Glied die Größenordnung der ganzen Summe.

Somit ist die Normaldarstellung einer Zahl β eindeutig.*) Es läßt sich also β in eindeutiger Weise aus additiven Primzahlen zusammensetzen. Es ist diese Eindeutigkeit der Darstellung deshalb bemerkenswert, weil doch das kommutative Gesetz nicht gilt. Unsere Zerlegung von β läßt vermuten, daß die Arithmetik der transfiniten Zahlen wesentlich additiver Natur zu sein scheint; eine Vermutung, die später gerechtfertigt wird, wenn wir erkennen, daß die multiplikativen Gesetze eine ähnliche Einfachheit und Vollkommenheit nicht besitzen.

15) Anhang: *Die Subtraktion.***)

Da die Addition nicht kommutativ***) ist, läßt sie sich auf zwei Arten umkehren. Sei $\gamma = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t + \pi_{t+1} + \cdots + \pi_r$ gegeben und β ein Rest von γ. Ist $\beta > 0$, dann ist $\beta = \pi_{t+1} + \cdots + \pi_r$. Der kleinste zu β gehörige Abschnitt von γ ist dann $\alpha = \pi_1 + \pi_2 + \cdots + \pi_t$. Diesen kleinsten so definierten Abschnitt bezeichnen wir mit $(\gamma - \beta)$. Offenbar ist $(\gamma - 0) = \gamma$ und $(\gamma - \gamma) = 0$. Ist $\beta > 0$, also $\beta = \pi_{t+1} + \cdots$, dann ist jeder zu β gehörige Abschnitt von γ gleich $(\gamma - \beta) + \vartheta$, wo ϑ eine beliebige Zahl unterhalb π_{t+1} ist.

1) Es ist nach Definition $(\gamma - \beta) + \beta = \gamma$; $(\gamma - 0) = \gamma$; $(\gamma - \gamma) = 0$.

2) Ohne Beweis sei bemerkt, daß $((\delta + \gamma) - \beta) = \delta + (\gamma - \beta)$ ist, falls β ein *unterhalb* γ gelegener Rest von γ ist.

Ist $\gamma \geqq \alpha$, dann definiert $\gamma = \alpha + \beta$ eindeutig β. Wir setzen

$$\beta = (-\alpha + \gamma).$$

3) Es ist nach Definition $\alpha + (-\alpha + \gamma) = \gamma = (\alpha - \alpha) + \gamma$; ferner ist $(-\alpha + \alpha) = 0$ und $(-0 + \alpha) = \alpha$.

Ferner ist für $\gamma \geqq \alpha$ stets $(-\alpha + (\gamma + \delta)) = (-\alpha + \gamma) + \delta$.

Es bestehen noch folgende Relationen, die ebenfalls ohne Beweis mitgeteilt seien.

4) $(\delta - \beta) + \alpha = \delta + (-\beta + \alpha)$, falls $\alpha \geqq \beta$ und β ein Rest von δ ist.

5) $(-(\alpha + \beta) + \delta) = (-\beta + (-\alpha + \delta))$, falls $\delta \geqq \alpha + \beta$ ist.

Setzt man hier $\alpha + \beta = \mu$, $\beta = (-\alpha + \mu)$, dann lautet die Formel:

(6) $(-\mu + \delta) = (-(-\alpha + \mu) + (-\alpha + \delta))$, falls $\delta \geqq \mu \geqq \alpha$ ist.

$$\left.\begin{array}{ll} (7) & ((\delta - \varrho_1) - (\varrho - \varrho_1)) = (\delta - \varrho) \\ (8) & (-(\delta - \varrho) + (\delta - \varrho_1)) = (\varrho - \varrho_1) \end{array}\right\} \text{falls } \varrho \text{ und } \varrho_1 \text{ Reste von } \delta \text{ sind und } \varrho \geqq \varrho_1 \text{ ist.}$$

---

*) Man kann auch Summen von unendlich vielen Summanden erklären. Mit Zulassung solcher Summen wird die Darstellung mehrdeutig.

**) Einige der in Nr. 15 zusammengestellten Formeln erweisen sich bei unseren Untersuchungen als nützlich, daher bemerken wir hier diese Formeln.

***) Man vgl. E. Jacobsthal: Vertauschbarkeit transfiniter Ordnungszahlen, Math. Ann. Bd. 64.

§ 3.

Funktionen transfiniter Variabeln. (Fortsetzung.)

Wir beginnen damit, die im Beweise zu Satz I gelassene Lücke auszufüllen.

Es ist uns eine beständig wachsende Funktion $w(\alpha)$ gegeben, die für $\alpha \geqq \beta_0$ definiert ist.

Es war behauptet: es gibt Zahlen α, für die $w(\alpha) \geqq \alpha$ ist; bedeutet dann $\lambda_0 \geqq \beta_0$ die kleinste dieser Zahlen α, dann ist für *jede* Zahl $\alpha \geqq \lambda_0$ stets $w(\alpha) \geqq \alpha$.

Es war in § 1 nur bewiesen worden: *wenn* für eine Zahl ξ die Beziehung $w(\xi) \geqq \xi$ besteht, dann ist auch $w(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha \geqq \xi$. Es fehlt also nur noch der Nachweis, *daß* es eine Zahl ξ gibt, die der verlangten Bedingung genügt.

Wir setzen nun gar nichts von dem bereits Bewiesenen voraus, sondern folgern Satz I aus

Satz XVI. *Ist β eine beliebige nicht unterhalb β_0 gelegene Zahl, dann besteht für jede Zahl δ die Beziehung $w(\beta+\delta) \geqq w(\beta) + \delta$.*

Beweis. Sei $\beta \geqq \beta_0$, dann ist $w(\beta)$ definiert und für $\delta = 0$ gilt unsere Beziehung. Es gelte der Satz für jedes $\delta < \delta'$, d. h. für $\delta < \delta'$ sei $w(\beta+\delta) \geqq w(\beta) + \delta$, dann ist zu beweisen, daß auch $w(\beta+\delta') \geqq w(\beta) + \delta'$ gilt. Erstens sei $\delta' = \delta'' + 1$, dann ist $w(\beta+\delta'') \geqq w(\beta) + \delta''$ und da w eine wachsende Funktion ist, so ist $w(\beta+\delta') > w(\beta+\delta'') \geqq w(\beta) + \delta''$, d. h. $w(\beta+\delta') \geqq w(\beta) + \delta'' + 1 = w(\beta) + \delta'$. Sei zweitens δ' eine Limeszahl, dann ist $w(\beta+\delta') > w(\beta+\delta)$ für jedes $\delta < \delta'$, also auch

$$w(\beta+\delta') \geqq \lim_{\delta} w(\beta+\delta) \geqq \lim_{\delta} \{w(\beta)+\delta\} = w(\beta) + \lim \delta = w(\beta) + \delta'.$$

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir folgern nun Satz I so: es werde $\beta = \beta_0$ gesetzt; ferner werde $\delta = \pi$ gewählt, wenn π die erste oberhalb $\max(\beta_0, w(\beta_0))$ gelegene additive Hauptzahl ist. Dann wird:

$$\beta + \delta = \beta_0 + \pi = \pi$$

und ebenso

$$w(\beta) + \delta = w(\beta_0) + \pi = \pi,$$

also lautet unsere Gleichung: $w(\pi) \geqq \pi$. Damit ist gezeigt, daß es eine Lösung α der Beziehung $w(\alpha) \geqq \alpha$ gibt. Es sei λ_0 die kleinste Lösung, dann ist natürlich $\lambda_0 \geqq \beta_0$. Es bedeute nun α eine beliebige Zahl $\geqq \lambda_0$, dann setze man $\delta = (-\lambda_0 + \alpha)$, d. h. $\alpha = \lambda_0 + \delta$. Es folgt nach unserem Satze, da $w(\lambda_0) \geqq \lambda_0$ ist, die Beziehung:

$$w(\alpha) = w(\lambda_0+\delta) \geqq w(\lambda_0) + \delta \geqq \lambda_0 + \delta = \alpha.$$

Damit ist I bewiesen.

Wir betrachten nun wieder unsere Funktion $f(\alpha, \beta)$; wir haben in V die Funktion $f(\alpha, \beta)$ nach unten hin abgeschätzt. Die untere Schranke enthielt aber nur α oder nur β. Jetzt gestattet uns XVI eine genauere Abschätzung. Es gilt nämlich

Satz XVII. *Es ist stets* $f(\alpha, 1+\beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$. *Also ist für* $\beta \geqq \omega$ *immer* $f(\alpha, \beta) \geqq \alpha + \beta$.

Beweis. Die Funktion $f(\alpha, \beta)$ ist bei konstantem α eine für $\beta \geqq 1$ erklärte Funktion von β, die mit β beständig wächst, also ist nach XVI: $f(\alpha, 1+\beta) \geqq f(\alpha, 1) + \beta = w(\alpha) + \beta$ für $\alpha \geqq \lambda$, $\beta \geqq 0$. Da nun $w(\alpha) \geqq \alpha$ für $\alpha \geqq \lambda$ ist, so folgt: $f(\alpha, 1+\beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$. Für $\beta \geqq \omega$ ist $1 + \beta = \beta$ und daher $f(\alpha, \beta) \geqq w(\alpha) + \beta \geqq \alpha + \beta$.

Also dient die additive Funktion $\alpha + \beta$ selbst als untere Schranke für die beliebige Funktion f; eine bessere Abschätzung dürfen wir nicht verlangen, da für $f \equiv \alpha + \beta$ die Schranke erreicht wird. — Für die Hauptzahlen von f liefert XVII folgenden

Satz XVIII. *Jede eigentliche Hauptzahl von f ist eine additive Hauptzahl.*

Beweis. Sei γ eine eigentliche Hauptzahl von f, also $\gamma \geqq \omega$. Dann ist $\gamma = f(\alpha, \gamma) \geqq \alpha + \gamma \geqq \gamma$. Daher ist $\gamma = \alpha + \gamma$ für jedes α, das der Bedingung $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ genügt. Das gilt natürlich auch für $\alpha < \lambda$. Also ist γ eine additive Hauptzahl.

Durch XVIII wird also IX erheblich verschärft. Satz IX sagte aus, daß jede eigentliche Hauptzahl eine Limeszahl ist; hier sehen wir, daß diese Zahlen γ sogar additive Hauptzahlen sind. Es werden also solche Zahlen, wie $\omega + \omega$, $\omega + \omega + \omega$, ausgeschlossen; der Abstand zwischen konsekutiven Hauptzahlen konnte nach IX noch konstant sein; aus XVIII folgt, daß er beständig wächst; die additiven Hauptzahlen haben den denkbar kleinsten Abstand; sie sind am dichtesten verteilt. Die Addition nimmt also eine besondere Stellung im Gebiete der von uns betrachteten Funktionen ein.

Man könnte nun vermuten, daß es außer $\alpha + \beta$ keine andere Funktion $f(\alpha, \beta)$ gibt, die die additiven Hauptzahlen zu Hauptzahlen besitzt. Oder allgemeiner könnte man denken, daß zwei verschiedene nach dem in § 1 entwickelten Induktionsschema definierte Funktionen nie in ihren Hauptzahlen übereinstimmen können. Dem ist aber nicht so, wie wir an folgendem Beispiel sehen.

Wir setzen: $w(\alpha) = \alpha + \alpha + 1$, $g(\xi, \eta) = \xi + 1$. Es ist dann $\lambda = 0$ und man erkennt, daß hier $f(\alpha, \beta) = \alpha + \alpha + \beta$ wird. Es sind offenbar sämtliche additiven Hauptzahlen auch Hauptzahlen dieser neuen Funktion. Es läßt sich dieses Beispiel verallgemeinern.

Wir zeigen nämlich: *zu jeder Funktion $f(\alpha, \beta)$ können wir eine Funktion $\bar{f}(\alpha, \beta)$ finden, so daß f und $\bar{f}$ dieselben Hauptzahlen besitzen.*

Es sei also f definiert mit Hilfe von $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$. Es sei d eine feste endliche Zahl. Man setze $\bar{w}(\alpha) = f(\alpha, \alpha + d)$ und $\bar{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \eta)$. Es wird dadurch $\bar{f}(\alpha, \beta)$ erklärt für $\alpha \geqq \bar{\lambda}$ und $\beta \geqq 1$ und ohne Mühe erkennt man, daß $\bar{\lambda} = \lambda$ ist, falls $\lambda + d > 0$ ist; ist aber $\lambda + d = 0$, dann ist $\bar{\lambda} = 1$; weiter ergibt sich durch Induktion, daß für $\beta = b < \omega$

$$\bar{f}(\alpha, b) = f(\alpha, \alpha + d + b - 1),$$

aber für $\beta \geqq \omega$ stets

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha + \beta)$$

ist. Beide Formeln zusammen lassen sich schreiben:

$$\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\alpha, \alpha + d + (-1 + \beta))$$

für $\alpha \geqq \bar{\lambda}$, $\beta \geqq 1$. Da nun Satz XVIII gilt, so folgt hieraus, daß $\bar{f}$ und f dieselben eigentlichen Hauptzahlen besitzen. Besitzt f außerdem keine Hauptzahlen, d. h. ist weder 1 noch 2 eine Hauptzahl, dann fixieren wir d so, daß 1 und 2 auch keine Hauptzahlen von $\bar{f}$ sein können. Nach XVII folgt nämlich für $\alpha = a < \omega$ und $d = 4$, daß

$$\bar{f}(a, b) = f(a, a + 3 + b) \geqq a + a + 2 + b \geqq 2 + 1 = 3$$

ist. Somit hat auch $\bar{f}$ keine endlichen Hauptzahlen, d. h. f und $\bar{f}$ haben dieselben Hauptzahlen.

Es kann aber eintreten, daß f die Hauptzahl 1 hat (2 ist dann keine Hauptzahl von f). Dann ist $\lambda = 0$ und wir setzen $d = 1$, so daß $\bar{\lambda} = \lambda = 0$ wird. Dann wird $\bar{f}(\alpha, b) = f(\alpha, \alpha + b)$ und daher

$$\bar{f}(0, 1) = f(0, 0 + 1) = f(0, 1) = 1,$$

d. h. 1 ist auch Hauptzahl von $\bar{f}$, also haben f und $\bar{f}$ dieselben Hauptzahlen. Der letzte noch denkbare Fall ist der, daß 2 eine Hauptzahl von f ist; es muß dann $\lambda < 2$ sein. Wir setzen $d = 0$. Da $\lambda \leqq 1$ ist, so ist $\lambda = 0, 1$. Ist $\lambda = 0$, also $\lambda + d = 0 + 0 = 0$, dann ist $\bar{\lambda} = 1$. Ist aber $\lambda = 1$, d. h. $\lambda + d > 0$, dann ist $\bar{\lambda} = \lambda = 1$, also in jedem Fall $\bar{\lambda} = 1$. Es ist daher, damit 2 Hauptzahl von $\bar{f}$ sein soll, nur die eine Gleichung $\bar{f}(1, 2) = 2$ nötig. Nun ist hier $\bar{f}(\alpha, 2) = f(\alpha, \alpha + 1)$, also

$$\bar{f}(1, 2) = f(1, 1 + 1) = f(1, 2) = 2.$$

Somit haben f und $\bar{f}$ auch in diesem Fall dieselben Hauptzahlen.

Damit ist die Behauptung in vollem Umfange bewiesen. Nachdem es uns nun gelungen ist, zu den Hauptzahlen einer Funktion f nach unserm Schema eine neue Funktion $\bar{f}$ zu konstruieren, entsteht das allgemeine Problem: *wie muß ein System von Zahlen beschaffen sein, damit es eine nach dem in* § 1 *entwickelten Verfahren definierte Funktion gibt, die die gegebenen Zahlen zu Hauptzahlen besitzt?*

Nennt man ein System von Zahlen, das die Gesamtheit der Hauptzahlen einer solchen Funktion f repräsentiert, ein Hauptzahlensystem, dann können wir das Problem auch so formulieren: *es sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür abzuleiten, daß ein gegebenes Zahlensystem ein Hauptzahlensystem ist.* Es soll gleich im voraus bemerkt werden, daß eine Lösung dieses Problems nicht gegeben wird. Es wird uns nur möglich sein, gewisse notwendige Bedingungen aufzustellen, die in bereits bewiesenen Sätzen enthalten sind. Zunächst seien folgende Bemerkungen vorausgeschickt. Wenn uns $f(\alpha, \beta)$ gegeben ist, dann gibt uns das zu $f(\alpha, \beta)$ gehörende Hauptzahlensystem Anlaß zur Bildung einer beständig wachsenden Funktion $\varphi(\alpha)$. Man bezeichne nämlich eine Hauptzahl γ von f mit $\varphi(\alpha) = \gamma_\alpha$, wenn die Menge der γ vorausgehenden Hauptzahlen den Typus α hat. Die erste Hauptzahl ist also mit γ_0, die zweite mit γ_1 etc. zu bezeichnen. Daß so jeder Hauptzahl ein Index entspricht, läßt sich auch durch transfinite Induktion beweisen. Es hat nun $\varphi(\alpha) = \gamma_\alpha$ folgende Eigenschaften: 1) $\varphi(\alpha)$ wächst beständig; 2) nach XII ist $\lim\limits_{\alpha} \varphi(\alpha) = \varphi\,(\lim \alpha)$; 3) nach XVIII ist $\varphi(\alpha)$ stets eine additive Hauptzahl; es kann höchstens $\varphi(0) = 2$ sein; 4) nach XIII muß $\varphi(\alpha+1)$ für jedes $\alpha \geqq 0$ als Limes einer Reihe vom Typus ω darstellbar sein.

Dafür daß die Zahlen $\varphi(\alpha)$ ein Hauptzahlensystem bilden, sind diese vier Bedingungen notwendig, ob sie aber auch hinreichend sind, das vermag ich nicht zu entscheiden. Ich gehe nun auf die Bedeutung dieser Bedingungen ein wenig ein. Die Bedingung 3) sorgt dafür, daß die Hauptzahlen nicht zu eng gelagert sind.*) In ähnlicher Richtung liegt die Bedeutung von Bedingung 4). Um das einzusehen, setze man $\varphi(\alpha) = \Omega_\alpha$, wenn Ω_α die kleinste Ordnungszahl der Mächtigkeit $\aleph_\alpha$ bedeutet. Insbesondere ist $\Omega_0 = \omega$. Diese Zahlen Ω_α nennt Hessenberg Anfangszahlen.**) Es ist bekannt, daß die Zahlen Ω_α die Bedingungen 1), 2), 3) erfüllen. Aber 4) ist nicht erfüllt, da bereits Ω_1 nicht der Limes einer Reihe vom Typus ω sein kann.***) Nach diesem Sachverhalt hat man also ein gewisses Recht zu sagen: die Zahlen Ω_α stehen zu weit auseinander, um ein Hauptzahlensystem bilden zu können; durch Einschaltung der übrigen additiven Hauptzahlen erhält man z. B. erst ein Hauptzahlensystem. Und doch ist das nur zum Teil richtig; denn wenn auch die sämtlichen Zahlen Ω_α kein Hauptzahlensystem bilden können, so werden wir doch sehen, daß ein Teilsystem der Zahlen Ω_α wieder ein Hauptzahlensystem darstellen kann; also haben wir dann ein System, in dem die Zahlen weiter

*) Man vgl. die Bemerkungen zu Satz XVIII.

**) G. d. M. § 41.

***) Cantor, l. c. pag. 222, Satz C.

auseinander stehen als in dem System aller Ω_α. Man hat also hiernach ebenfalls ein Recht zu behaupten, daß die Zahlen Ω_α zu dicht verteilt sind, um ein Hauptzahlensystem bilden zu können, da ja erst nach Weglassung gewisser Zahlen ein Hauptzahlensystem entsteht.*) — Wir werden nun zeigen, daß es Funktionen gibt, die als Hauptzahlen nur *die* Zahlen Ω_α besitzen, für die $\Omega_\alpha = \alpha$. Es folgt das aus einem allgemeinen Satz. Um zu ihm zu gelangen, bemerken wir, daß eine Funktion $\varphi(\alpha)$, die 1) und 2) erfüllt, die Eigenschaft hat, daß es oberhalb jeder Zahl β Lösungen α der Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ gibt.**) Es tritt also als Ergänzung zu I hinzu, daß nicht beständig $w(\alpha) > \alpha$ erfüllt sein kann, falls $w(\alpha)$ die Eigenschaft 2) besitzt, d. h. falls $\lim w(\alpha) = w(\lim \alpha)$ ist. Daß nun die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ beliebig große Lösungen besitzt, ist in einem allgemeinen Satze enthalten, der sich auf eine Funktion $\varphi(\alpha)$ bezieht, die 1) und 2) erfüllt. Es ist 3) und 4) nicht für die Funktion $\varphi(\alpha)$ vorausgesetzt, also werden auch die Werte der Funktion $\varphi(\alpha)$ kein Hauptzahlensystem darstellen können. Aber wir zeigen, daß es Funktionen $\bar f$ gibt, deren Hauptzahlen sämtlich der Folge der Zahlen $\varphi(\alpha)$ angehören. Der Satz lautet:

Satz XIX. *Es sei $f(\alpha, \beta)$ gegeben und außerdem eine beständig wachsende Funktion $\varphi(\alpha)$ von α, für die stets $\lim\limits_\alpha \varphi(\alpha) = \varphi(\lim \alpha)$ ist; sei außerdem $\varphi(0) > \max(\lambda, 1)$. Es existiert dann eine Funktion $\bar f(\alpha, \beta)$, die für $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 1$ erklärt ist und die nur eigentliche Hauptzahlen besitzt, mit der Eigenschaft, daß das System der Hauptzahlen von $\bar f$ aus allen denjenigen Hauptzahlen γ von f besteht, die der Gleichung $\varphi(\gamma) = \gamma$ genügen; also sind alle Hauptzahlen von $\bar f$ in dem Bereich der Zahlen $\varphi(\alpha)$ enthalten und jeder solche Bereich von Zahlen $\varphi(\alpha)$ enthält Hauptzahlen einer beliebigen Funktion f; insbesondere hat also die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ stets Wurzeln, die oberhalb einer gegebenen Zahl liegen.*

Beweis. Es sei $f(\alpha, \beta)$ durch $w(\alpha)$ und $g(\xi, \eta)$ definiert. Dann setzen wir $\bar w(\alpha) = w(\varphi(\alpha))$, so daß $\bar\lambda_0 = 0$ wird. Weiter werde

$$\bar g(\xi, \eta) \equiv g(\xi, \varphi(\eta))$$

*) Diese aus 4) folgenden eigenartigen Verhältnisse erscheinen wohl deshalb nur so auffallend, weil wir zur Zeit die durch eine Limesreihe vom Typus ω approximierbaren Limeszahlen arithmetisch nicht zu charakterisieren vermögen.

**) Hessenberg, G. d. M. § 81. Man vgl. damit die sich an den Beweis von XIII anschließenden Bemerkungen. Die Eigenschaft 2) erfüllt die Funktion $f(\alpha, \beta)$ bei konstantem α als Funktion von β und deshalb kann nicht beständig $f(\alpha, \beta) > \beta$ sein. Und weil $f(\alpha, \beta) > \alpha$ ist, $(\beta > 1)$, so kann nicht die Limeseigenschaft

$$f(\lim \alpha, \beta) = \lim_\alpha f(\alpha, \beta)$$

gelten. Diesen Sachverhalt hat zuerst Hessenberg erkannt.

gesetzt; es ist hiernach $\bar{g}(\xi, \eta) = g(\xi, \varphi(\eta)) > \xi$ für $\xi \geqq \bar{\xi}_0 = \xi_0$ und $\eta \geqq \bar{\eta}_0 = 0$, denn es ist $\varphi(0) \geqq \lambda \geqq \eta_0$, also für $\eta \geqq 0$ stets $\varphi(\eta) \geqq \eta_0$, und daher für $\xi \geqq \xi_0$, $\eta \geqq 0$ auch $g(\xi, \varphi(\eta)) > \xi$. Es folgt sofort, daß $\bar{\lambda} = 0$ ist. Also ist durch diese Festsetzungen eine für $\alpha \geqq 0, \beta \geqq 1$ erklärte Funktion $\bar{f}(\alpha, \beta)$ definiert. Nun ist $\bar{f}(\alpha, 1) = \bar{w}(\alpha) = w(\varphi(\alpha)) = f(\varphi(\alpha), 1)$ und durch transfinite Induktion folgt, daß allgemein $\bar{f}(\alpha, \beta) = f(\varphi(\alpha), \beta)$ ist.

Erstens hat nun $\bar{f}(\alpha, \beta)$ nur eigentliche Hauptzahlen. Denn für $1 \leqq b < \omega$ folgt, daß die Beziehung $\bar{f}(0, b) = f(\varphi(0), b) \geqq \varphi(0) \geqq 2$ besteht und für $b > 1$ ist sogar $\bar{f}(0, b) > \varphi(0) \geqq 2$, d. h. 1 oder 2 können keine Hauptzahlen sein.

Zweitens sei nun γ eine Hauptzahl von $\bar{f}$, also ist γ eine Limeszahl und es ist $\gamma = \bar{f}(\alpha, \gamma) = f(\varphi(\alpha), \gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$, also $\gamma > \varphi(\alpha) \geqq \alpha$ für jedes $\alpha < \gamma$. Hieraus folgt weiter, daß $\varphi(\gamma) \geqq \gamma \geqq \lim\limits_{\alpha < \gamma} \varphi(\alpha) = \varphi(\lim \alpha) = \varphi(\gamma)$ d. h. es ist $\varphi(\gamma) = \gamma$.

Drittens zeigen wir, daß γ auch eine Hauptzahl von f ist. Es ist nämlich $\gamma = \bar{f}(\alpha, \gamma) = f(\varphi(\alpha), \gamma) = f(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma)) = \varphi(\gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$, d. h. es ist $\gamma = \varphi(\gamma) = f(\varphi(\alpha), \varphi(\gamma))$ für eine Folge von Zahlen $\varphi(\alpha)$, deren Limes gleich $\varphi(\lim \alpha) = \varphi(\gamma)$ ist. Nach X ist also $\varphi(\gamma) = \gamma$ eine Hauptzahl von f. — Viertens zeigen wir: wenn eine Hauptzahl γ von f der Gleichung $\gamma = \varphi(\gamma)$ genügt, dann ist γ auch Hauptzahl von $\bar{f}$. Zunächst kann nicht $\gamma = 1$ oder $\gamma = 2$ sein, da $\varphi(0) \geqq 2$, $\varphi(1) \geqq 3$, $\varphi(2) \geqq 4$ ist. Somit ist $\gamma = \varphi(\gamma)$ eine eigentliche Hauptzahl von f. Es ist

$$f(\varphi(\alpha), \gamma) = \bar{f}(\alpha, \gamma) = \gamma \quad \text{für} \quad \varphi(\alpha) < \gamma = \varphi(\gamma),$$

d. h. für $\alpha < \gamma$, also ist γ eine Hauptzahl von $\bar{f}$, womit unser Theorem bewiesen ist.

Als Beispiel sei bemerkt, daß die Funktion $\Omega_\alpha + \beta$ diejenigen Anfangszahlen zu Hauptzahlen besitzt, die ihrem eigenen Index gleich sind.

Folgerungen: Aus unserem Satze ergibt sich nicht nur, daß die Gleichung $\varphi(\alpha) = \alpha$ stets beliebig große Wurzeln hat, sondern auch, daß unter diesen Wurzeln immer wieder, soweit man auch in der Zahlenreihe aufsteigen mag, Hauptzahlen einer beliebigen Funktion auftreten. Hieraus ergibt sich weiter: sei $\psi(\alpha)$ eine zweite Funktion, die dieselben Eigenschaften 1) und 2) erfüllt, dann gibt es oberhalb jeder Zahl β eine Lösung γ der Gleichung $\psi(\gamma) = \gamma$, wenn γ eine beliebige Hauptzahl von $\bar{f}$ ist, d. h. wenn $\gamma = \varphi(\gamma)$ ist. Also hat die Gleichung $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha$ stets Wurzeln $\alpha > \beta$, wenn β irgend eine Zahl ist; und unter diesen Wurzeln kommen immer wieder Hauptzahlen einer beliebigen Funktion f vor.*) Insbesondere ergibt sich hieraus leicht, daß zwei beliebige Funktionen

*) Daß die Gleichung $\varphi(\alpha) = \psi(\alpha) = \alpha$ beliebig große Wurzeln besitzt, erhält man auch direkt aus der Betrachtung der Funktion $\varphi(\psi(\alpha))$.

f und f' stets beliebig große Hauptzahlen gemeinsam haben, d. h. oberhalb jeder Zahl β gibt es immer eine Zahl γ, die die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma) = f'(\alpha, \gamma)$ für jedes $\alpha < \gamma$ erfüllt. —

Wir wenden uns jetzt anderen Fragen zu.

Zur Definition der Funktion f gebrauchten wir eine Funktion zweier Variabeln $g(\xi, \eta)$. Wenn nun g selbst zur Klasse der von uns betrachteten Funktionen gehört, dann besitzt g Hauptzahlen. Welche Beziehungen bestehen zwischen den Hauptzahlen von f und denen von g? Präzisieren wir unsere Voraussetzungen. Wir gehen aus von einer Funktion $w_1(\alpha)$, die der Voraussetzung (a) genügt; außerdem sei den Bedingungen (b) und (c) gemäß eine Funktion $g_1(\xi, \eta)$ gegeben; nach II ist hierdurch $f_1(\alpha, \beta)$ für $\alpha \geqq \lambda_1$, $\beta \geqq 1$ definiert und nun wollen wir $f(\alpha, \beta)$ definieren, indem uns wie früher $w(\alpha)$ gegeben ist, während wir jetzt $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta)$ wählen. Es ist $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) > \xi$ für $\xi \geqq \lambda_1$ und $\eta \geqq 2$.*) Es ist also (b) erfüllt und $\xi_0 = \lambda_1$, $\eta_0 = 2$*); somit ist λ die kleinste Zahl, für die simultan $w(\lambda) \geqq \lambda_1$, $\lambda \geqq \max(\lambda_0, \eta_0)$ ist ($\eta_0 = 2$ oder 1). Es werde besonders betont, daß wegen III und VII die Funktion $g = f_1$ die Bedingung (c') erfüllt, die (c) enthält. Also gelten für f die Sätze VII, VIII, XIV, Zus. in vollem Umfange. Mit f_1 ist das System der zugehörigen Hauptzahlen gegeben. Aus f_1 haben wir f abgeleitet. Man wird irgend welche Beziehungen zwischen den Hauptzahlen von f und denen von f_1 erwarten dürfen. Es gilt nun zunächst:

Satz XX. *Jede eigentliche Hauptzahl von f ist auch eine von f_1.***)

Beweis. Es ist $f(\alpha, \beta + 1) = f_1(f(\alpha, \beta), \alpha)$. Ist nun γ eine eigentliche Hauptzahl von f und ist $\lambda \leqq \alpha < \gamma$, dann ist auch $\alpha + 1 < \gamma$, also $f(\alpha, \alpha + 1) < \gamma$, d. h. es ist $\gamma > f_1(f(\alpha, \alpha), \alpha) \geqq f_1(\alpha, \alpha)$, da $f(\alpha, \alpha) \geqq \alpha$ ist. Aus $\alpha < \gamma$ folgt somit $f_1(\alpha, \alpha) < \gamma$, d. h. γ ist eine Hauptzahl von f_1.

Es sei bemerkt, daß in dem speziellen Fall, daß $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$ ist, XX in den Satz XVIII übergeht. — Satz XX ist im allgemeinen nicht umkehrbar. Dagegen läßt sich im Anschluß an VI über die Hauptzahlen von f_1 ein Satz aussagen, der diese Zahlen unter Zuhilfenahme von f in einer Weise charakterisiert, die eine Umkehrung zuläßt. Es geht nämlich für unsern Fall die Ungleichung des Satzes VI in eine Gleichung über.

Satz XXI. *Ist γ eine Hauptzahl von f_1, dann hat die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \xi)$ für jedes der Bedingung $\gamma \geqq w(\alpha)$ genügende α genau eine Wurzel ξ.****)

*) Falls für jedes $\xi \geqq \lambda_1$ stets $w_1(\xi) > \xi$ ist, gilt das bereits für $\eta \geqq 1$ (V). Dann ist also $\eta_0 = 1$, während i. a. $\eta_0 = 2$ ist.

**) Eine uneigentliche Hauptzahl von f, d. h. $\gamma = 1, 2$, braucht keine von f_1 zu sein.

***) Natürlich muß $\alpha \geqq \lambda$ sein; unter der Voraussetzung (d) (s. weiter unten) folgt aus XXIII, daß ξ eine Hauptzahl von f_2 ist, falls $\gamma > w(\alpha)$, d. h. $\xi > 1$ ist.

Beweis. Es sei also γ eine Hauptzahl von f_1 und es gebe eine Zahl $\alpha \geqq \lambda$, für die $\gamma \geqq w(\alpha) = f(\alpha, 1)$ ist. Nach VI existiert dann eine Zahl ξ, sodaß $f(\alpha, \xi + 1) > \gamma \geqq f(\alpha, \xi)$ ist. Wäre nun $\gamma > f(\alpha, \xi) \geqq \alpha$, dann folgte, da γ Hauptzahl von f_1 ist, die Beziehung
$$f(\alpha, \xi + 1) = f_1(f(\alpha, \xi), \alpha) < \gamma,$$
während doch $f(\alpha, \xi + 1) > \gamma$ ist. Somit muß $\gamma = f(\alpha, \xi)$ sein. Die Umkehrung lautet nun:

Satz XXII. *Giebt es zu einer Zahl γ unendlich viele der Ungleichung $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ genügende Zahlen α und besitzt für jedes dieser α die Gleichung $\gamma = f(\alpha, \xi)$ eine Lösung ξ, dann ist γ eine eigentliche Hauptzahl von f_1.*

Beweis. Da γ sich nach Voraussetzung auf unendlich viele Arten in der Form $f(\alpha, \xi)$ darstellen läßt, so ist nach VIII die Zahl γ eine Limeszahl. Sei $\lambda \leqq \alpha < \gamma$ und $\gamma = f(\alpha, \xi)$, dann ist $\xi > 1$. Wäre nämlich $\xi = 1$, also $\gamma = f(\alpha, 1) = w(\alpha)$, dann sei $\alpha < \alpha' < \gamma$ und $\gamma = f(\alpha', \xi')$ nach Voraussetzung. Da nun $w(\alpha') > w(\alpha) = f(\alpha, 1) = f(\alpha', \xi')$ ist, so wäre $w(\alpha') = f(\alpha', 1) > f(\alpha', \xi')$, d. h. $1 > \xi' \geqq 1$, was nicht geht. Somit ist $\xi \geqq 2$. Also folgt:
$$\gamma = f(\alpha, \xi) \geqq f(\alpha, 2) = f_1(f(\alpha, 1), \alpha) \geqq f_1(\alpha, \alpha);$$
es ist daher für $\alpha < \gamma$ stets $f_1(\alpha, \alpha) \leqq \gamma$, und da $f_1(\alpha, \alpha)$ mit α wächst, so ist $f_1(\alpha, \alpha) < \gamma$, mithin ist γ eine Hauptzahl von f_1.

Es ist uns folgendes bekannt: es stellt $f(\alpha, \beta)$ für $f(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine Hauptzahl γ von f dar, wenn $\beta = \gamma > \alpha$ ist; $f_1(\alpha, \beta)$ stellt für $f_1(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine Hauptzahl γ_1 von f_1 dar, wenn $\beta = \gamma_1 > \alpha$ ist; aus XX folgt, daß $f_1(\alpha, \beta)$ für $f_1(\alpha, \beta) > \alpha$ dann und nur dann eine eigentliche Hauptzahl γ von f darstellt, wenn $\beta = \gamma > \alpha$ ist. Wann ist nun $f(\alpha, \beta)$ eine Hauptzahl von f_1? Kann man vielleicht durch Charakterisierung von β die Bedingung dafür angeben? Im allgemeinen wohl kaum. Wir wollen indessen eine Eigenschaft der Funktion f voraussetzen, die in unseren späteren Anwendungen erfüllt ist. Es besitze nämlich f ein distributives Gesetz. Die Multiplikation besitzt ja ein solches; auch für transfinite Zahlen gilt das, wie wir sehen werden. Es erscheint aber als bemerkenswert, daß auch die Potenzfunktion ein solches Gesetz besitzt, falls man nämlich den Begriff des distributiven Gesetzes gehörig weit faßt. Dann kann man die bekannten Formeln $ab + ac = a(b + c)$, $a^b a^c = a^{b+c}$ von einem einheitlichen Gesichtspunkt aus ansehen. Wir setzen nämlich als verallgemeinertes distributives Gesetz voraus: *es existiere zu f eine Funktion f_2 derart, daß*

(d) $\quad f_1(f(\alpha, \beta), f(\alpha, \delta)) = f(\alpha, f_2(\beta, \delta))$ *) *ist.*

*) Ist für ein einziges α die Gleichung $w(\alpha) = \alpha$ erfüllt, so ist unter der Voraussetzung (d) *stets* $w(\alpha) = \alpha$. Das tritt dann und nur dann ein, wenn $f_2(1, 1) = 2$ ist, eine Gleichung aus der die allgemeinere Relation $f_2(\beta, 1) = \beta + 1$ folgt.

Wir werden sehen, daß in der Tat ein solches Gesetz allgemein gilt, wenn f die multiplikative oder die Potenzfunktion ist; im ersteren Falle ist speziell $f_2 = f_1$. Wenn (d) identisch besteht, dann läßt sich über f_2 folgendes aussagen. Es muß $f_2(\beta, \delta)$ für $\beta, \delta \geqq 1$ definiert sein; dabei braucht f_2 aber keine nach unserem Induktionsschema definierte Funktion zu sein. Da die linke Seite von (d) wächst, wenn δ wächst und α, β konstant sind, so folgt das gleiche für die rechte Seite; also muß bei konstantem β die Funktion $f_2(\beta, \delta)$ mit δ wachsen, d. h. f_2 erfüllt III. Ebenso gilt IV für die Funktion f_2; es ist also $\lim\limits_{\delta} f_2(\beta, \delta) = f_2(\beta, \lim \delta)$. Um zu zeigen, daß auch V gilt, wählen wir $\alpha \geqq \omega$ und wenden XVII an: es folgt dann unter Benutzung von (d): $f(\alpha, f_2(\beta, \delta)) \geqq f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \delta) > f(\alpha, \beta)$. Also $f_2(\beta, \delta) > \beta$ und ebenso, da $f(\alpha, \beta) + f(\alpha, \delta) \geqq f(\alpha, \delta)$ ist, $f_2(\beta, \delta) \geqq \delta$.

Aus (d) folgt weiter, daß bei konstantem δ die Funktion f_2 mit wachsendem β nicht abnimmt, also gilt VII. *Aus diesen Sätzen folgt dann, daß f_2 auch Hauptzahlen besitzt. Da beständig $f_2(\beta, \delta) > \beta$ ist, so besitzt f_2 nur eigentliche Hauptzahlen.* (Man vergl. den Beweis zu IX.)*) Es gilt nun unter der Voraussetzung (d)

Satz XXIII. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $f(\alpha, \beta)$ für $\beta > 1$ eine Hauptzahl von f_1 darstellt, besteht darin, daß β eine Hauptzahl von f_2 ist.*

Beweis. Erstens sei $f(\alpha, \beta)$ eine Hauptzahl γ_1 von f_1 und $\beta > 1$, dann ist zu zeigen, daß β eine Hauptzahl von f_2 ist. Es sei $1 \leqq \xi < \beta$, dann ist $\gamma_1 = f(\alpha, \beta) > f(\alpha, \xi)$, also folgt:

$$\gamma_1 = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1) = f_1(f(\alpha, \xi), f(\alpha, \beta)) = f(\alpha, f_2(\xi, \beta)) = f(\alpha, \beta),$$

d. h. es ist $\beta = f_2(\xi, \beta)$ für jedes der Beziehung $1 \leqq \xi < \beta$ genügende ξ; mithin ist β eine Hauptzahl von f_2. Sei zweitens β eine Hauptzahl von f_2, dann ist $\beta > 1$ und $\beta = f_2(\xi, \beta)$ für $1 \leqq \xi < \beta$. Sei nun $\alpha \geqq \lambda$, dann setze man $f(\alpha, \beta) = \gamma_1$; es ergibt sich dann:

$$\gamma_1 = f(\alpha, \beta) = f(\alpha, f_2(\xi, \beta)) = f_1(f(\alpha, \xi), f(\alpha, \beta)) = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1)$$

für jedes ξ, für das $1 \leqq \xi < \beta$ ist. Konvergiert nun ξ gegen β, so konvergiert $f(\alpha, \xi)$ gegen $f(\alpha, \beta) = \gamma_1$. Also ist $\gamma_1 = f_1(f(\alpha, \xi), \gamma_1)$ für eine Folge von Zahlen $f(\alpha, \xi)$, deren Limes γ_1 ist. Somit ist nach X die Zahl γ_1 eine Hauptzahl von f_1. — In der Anm. zu XXI ist bereits eine Anwendung von XXIII gemacht worden. Es gehören XXI bis XXIII eng zusammen. Die Hauptzahlen γ_1 von f_1 werden durch XXI, XXII auf eine Art und durch XXIII auf eine zweite Art charakterisiert.

---

*) Man muß dann allerdings als Definitionsbereich für f_2 nur das Gebiet $\beta \geqq 1$, $\delta \geqq 1$ ansehen, selbst wenn f_2 auch für $\beta = 0$ oder $\delta = 0$ mit definiert sein sollte.

Genau wie man das distributive Gesetz so erweitern konnte, daß auch die Potenzfunktion ihm genügt, kann man das assoziative so verallgemeinern, daß die Potenz es auch erfüllt.

Wir setzen voraus, daß zu f eine Funktion f_3 existiert, die identisch der Funktionalgleichung

(e) $$f(f(\alpha, \beta), \delta) = f(\alpha, f_3(\beta, \delta))\ ^{*)}$$

genügt.

Unter dieser Voraussetzung läßt sich ein in der Richtung von Satz XV liegendes Resultat aussprechen:

Satz XXIV. *Es sei $\beta = f(\xi, \eta)$ und $f_3(2, \eta) = \eta$, dann hat bei festem η und β die Gleichung $\beta = f(\vartheta, \eta)$ unendlich viele Wurzeln ϑ, die einen Limes γ_1 besitzen, und γ_1 ist eine Hauptzahl von f_1.*

Beweis. Da $f_3(2, \eta) = \eta$ ist, so folgt

$$\beta = f(\xi, \eta) = f(\xi, f_3(2, \eta)) = f(f(\xi, 2), \eta).$$

Nun ist $f(\xi, 2) = f_1(f(\xi, 1), \xi) \geqq f_1(\xi, \xi) \geqq \xi$. Also ergibt sich die Beziehung $\beta = f(f(\xi, 2), \eta) \geqq f(f_1(\xi, \xi), \eta) \geqq f(\xi, \eta) = \beta$, d. h. $\beta = f(f_1(\xi, \xi), \eta)$. Somit ist mit ξ zugleich die Zahl $f_1(\xi, \xi)$ eine Wurzel ϑ der Gleichung $\beta = f(\vartheta, \eta)$. (Sollte etwa $f_1(\xi, \xi) = \xi$ sein, so ist jedenfalls für die größere Wurzel $\xi' = f(\xi, 2)$ sicher $f_1(\xi', \xi') > \xi'$.) Daraus folgt nach XI, daß diese Wurzeln ϑ eine Hauptzahl γ_1 zum Limes haben. — *Ob* freilich die Gleichung $\beta = f(\gamma_1, \eta_1)$ eine Wurzel η_1 hat, das muß im allgemeinen unentschieden bleiben, wenngleich es in den folgenden Anwendungen stets eintreten wird. **)

§ 4.
Die Multiplikation.

1) Wir setzen jetzt $w(\alpha) = \alpha$ und wählen außerdem $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$. Da nun $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta > \xi$ für $\xi \geqq 0$, $\eta \geqq 1$ ist, so ist $\lambda = 1$. Es ist also (b) und auch (c′) erfüllt. Die durch diese Festsetzungen definierte

*) Aus (e) folgt ohne Schwierigkeit, daß f_3 selbst das gewöhnliche assoziative Gesetz $f_3(f_3(\alpha, \beta), \delta) = f_3(\alpha, f_3(\beta, \delta))$ erfüllt. — Ist auch nur für ein einziges α die Gleichung $w(\alpha) = \alpha$ erfüllt, so ist unter der Voraussetzung (e) *stets* $w(\alpha) = \alpha$. Das tritt dann und nur dann ein, wenn $f_3(1, 1) = 1$ ist, eine Beziehung, aus der die allgemeinere Gleichung $f_3(\beta, 1) = f_3(1, \beta) = \beta$ folgt. — Wenn (d) und (e) simultan erfüllt sind, so ist f_3 eine nach dem in § 1 entwickelten Induktionsschema definierte Funktion. Denn aus (e) folgt, da f Bedingung (c′) erfüllt, daß $f_3(\beta, 1)$ mit β wächst; aus (d) und (e) aber folgt: $f_3(\beta, \delta + 1) = f_2(f_3(\beta, \delta), \beta)$ und außerdem erfüllt f_3 Satz IV. *Es erscheint bemerkenswert, daß für den Fall $w(\alpha) \equiv \alpha$ aus dem distributiven Gesetz* (d) *das assoziative Gesetz* (e) *folgt.*

**) In einer demnächst in den Math. Ann. erscheinenden Arbeit wird auch diese Frage durch eingehende Untersuchung der Gesetze (*d*) und (*e*) in gewisser Weise zur Entscheidung gebracht werden.

Operation $f(\alpha, \beta)$ bezeichnen wir mit $\alpha \cdot \beta$ oder kurz mit $\alpha\beta$ und nennen $\alpha\beta$ das *Produkt* aus α und β; die Zahl α heißt *linksseitiger Divisor oder Teiler* von $\alpha\beta$, β *rechtsseitiger Divisor oder Teiler* von $\alpha\beta$. Man redet statt dessen auch wohl vom links- oder rechtsseitigen *Faktor*. Die Operation selbst nennt man die *Multiplikation*.

2) Unsere Operation ist also nach § 1 folgendermaßen definiert:

$$1)\quad \alpha \cdot 1 = \alpha,$$

$$2)\quad \alpha(\beta + 1) = \alpha \cdot \beta + \alpha = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot 1,$$

$$3)\quad \alpha\bar{\beta} = \lim_{\beta} (\alpha\beta),$$

wo β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\bar{\beta} = \lim \beta$ durchläuft.

Durch (1) bis (3) ist $\alpha\beta$ für $\alpha \geqq 1$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (1) und (2) folgt, daß man zweckmäßig die Definition erweitert durch

$$4)\quad 0\beta = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0,$$

$$5)\quad \alpha 0 = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 0.$$

Für endliches $\beta = b$ ist $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden), wie leicht aus (1) und (2) folgt.

3) Nach III folgt für $\alpha \geqq 1$ aus $\beta > \beta'$ auch $\alpha\beta > \alpha\beta'$; und ist $\alpha\beta > \alpha\beta'$, dann ist $\alpha \geqq 1$ und $\beta > \beta'$; schließlich folgt aus $\alpha\beta = \alpha\beta'$, falls $\alpha \geqq 1$ ist, daß auch $\beta = \beta'$ ist. Aus $\beta > 1$ folgt für $\alpha \geqq 1$ hiernach $\alpha\beta > \alpha$. *Ein von Null verschiedenes Produkt, dessen rechtsseitiger Faktor größer als 1 ist, ist somit größer als der linksseitige Faktor.*

4) Ist eine Folge von Zahlen δ mit $\bar{\beta}$ als Limes gegeben, dann ist nach IV: $\alpha\bar{\beta} = \alpha \lim \delta = \lim_{\delta} (\alpha\delta)$.

5) Wir benutzen statt V den schärferen Satz XVII; aus ihm folgt für $\alpha \geqq 1$, daß für $\beta \geqq \omega$ stets $\alpha\beta \geqq \alpha + \beta$ ist. Und für $b \geqq 1$, $\alpha \geqq 1$ folgt $\alpha b \geqq \alpha + b - 1$. Aus $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden) folgt, daß genauer $\alpha b \geqq \alpha + b$ für $\alpha > 1$, $b > 1$ ist. Es folgt aus diesen Formeln, daß für $\alpha \geqq 1$ stets $\alpha\beta \geqq \beta$ ist. *Ein Produkt, dessen linksseitiger Teiler von Null verschieden ist, ist also nie kleiner als der rechtsseitige Teiler.*

6) *(Der Euklidische Algorithmus.)* Sei $\alpha \geqq 1$ und $\beta \geqq w(\alpha) = \alpha$, dann existiert nach VI eine einzige durch α und β bestimmte Zahl ξ, sodaß $\alpha(\xi + 1) = \alpha\xi + \alpha > \beta \geqq \alpha\xi \geqq \xi$ ist.

Aus $\beta \geqq \alpha\xi$ folgt nach § 2 die Gleichung $\beta = \alpha\xi + \varrho$, wo ϱ durch α und β eindeutig bestimmt ist; also ist $\alpha\xi + \alpha > \beta = \alpha\xi + \varrho$, d. h. $\alpha > \varrho$. Ist $\xi = \beta$, dann folgt $\beta \geqq \alpha\beta \geqq \beta$, d. h. $\beta = \alpha\beta$ und $\varrho = 0$. Also gilt der

Satz. *Ist $\beta \geqq \alpha \geqq 1$, dann gibt es ein einziges Zahlenpaar ξ, ϱ, so daß $\beta = \alpha\xi + \varrho$, $\xi \leqq \beta$ und $\varrho < \alpha$ ist. Ist $\xi = \beta$, dann ist $\varrho = 0$.*

Hieraus folgt), daß jeder gemeinsame linksseitige Teiler von α und β auch ein solcher von ϱ ist, d. h. ist $\alpha = \delta\alpha'$, $\beta = \delta\beta'$, dann ist $\varrho = \delta\varrho'$.*

Da $\alpha > \varrho$ ist, so kann man, falls $\varrho \geqq 1$ ist, entsprechend $\alpha = \varrho\xi_1 + \varrho_1$ setzen, wo $\varrho > \varrho_1$ ist. Fährt man so fort, so bricht die Kette der Gleichungen ab, da $\alpha > \varrho > \varrho_1 > \cdots$ ist. Genau wie in der endlichen Zahlentheorie liefern die Gleichungen den Euklidischen Algorithmus zur Aufsuchung des größten gemeinsamen (linksseitigen) Teilers von α und β, worauf wir jedoch erst später eingehen.

7) Nach VII folgt aus $\alpha \geqq \alpha'$ die Beziehung $\alpha\beta \geqq \alpha'\beta$ und, wenn $\alpha\beta > \alpha'\beta$ ist, dann ist $\alpha > \alpha'$. Es gilt aber nach VII wegen (c') das schärfere Resultat: aus $\alpha > \alpha'$ folgt $\alpha(\beta + 1) > \alpha'(\beta + 1)$, also ergibt sich aus $\alpha(\beta + 1) = \alpha'(\beta + 1)$, daß $\alpha = \alpha'$ ist. Ist also $\alpha\beta = \alpha'\beta$, $\alpha \neq \alpha'$ und $\beta > 0$, dann ist β eine Limeszahl. Aus $\alpha \geqq 1$ folgt $\alpha\beta \geqq 1 \cdot \beta$ und nach Nr. 5 ist $\alpha\beta \geqq \beta$. Diese beiden unteren Schranken für $\alpha\beta$ sind aber identisch, d. h. es ist $1\beta = \beta$ für jedes β, wie sich leicht durch transfinite Induktion aus der Definition des Produktes ergibt.

Aus dem soeben Bewiesenen ergibt sich daher: ist für $\beta \geqq 1$, $\alpha > 1$ die Gleichung $\beta = 1 \cdot \beta = \alpha\beta$ erfüllt, dann ist β eine Limeszahl. Und deshalb gilt weiter: *Ein Produkt, dessen linksseitiger Teiler größer als* 1 *und dessen rechtsseitiger Divisor keine Limeszahl ist, ist größer als dieser rechtsseitige Divisor, denn es ist ja für $\alpha > 1$ auch*

$$\alpha(\beta + 1) > 1(\beta + 1) = \beta + 1.$$

8) Es gilt das assoziative Gesetz: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Man bezeichnet diese beiden Produkte daher mit $\alpha\beta\gamma$. Also ist Voraussetzung (e) aus § 3 erfüllt und zwar ist $f_3(\xi, \eta) \equiv f(\xi, \eta) = \xi\eta$.

Es gilt auch das distributive Gesetz: $\alpha\beta + \alpha\gamma = \alpha(\beta + \gamma)$. Somit ist (d) erfüllt; es ist in unserem Fall $f_2(\xi, \eta) \equiv f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$.

Beide Gesetze sind für $\gamma = 0, 1$ richtig und werden leicht durch vollständige Induktion bewiesen.**)

9) Aus XXI ff. folgt daher für unseren Fall, in dem $w(\alpha) = \alpha$ und die Hauptzahlen von f_1 und f_2 die additiven Hauptzahlen sind:

(a) *Ist π eine additive Hauptzahl und $\pi \geqq \alpha \geqq 1$, dann ist α ein linksseitiger Teiler von π, d. h. es ist $\pi = \alpha\xi$, wo die eindeutig bestimmte Zahl ξ eine Hauptzahl von f_2, also wiederum eine additive Hauptzahl ist.* (XXI.)

---

*) Der Beweis benutzt das distributive Gesetz (s. Nr. 8).

**) Das assoziative Gesetz gilt auch für mehr als drei Zahlen, so daß es außer Zweifel steht, was $\alpha\beta\gamma\delta \cdots \varkappa$ bedeutet. Es ist

$$\alpha(\beta + \gamma + \delta + \cdots + \varkappa) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \cdots + \alpha\varkappa.$$

(b) *Hat eine überendliche Zahl π die Eigenschaft, daß zu jedem der Beziehung $1 \leqq \alpha \leqq \pi$ genügenden α eine Zahl ξ existiert, für die $\pi = \alpha\xi$ ist, dann ist π eine additive Hauptzahl* (XXII.)

(c) *Ist $\alpha\beta$ eine additive Hauptzahl, dann ist β eine additive Hauptzahl; ist β eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann ist auch $\alpha\beta$ $(\alpha \geqq 1)$ eine additive Hauptzahl.* (XXIII.)

Es war die erste additive Hauptzahl über α der Limes der Folge: α, $\alpha + \alpha = \alpha 2$, $\alpha + \alpha + \alpha = \alpha 3, \cdots, \alpha n, \cdots$, also gleich $\alpha\omega$. Daß für $\alpha > 0$ die erste additive Hauptzahl über α die Zahl $\alpha\omega$ ist, läßt sich auch direkt aus unseren soeben aufgestellten Sätzen zeigen.

Denn wenn $\alpha > 0$ ist, so ist nach Satz (c) wirklich $\alpha\omega$ eine oberhalb α gelegene additive Hauptzahl; sei π irgend eine solche $\pi > \alpha$, dann ist nur zu zeigen, daß $\pi \geqq \alpha\omega$ ist. Nun ist nach Satz (a) $\pi = \alpha\pi' > \alpha = \alpha 1$, also $\pi' > 1$, wo π' eine additive Hauptzahl ist; also ist $\pi' \geqq \omega$ und $\pi = \alpha\pi' \geqq \alpha\omega$. — Ist $\alpha > 0$ und π die größte nicht oberhalb α gelegene additive Hauptzahl, dann ist die erste additive Hauptzahl über α auch die erste additive Hauptzahl über π, d. h. $\alpha\omega = \pi\omega$. Allgemeiner besteht für jede additive Hauptzahl $\pi' \geqq \omega$ die Gleichung $\alpha\pi' = \pi\pi'$. Diese für $\pi' = \omega$ soeben bewiesene Gleichung beweist man unschwer durch transfinite Induktion. Benutzt werden beim Beweise die folgenden Tatsachen: 1) die Gültigkeit des assoziativen Gesetzes der Multiplikation; 2) auf die additive Hauptzahl π'' folgt als nächste Zahl dieser Art $\pi''\omega$; 3) Der Limes einer Menge von Hauptzahlen der Addition ist eine additive Hauptzahl.

10) Sei nun eine Zahl β gegeben, die wir in der Normalform schreiben: $\beta = \pi_1 + \pi_2' + \cdots + \pi_{s'}'$; $\pi_1 \geqq \pi_2' \geqq \cdots \geqq \pi_{s'}'$. Hier können mehrere aufeinander folgende additive Hauptzahlen einander gleich sein. Faßt man sie zusammen, so erhalten wir in anderer Bezeichnung: $\beta = \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 + \cdots + \pi_s b_s + b$, wo nun $\pi_1 > \pi_2 > \pi_3 > \cdots > \pi_s \geqq \omega$ ist und $b, b_1, b_2, \cdots, b_s$ endliche Zahlen sind. Sei weiter:
$\alpha = \pi_1'' a_1 + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$; $\pi_1'' > \pi_2'' > \cdots > \pi_r'' \geqq \omega$; $a, a_r, \cdots, a_1 < \omega$.

Es kann kurz geschrieben werden: $\alpha = \pi_1'' a_1 + \alpha'$, wo $\alpha' + \pi_1'' a_1 = \pi_1'' a_1$ ist. Ist nun $b > 0$, dann ist $\alpha b = \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden α) $= \pi_1'' a_1 + \alpha' + \pi_1'' a_1 + \alpha' + \cdots = \pi_1'' a_1 + \pi_1'' a_1 + \cdots$ (b Mal) $+ \alpha' = \pi_1'' a_1 b + \alpha' = \pi_1'' a_1 b + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$. Also ist αb in der Normalform dargestellt. Weiter ist $\alpha\beta = \alpha\pi_1 b_1 + \cdots + \alpha\pi_s b_s + \alpha b$. Also folgt wegen der letzten Gleichung aus Nr. 9: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s + \alpha b$. Ist $b = 0$, also $\alpha b = 0$, dann ist die Normaldarstellung für $\alpha\beta$ gegeben durch: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s$. Ist aber $b > 0$, dann folgt die Normaldarstellung für $\alpha\beta$, indem man für αb die oben gefundene Normalform einsetzt: $\alpha\beta = \pi_1''\pi_1 b_1 + \cdots + \pi_1''\pi_s b_s + \pi_1'' a_1 b + \pi_2'' a_2 + \cdots + \pi_r'' a_r + a$.
Das ist in der Tat die Normalform, da

$$\pi_1''\pi_1 > \pi_1''\pi_2 > \cdots > \pi_1''\pi_s > \pi_1'' > \pi_2'' > \cdots > \pi_r'' \geqq \omega$$

ist.

11) Aus diesen Formeln folgt: *$\alpha\beta$ ist dann und nur dann eine Limeszahl, wenn α oder β eine solche ist.* Das ergibt sich direkt so: 1) Seien $\alpha = \alpha' + 1$, $\beta = \beta' + 1$, dann ist $\alpha\beta = \alpha\beta' + \alpha = (\alpha\beta' + \alpha') + 1$, d. h. wenn die von Null verschiedenen Zahlen α, β keine Limeszahlen sind, so ist auch $\alpha\beta$ keine Limeszahl. 2) Sei β eine Limeszahl, $\alpha > 0$, dann ist $\alpha\beta$ nach der Erklärung des Produktes eine Limeszahl. 3) Sei $\beta = \beta' + 1 \geqq 1$ und α eine Limeszahl, dann ist $\alpha\beta = \alpha\beta' + \alpha$ nach der Erklärung der Summe eine Limeszahl.

12) Sei γ eine Limeszahl; der kleinste von Null verschiedene Rest von γ ist eine additive Hauptzahl $\pi \geqq \omega$. Es ist $\gamma = \gamma' + \pi$. Nach Nr. 6 ist $\gamma' = \pi\gamma'' + \varrho$, wo $\varrho < \pi$, also $\varrho + \pi = \pi$ ist. Daher ist

$$\gamma = \pi\gamma'' + \varrho + \pi = \pi\gamma'' + \pi = \pi(\gamma'' + 1).$$

Sei eine zweite derartige Darstellung für γ gefunden, d. h. es sei

$$\gamma = \pi(\gamma'' + 1) = \pi_1(\gamma_1'' + 1) = \pi\gamma'' + \pi = \pi_1\gamma_1'' + \pi_1.$$

Nach § 2 folgt hieraus $\pi = \pi_1$, also nach Division mit $\pi = \pi_1$: $\gamma'' + 1 = \gamma_1'' + 1$, $\gamma'' = \gamma_1''$. Man kann auch so schließen: es sei $\pi_1 \geqq \pi$, $\pi_1 = \pi\pi'$, also $\gamma'' + 1 = \pi'(\gamma_1'' + 1)$. Nach Nr. 11 ist daher π' keine Limeszahl und da π' eine additive Hauptzahl ist (Nr. 9, Satz (a)), so ist $\pi' = 1$, d. h. $\pi_1 = \pi$, $\gamma'' = \gamma_1''$. Diese Darstellung von γ ist also eindeutig.

13) Satz. *Jede von Null verschiedene Zahl γ hat nur endlich viele rechtsseitige Teiler; die Anzahl ihrer linksseitigen Divisoren ist unendlich oder endlich, je nachdem die Zahl γ eine Limeszahl ist oder nicht.*

Beweis. Der Satz folgt beinahe seinem ganzen Inhalte nach aus VIII. Es ist hier nur noch zu zeigen: ist γ eine Limeszahl, dann hat γ unendlich viele linksseitige Teiler. Sei also γ eine Limeszahl. Nach der vorigen Nr. ist $\gamma = \pi(\gamma'' + 1)$, wo $\pi \geqq \omega$ ist. Nach Nr. 9, Satz (a) besitzt nun π unendlich viele linksseitige Divisoren, also nach dem assoziativen Gesetz auch γ selbst.

14) Da für jede von Null verschiedene Zahl γ die Zerlegungen $\gamma = 1\,\gamma = \gamma 1$ gelten, so hat jede Zahl $\gamma > 1$ mindestens zwei verschiedene rechtsseitige Divisoren. Unter den endlichen Zahlen gibt es Zahlen mit genau zwei rechtsseitigen Divisoren: die endlichen Primzahlen. Fragt man allgemein nach den Zahlen $\gamma > 1$, die nur die beiden rechtsseitigen Divisoren 1 und γ besitzen, so sind das die Zahlen, die sich nicht in der Form $\gamma = \alpha\beta$ darstellen lassen, wo α und β beide unterhalb γ liegen, d. h. es sind das Zahlen, die wir als multiplikativ irreduzibel bezeichnen, da wir sie mit

Hilfe der Multiplikation nicht auf kleinere Zahlen zurückführen können.*) Daß es derartige irreduzibele Zahlen gibt, ist uns bekannt, denn jede Hauptzahl der Multiplikation ist, wie aus den allgemeinen Untersuchungen hervorgeht, multiplikativ irreduzibel. Während nun aber die Addition die wesentliche Eigenschaft besaß, daß Hauptzahlen, irreduzibele Zahlen und Primzahlen zusammenfielen, liegen hier die Verhältnisse anders: die Hauptzahlen bilden nur einen Teil der irreduzibelen Zahlen, und unter den irreduzibelen Zahlen hat nur ein kleiner Teil vollkommenen Primzahlcharakter, nämlich die endlichen Primzahlen und die Zahl ω. Wir gehen hierauf näher ein.

15) Nach XIII gibt es multiplikative Hauptzahlen γ. Sie sind definiert durch folgende Bedingungen: 1) $\gamma > 1$. 2) $\gamma = \alpha\gamma$ für jedes der Bedingung $1 \leqq \alpha < \gamma$ genügende α. Hiernach ist $2 = 1 \cdot 2$ eine multiplikative Hauptzahl und jede größere Hauptzahl der Multiplikation ist eine Limeszahl. Diese eigentlichen multiplikativen Hauptzahlen nennen wir im Anschluß an Hessenberg**) δ-Zahlen. Eine δ-Zahl hat nur die beiden rechtsseitigen Divisoren 1 und δ. Es gelten die Sätze:

(a) *Jede δ-Zahl ist eine additive Hauptzahl.* (XVIII oder XX.)

(b) *Ist eine Zahl δ der Limes einer Folge von Zahlen α, deren jede die Gleichung $\delta = \alpha\delta$ erfüllt, dann ist δ eine δ-Zahl.* (X.)

(c) *Hat eine Folge von Zahlen $\alpha \geqq 1$ die Eigenschaft, daß mit α zugleich auch $\alpha\alpha$ der Folge angehört, dann hat diese Folge einen Limes, der eine δ-Zahl ist.* (XI.)

(d) *Der Limes einer Folge von δ-Zahlen ist eine δ-Zahl.* (XII.)

(e) *Ist $\alpha \geqq 2$, dann ist der Limes der Folge $\alpha, \alpha\alpha, \alpha\alpha\alpha, \cdots$ die erste auf α folgende δ-Zahl.****) (XIII.)

Die erste δ-Zahl ist ω.†) Das folgt einfach daraus, daß das Produkt zweier endlichen Zahlen wieder endlich ist; oder auch aus der Definition von $n\omega$, denn es ist $n\omega = \lim\limits_{m<\omega} (nm) = \omega$, wo $1 \leqq n < \omega$ ist. Schließlich ergibt es sich auch daraus, daß $n\omega$ die erste additive Hauptzahl über n ist und diese Zahl andererseits ω ist. Aus Nr. 6 folgt für jede Limeszahl β eine Gleichung $\beta = \omega\beta' + \varrho$, wo $\omega > \varrho \geqq 0$; d. h. ϱ endlich ist. Also ist $\varrho = 0$, d. h. $\beta = \omega\beta'$ und hieraus folgt

*) Dabei kann sehr wohl $\gamma = \alpha\gamma$ sein, wo $1 < \alpha < \gamma$ ist; es kann also γ zerlegbar sein, aber bei allen Produktdarstellungen von γ, bei denen $\alpha < \gamma$ ist, ist der rechtsseitige Faktor gleich γ.

**) G. d. M., § 82.

***) Man vergleiche die sich an XIII anschließenden Bemerkungen und die Anm. zu § 2, Nr. 12, Satz (d).

†) Bei Hessenberg, G. d. M., ist irrtümlicherweise 1 als erste δ-Zahl genannt.

$$n\beta = (n\omega)\beta' = \omega\beta' = \beta,$$

wo $1 \leqq n < \omega$ ist. *Insbesondere ist* $2\beta = \beta$, *eine Gleichung, die nach Nr. 7 die Limeszahlen charakterisiert.*

Wir sahen oben, daß die multiplikativ irreduzibelen Zahlen diejenigen sind, die nur zwei rechtsseitige Teiler besitzen. Weiter ergab sich, daß jede δ-Zahl eine irreduzibele Limeszahl ist. Wir zeigen jetzt die Umkehrung:

(f) *Jede irreduzibele Limeszahl, d. h. jede Limeszahl mit genau zwei rechtsseitigen Teilern ist eine δ-Zahl.*

16) Um (f) zu beweisen, müssen wir erst zwei andere Sätze aufstellen.

Satz. *Sei die Limeszahl β ein rechtsseitiger Teiler von γ, dann hat die Gleichung $\gamma = \alpha\beta$ unendlich viele Wurzeln α, die eine additive Hauptzahl π zum Limes haben; diese ist ein linksseitiger Teiler von γ, d. h. es ist $\gamma = \pi\beta'$, wo β' der größte rechtsseitige Teiler von γ unterhalb β ist.*

Beweis. Da $f_3(2, \beta) = 2 \cdot \beta = \beta$ ist (Nr. 8 und 15), so dürfen wir Satz XXIV anwenden. Also gibt es unendlich viele Wurzeln, die als Limes eine Hauptzahl von $f_1(\xi, \eta) = \xi + \eta$ haben, d. h. eine additive Hauptzahl π zum Limes besitzen. Da für jede Wurzel α der Gleichung $\gamma = \alpha\beta$ stets $\gamma > \alpha$ ist, so ist $\gamma \geqq \pi$, also nach Nr. 6 auch $\gamma = \pi\beta' + \varrho$, wo $0 \leqq \varrho < \pi$ ist. Also gibt es eine Wurzel α, für die $\varrho < \alpha < \pi$ ist. Daraus folgt $\pi = \alpha\pi'$ (Nr. 9). Daher ist α ein linksseitiger Teiler von γ und π, also nach Nr. 6 auch von ϱ, und da $\varrho < \alpha$ ist, muß $\varrho = 0$, $\gamma = \pi\beta'$ sein. Nach XV ist β' der größte unterhalb β gelegene rechtsseitige Teiler von γ. Wählt man nun den rechtsseitigen Limesteiler β von γ gleich γ selbst ($\gamma = 1 \cdot \gamma = 2 \cdot \gamma = \cdots$), zieht dann Satz XIV nebst Zus. 2 heran, so folgt, daß π in diesem Fall eine δ-Zahl wird. Wir sprechen daher folgendes Resultat aus:

(g) *Für jede Limeszahl β besitzt die Gleichung $\beta = \alpha\beta$ unendlich viele Wurzeln α, deren Limes δ eine δ-Zahl ist. Es ist für eine Zahl α dann und nur dann $\beta = \alpha\beta$, falls $1 \leqq \alpha < \delta$ ist; dagegen ist $\beta = \delta\beta'$, wo β' der zweitgrößte rechtsseitige Divisor von β ist. Oberhalb δ gibt es keine δ-Zahl, die linksseitiger Teiler von β ist.**)

Hieraus folgt nun (f). Denn wenn β nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und β besitzt, so ist der zweitgrößte rechtsseitige Faktor $\beta' = 1$, d. h. $\beta = \delta\beta' = \delta$, also β eine δ-Zahl.

Damit sind uns nun die irreduzibeln Limeszahlen bekannt. Gibt es nun außer den endlichen multiplikativen Primzahlen andere irreduzibele Zahlen, die eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzen? Diese Frage ist zu bejahen.

---

*) Man vgl. § 2, Nr. 12, Satz (e).

17) Es sei β eine überendliche Zahl, die einen von 0 verschiedenen endlichen Rest besitzt, also $\beta = \beta' + b$; hier ist β' eine Limeszahl und $b > 0$. Da $b\beta' = \beta'$ ist, so ist $\beta = b(\beta' + 1)$. Nach Nr. 12 dürfen wir $\beta' = \pi(\beta'' + b'')$ setzen, wo π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, $\beta'' = 0$ oder gleich einer Limeszahl und $1 \leqq b'' < \omega$ ist. Also wird

$$\beta = b(\pi(\beta'' + b'') + 1) = b(\pi + 1)\,(\beta'' + b'') \quad [\text{Nr. } 10].$$

Hieraus folgt $\beta > \beta'' + b''$. Wenn nun β nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und β besitzt, so muß $\beta'' + b'' = 1$, d. h. $\beta'' = 0$, $b'' = 1$ sein, also ist $\beta = b(\pi + 1)$. Dann ist also $\pi + 1 \geqq \omega$ ein rechtsseitiger Teiler von β, also gleich β, d. h. $b = 1$, also $\beta = \pi + 1$. Sei nun umgekehrt π eine beliebige von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann hat $\pi + 1$ nur zwei rechtsseitige Teiler. Denn es sei $\pi + 1 = \mu\nu$ und $\nu > 1$, $\pi + 1 = \mu\nu > \mu$, d. h. $\pi \geqq \mu$. Also ist $\pi = \mu\pi'$, d. h. es ist μ ein linksseitiger Teiler von $\pi + 1 = \mu\nu$ und von $\pi = \mu\pi'$, also nach Nr. 6 auch von 1; es muß also $\mu = 1$ und $\nu = \pi + 1$ sein. Also besitzt $\pi + 1$ nur die beiden rechtsseitigen Teiler 1 und $\pi + 1$. Also gilt der

Satz. *Die Nicht-Limeszahlen oberhalb ω sind dann und nur dann multiplikativ irreduzibel, wenn sie die Gestalt $\pi + 1$ haben. Die multiplikativ irreduzibelen Zahlen zerfallen in drei Klassen: die endlichen Primzahlen, die Hauptzahlen der Multiplikation und die Zahlen der Form $\pi + 1$. Die Zahl 2 gehört in jede der drei Klassen.*

Auf die multiplikativ irreduzibelen Zahlen wird man auch geführt, wenn man den kleinsten oberhalb 1 gelegenen rechtsseitigen Teiler einer gegebenen Zahl betrachtet. Diese Betrachtungen sind ganz analog denen, die wir in § 2, Nr. 14 beim zweiten Beweise für die Cantorsche Normalform anstellten.

18) Satz. *Jede von 1 verschiedene additive Hauptzahl läßt sich in eindeutiger Weise als Produkt endlich vieler, nicht zunehmender δ-Zahlen darstellen.*

Dieser Satz entspricht dem in § 2, Nr. 14 bewiesenen. Und man kann ihn auch auf drei völlig analoge Arten beweisen. Es soll nur bemerkt werden, daß der erste Beweis an Nr. 16, Satz (g) anzuknüpfen hat, aus dem für die gegebene additive Hauptzahl π die Gleichung $\pi = \delta\pi'$ folgt, wo π' der zweitgrößte rechtsseitige Divisor von π ist.

19) Nach Nr. 12 läßt sich jede Zahl β in eindeutiger Weise in die Form setzen $\beta = \pi\beta'$, wo β' keine Limeszahl und π eine additive Hauptzahl ist. Aus Nr. 17 folgt, daß $\beta' = b(\pi' + 1)\,\beta''$ ist, wo $\beta' > \beta''$ ist. Hier ist β'' ebenfalls keine Limeszahl; ist $\beta'' \geqq \omega$, dann ist analog

$$\beta'' = b'(\pi'' + 1)\,\beta''', \quad \beta'' > \beta''', \text{ etc.}$$

Da die Reihe der Zahlen $\beta', \beta'', \beta''', \ldots$ beständig abnimmt, wird schließlich eine Gleichung $\beta^{(e)} = b^{(e-1)}(\pi^{(e)} + 1)\, b^{(e)}$ vorkommen. Entwickelt man nun noch π nach Nr. 18, so erhält man in veränderter Bezeichnung:

$$\beta = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r + 1)\, b_{r-1}(\pi_{r-1} + 1) \cdots b_1(\pi_1 + 1)\, b_0.$$

Zerlegt man noch die endlichen Zahlen b_t in ihre Primfaktoren, dann ist β als Produkt endlich vieler irreduzibeler Zahlen dargestellt. (Man würde diese Form auch erhalten, indem man in β' den kleinsten rechtsseitigen Faktor oberhalb 1 abspaltet etc.) Unsere Darstellung ist nun eindeutig, d. h. wenn wir

$$\begin{aligned}\beta &= \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r + 1) \cdots b_1(\pi_1 + 1)\, b_0 \\ &= \delta_1' \delta_2' \cdots \delta_{s'}' b_{r'}'(\pi_{r'}' + 1) \cdots b_1'(\pi_1' + 1)\, b_0'\end{aligned}$$

haben, wo

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \cdots \geqq \delta_s; \quad \delta_1' \geqq \delta_2' \geqq \cdots \geqq \delta_{s'}'$$

ist, dann behaupten wir:

$$r = r'; \quad s = s'; \quad \delta_i = \delta_i'; \quad \pi_i = \pi_i'; \quad b_i = b_i'.$$

Beweis. Aus Nr. 12 und Nr. 18 folgt sofort: $s = s'$, $\delta_i = \delta_i'$. Wir haben also nur noch die Gleichung

$$b_r(\pi_r + 1) \cdots b_1(\pi_1 + 1)\, b_0 = b_{r'}'(\pi_{r'}' + 1) \cdots b_1'(\pi_1' + 1)\, b_0'$$

zu behandeln. Hier ist π_i, $\pi_i' \geqq \omega$. Setzt man

$$\gamma = b_r(\pi_r + 1) \cdots b_1, \quad \gamma' = b_{r'}'(\pi_{r'}' + 1) \cdots b_1',$$

so lautet unsere Gleichung

$$\gamma(\pi_1 + 1)\, b_0 = \gamma(\pi_1 b_0 + 1) = \gamma'(\pi_1' + 1)\, b_0' = \gamma'(\pi_1' b_0' + 1).$$

Nun ist

$$\gamma \pi_1 = \overline{\pi} > \gamma, \quad \gamma' \pi_1' = \overline{\pi}' > \gamma',$$

also

$$\overline{\pi} b_0 + \gamma = \overline{\pi}' b_0' + \gamma'.$$

Nach § 2 folgt daher: $\gamma = \gamma'$, $b_0 = b_0'$, $\overline{\pi} = \overline{\pi}'$, d. h. wegen $\gamma = \gamma' : \pi_1 = \pi_1'$. Indem man nun in unserer Gleichung beiderseits rechts mit $(\pi_1 + 1)\, b_0$ dividiert und die übrig bleibende Gleichung $\gamma = \gamma'$ ebenso behandelt, folgt: $\pi_2 = \pi_2'$, $b_2 = b_2'$ etc. — Es gilt also der

Satz: *Jede Zahl β läßt sich in eindeutiger Weise in ein Produkt endlich vieler irreduzibeler Zahlen entwickeln:*

$$\beta = \delta_1 \delta_2 \cdots \delta_s b_r(\pi_r + 1)\, b_{r-1}(\pi_{r-1} + 1) \cdots b_1(\pi_1 + 1)\, b_0,$$

wo

$$\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \cdots \geqq \delta_s$$

ist. (Die endlichen Zahlen b_t sind noch in ihre Primfaktoren zu zerlegen; die Faktoren δ_t treten nur dann auf, falls β eine Limeszahl ist.)

Auch diese Produktformel rührt von G. Cantor her. Man kann sie ganz leicht, wie bereits Cantor angibt, aus der additiven Zerlegung folgern. Kennt man die eine Darstellung und ihre Eindeutigkeit, dann gilt von der anderen dasselbe. Und doch haben beide Formeln nicht den gleichen Wert. Denn bei der additiven Zerlegung sind die additiv irreduzibelen Bestandteile zugleich additive Primgrößen (§ 2). Dagegen sind, wie wir jetzt zeigen werden, die multiplikativ irreduzibelen Zahlen im allgemeinen keine vollkommenen multiplikativen Primzahlen und besitzen nur einen Teil der Eigenschaften, die wir für Primgrößen verlangen.*)

Man wird eine Zahl μ dann eine multiplikative Primzahl nennen, wenn sie folgende beiden Eigenschaften erfüllt: 1) aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \mu\xi$ folgt, daß μ ein linksseitiger Teiler von α oder β ist; 2) aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$ folgt, daß μ ein rechtsseitiger Teiler von α oder von β ist. *Die irreduzibelen Zahlen, die oberhalb ω liegen, also die δ-Zahlen und die Zahlen $\pi + 1$ $(\pi \geqq \omega)$ erfüllen die erste Bedingung nicht.* Denn es sei erstens $\pi \geqq \omega$ und $\mu = \pi + 1$, dann ist identisch $(\pi\pi + 1)\pi = (\pi + 1)\pi\pi$, also $\pi + 1$ ein linksseitiger Teiler von $(\pi\pi + 1)\pi$, aber kein solcher von π, da ja $\pi < \pi + 1$ ist, und auch kein solcher von $(\pi\pi + 1)$, da aus $(\pi\pi + 1) = (\pi + 1)\nu$ folgen würde, daß $\pi = \nu$, also $\pi\pi + 1 = \pi\pi$ wäre. Sei zweitens δ eine oberhalb ω gelegene δ-Zahl, dann ist identisch: $(\delta + 1)\omega = \delta\omega$, ohne daß δ ein linksseitiger Teiler von ω oder $\delta + 1$ ist. Dagegen erfüllen die übrigen irreduzibelen Zahlen, nämlich die endlichen Primzahlen p und die Zahl ω, die Bedingung 1). Denn sei erstens $\alpha\beta = \omega\xi$, dann ist $\alpha\beta$ eine Limeszahl, also entweder α oder β auch eine solche, d. h. ω ist ein linksseitiger Teiler von α oder β. Ist zweitens $\alpha\beta = p\xi$, so ist p ein linksseitiger Teiler von α oder β, wie man aus der Eindeutigkeit der Produktformel unschwer erkennt. Die zweite Bedingung dagegen wird von sämtlichen irreduzibelen Zahlen erfüllt, wie man ebenfalls aus der Produktformel ersehen kann; ist also $\alpha\beta = \eta\mu$, wo $\mu = p$, $\pi + 1$, δ ist, dann ist μ ein rechtsseitiger Teiler von α oder β und für $\mu \geqq \omega$ kann man sogar schließen, daß μ ein rechtseitiger Teiler von β ist. Ist $\mu = p$, so ist auch μ im allgemeinen ein rechtsseitiger Teiler von β, nämlich nur dann ein rechtsseitiger Faktor von α, wenn β eine endliche nicht durch p teilbare Zahl ist.

Erfüllt eine Zahl μ die zweite Bedingung, d. h. folgt aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$, daß μ ein rechtsseitiger Faktor eines der Faktoren ist, dann ist μ irreduzibel. Denn es sei μ nicht irreduzibel, dann entwickele man μ in das Produkt irreduzibeler Faktoren; der letzte rechtsseitig auftretende Faktor werde mit β bezeichnet, dann ist also

$$\mu = 1 \cdot \mu = \alpha\beta,$$

*) Dieser Unterschied macht sich bei manchen Untersuchungen geltend: z. B. kann man mit Hilfe der additiven Formel die Bedingungen für die multiplikative Vertauschbarkeit zweier Zahlen α und β aufstellen, während man mit der Produktformel in gewissen Fällen auf Schwierigkeiten stößt, nämlich dann, wenn es sich um Limeszahlen α, β handelt. Man vgl. G. Cantor l. c. und E. Jacobsthal l. c.

wenn wir das Produkt der übrigen Faktoren mit α bezeichnen. Nun ist $\beta > 1$, also $\mu > \alpha$ und auch $\mu \geqq \beta$. Hier gilt aber $\mu > \beta$, da μ reduzibel, β irreduzibel ist. Somit kann μ weder in α noch in β als rechtsseitiger Faktor enthalten sein. Da das der zweiten Bedingung, die μ erfüllen sollte, widerspricht, so muß also μ irreduzibel sein. Wir sprechen hiernach den Satz aus:

Satz. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Zahl μ multiplikativ irreduzibel ist, besteht darin, daß aus jeder Gleichung $\alpha\beta = \eta\mu$ mindestens eine der beiden Gleichungen $\alpha = \alpha'\mu$, $\beta = \beta'\mu$ folgt.*

Es gilt aber genauer:

Wenn μ irreduzibel und $\alpha\beta = \eta\mu$ ist, so ist im allgemeinen $\beta = \beta'\mu$, diese Gleichung braucht aber nicht zu gelten, falls $\mu = p$ und $\beta < \omega$ ist, wenn also β eine endliche nicht durch p teilbare Zahl ist; dann aber ist stets $\alpha = \alpha'\mu = \alpha' p$.

20) Ist eine Zahl β gegeben und α ein rechtsseitiger Teiler von β, so entwickele man α und β nach der Produktformel. Alle in der Entwicklung von α auftretenden Faktoren treten dann auch in der Produktentwicklung von β auf. Daraus folgt sofort der

Satz. *Sei β gegeben und α, α_1 seien zwei rechtsseitige Faktoren von β, $\alpha > \alpha_1$. Ist dann α eine Limeszahl, dann ist α_1 ein rechtsseitiger Teiler von α. Ist aber α keine Limeszahl, dann ist auch α_1 keine solche. Spaltet man in α und α_1 die größten endlichen linksseitigen Faktoren ab, $\alpha = a\alpha'$, $\alpha_1 = a_1\alpha_1'$, dann ist $\alpha' \geqq \alpha_1'$. Ist $\alpha' > \alpha_1'$, dann ist α_1 ein rechtsseitiger Teiler von α', also auch von α.*

21) Es ist leicht einzusehen, daß über die gemeinsamen Reste und Abschnitte zweier Zahlen α und β folgender Satz gilt:

Satz. *Sind α und β zwei gegebene Zahlen, dann haben sie einen größten gemeinsamen Abschnitt* ($\min(\alpha, \beta)$), *der jeden gemeinsamen Abschnitt von α und β zum Abschnitt hat. Ebenso existiert ein größter gemeinsamer Rest, der jeden gemeinsamen Rest von α und β zum Rest hat.*

In der Multiplikation gilt ein ganz entsprechender Satz, er ist aber erheblich schwerer zu beweisen:

Satz. *Sind α und β zwei gegebene Zahlen, dann besitzen sie einen größten gemeinsamen linksseitigen Teiler $\tau = (\alpha, \beta)$, der jeden gemeinsamen linksseitigen Teiler von α und β als linksseitigen Teiler enthält. Ebenso existiert ein größter gemeinsamer rechtsseitiger Divisor $\tau' = ((\alpha, \beta))$ von α und β, der jeden α und β gemeinsamen rechtsseitigen Teiler zum rechtsseitigen Teiler hat.*

Beweis. Die Existenz von $\tau = (\alpha, \beta)$ nebst den behaupteten Eigenschaften folgt wie in der endlichen Zahlentheorie aus dem Euklidischen Algorithmus (Nr. 6). Daß ein größter gemeinsamer rechtsseitiger Teiler τ'

existiert, folgt ohne weiteres, da jede Zahl nur endlich viele rechtsseitige Teiler hat. Daß aber τ' die charakteristische Eigenschaft des größten gemeinsamen Teilers hat, wird nach Nr. 20 bewiesen. Sei τ_1 ein beliebiger gemeinsamer rechtsseitiger Teiler von α und β, so ist zu zeigen, daß $\tau' = \mu\tau_1$ ist. Da nun $\tau' \geqq \tau_1$ ist, so dürfen wir $\tau' > \tau_1$ annehmen. Ist τ' eine Limeszahl, dann ist $\tau' = \mu\tau_1$ nach Nr. 20. Wir nehmen daher nach Nr. 20 τ' und τ_1 als Nicht-Limeszahlen an und spalten wieder linksseitig die größtmöglichen endlichen Teiler ab: $\tau' = t'\tau''$, $\tau_1 = t_1\tau_1''$. Es ist $\tau'' \geqq \tau_1''$, und für den Fall, daß $\tau'' > \tau_1''$ ist, ist nach Nr. 20 der Satz bewiesen. Sei also $\tau'' = \tau_1''$, d. h. $\tau' = t'\tau''$, $\tau_1 = t_1\tau''$, somit $t' > t_1$. Da nun τ' der größte gemeinsame rechtsseitige Teiler von α und β ist, so muß jede in t_1 enthaltene Primzahlpotenz auch in t' enthalten sein, d. h. $t' = tt_1$, also $\tau' = t\tau_1$. Damit ist der Satz bewiesen.

22) Leicht beweisbar ist weiter der

Satz. *Zu zwei Zahlen α und β existiert stets eine kleinste Zahl* (max. (α, β)), *die α und β zu Abschnitten hat. Diese Zahl ist Abschnitt jeder Zahl, die α und β zu Abschnitten hat. Dagegen existiert im allgemeinen keine Zahl, die α und β zu Resten hat.*

Auch hier gilt ein ganz analoger Satz in der Multiplikation, ist aber auch nicht von vornherein so klar wie der additive Satz.

Um diesen Satz aussprechen zu können, sei bemerkt, daß unter einem gemeinschaftlichen linksseitigen (rechtsseitigen) Vielfachen von α und β eine Zahl verstanden wird, die α und β zu linksseitigen (rechtsseitigen), Teilern besitzt.

Satz. *Zu zwei von Null verschiedenen Zahlen α und β existiert stets ein kleinstes von Null verschiedenes linksseitiges gemeinschaftliches Vielfaches $\mu = \{\alpha, \beta\}$, das ein linksseitiger Teiler jedes anderen gemeinschaftlichen linksseitigen Vielfachen ist. Dagegen ist im allgemeinen ein von Null verschiedenes rechtsseitiges gemeinschaftliches Vielfaches nicht vorhanden.*

Beweis. Sei $\alpha > 0$, $\beta > 0$ gegeben und π eine additive Hauptzahl, für die $\pi \geqq \alpha$, $\pi \geqq \beta$ ist, dann ist $\pi = \alpha\pi'$, $\pi = \beta\pi''$, d. h. es gibt linksseitige gemeinschaftliche Vielfache von α und β. Das kleinste derartige von Null verschiedene werde mit $\mu = \{\alpha, \beta\}$ bezeichnet. Jedes andere μ' ist dann mindestens $= \mu$, d. h. $\mu' \geqq \mu$. Also ist nach Nr. 6 auch $\mu' = \mu\xi + \varrho$, wo $\mu > \varrho$ ist. Da nun μ' und μ linksseitig durch α und β teilbar sind, so muß es nach Nr. 6 auch ϱ sein, d. h. unterhalb μ gäbe es ein gemeinschaftliches Vielfaches ~~von~~ ϱ von α und β, also ist $\varrho = 0$, d. h. $\mu' = \mu\xi$. Es gelten übrigens folgende Formeln: $(\gamma\alpha, \gamma\beta) = \gamma(\alpha, \beta)$; ist ferner $\alpha = (\alpha, \beta)\alpha'$, $\beta = (\alpha, \beta)\beta'$, dann ist: $(\alpha, \beta)\{\alpha', \beta'\} = \{\alpha, \beta\}$.

Daß im allgemeinen kein gemeinschaftliches rechtsseitiges Vielfaches existiert, lehrt das Beispiel $\alpha = \omega$, $\beta = \omega + 1$. Denn gäbe es eine Zahl μ_1, für die $\mu_1 = \xi\omega$ und $\mu_1 = \eta(\omega + 1)$ wäre, so müßte $\mu_1 = \xi\omega$ eine additive Hauptzahl sein und daher wäre wegen $\mu_1 = \eta(\omega + 1)$ auch $\omega + 1$ eine additive Hauptzahl, was doch nicht der Fall ist.

§ 5.

Die Potenzierung.

1) Wie bei der Multiplikation setzen wir $w(\alpha) = \alpha$. Während wir aber in § 4 unter $g(\xi, \eta)$ die additive Funktion $\xi + \eta$ verstanden, wählen wir hier $g(\xi, \eta) = f_1(\xi, \eta) = \xi\eta$. Es ist somit (b) erfüllt, denn $g(\xi, \eta) > \xi$ für $\xi \geqq \xi_0 = 1$, $\eta \geqq \eta_0 = 2$. Da $\lambda_0 = 0$ ist, so ist $\lambda = 2$, da 2 die kleinste Zahl λ ist, die zugleich den Bedingungen $\lambda \geqq \max(\eta_0, \lambda_0) = 2$, $\lambda \geqq \xi_0 = 1$ genügt. Es ist auch (c′) erfüllt.

Die durch diese Festsetzungen definierte Operation bezeichnen wir mit α^β und nennen α^β eine *Potenz*. Die Operation selbst heißt *Potenzierung*; α wird die *Grundzahl*, β der *Exponent* der Potenz α^β genannt.

2) Die Potenz ist also durch folgende Gleichungen erklärt:

$$(1) \quad \alpha^1 = \alpha,$$
$$(2) \quad \alpha^{\beta+1} = \alpha^\beta \alpha = \alpha^\beta \alpha^1,$$
$$(3) \quad \alpha^{\overline{\beta}} = \lim_{\beta} (\alpha^\beta),$$

wenn β alle Zahlen unterhalb der Limeszahl $\overline{\beta}$ durchläuft. Durch diese drei Gleichungen ist α^β für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$ erklärt. Aus (1) und (2) folgt, daß man passend die Definition erweitert durch

$$(4) \quad \alpha^0 = 1 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 1,$$
$$(5) \quad 1^\beta = 1 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 0,$$
$$(6) \quad 0^\beta = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq 1.$$

Damit ist α^β für jedes Wertepaar $\alpha \geqq 0$, $\beta \geqq 0$ erklärt, mit Ausnahme des Wertepaares $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Aus (2) folgt für endliches $\beta = b$, daß $\alpha^b = \alpha\alpha\alpha \cdots$ (b Faktoren) ist.

3) Nach III und Gleichung (4) der vorhergehenden Nummer folgt: ist $\beta > \beta' \geqq 0$ und $\alpha \geqq 2$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^{\beta'}$. Ist $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}$ für eine Zahl $\alpha \geqq 2$, dann ist $\beta = \beta'$; und ist $\alpha^\beta > \alpha^{\beta'}$, dann ist $\alpha \geqq 2$ und $\beta > \beta'$. Ist $\beta > 1$, $\alpha \geqq 2$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^1 = \alpha$.

4) Nach IV ergibt sich als Verallgemeinerung der definierenden Gleichung (3), daß stets $\alpha^{\lim \gamma} = \lim_{\gamma} \alpha^\gamma$ ist, $(\alpha \geqq 2)$, was für eine Limesreihe die Zahlen γ auch bilden mögen.

5) Wie in § 4 benutzen wir statt V den schärferen Satz XVII Aus ihm folgt für $\alpha \geqq 2$ und $\beta \geqq \omega$, daß $\alpha^\beta \geqq \alpha + \beta$ ist und für $\beta = b < \omega$ folgt aus ihm $\alpha^{1+b} \geqq \alpha + b$ Es gilt aber für $\alpha \geqq 2$, $\omega > b \geqq 2$ auch $\alpha^b \geqq \alpha + b$, denn es ist $\alpha^b = \alpha \cdot \alpha \cdots$ (b Faktoren) $\geqq \alpha + \alpha + \alpha + \cdots$ (b Summanden) $\geqq \alpha + 2 + 2 + 2 + \cdots \geqq \alpha + b$. Also ist $\alpha^\beta \geqq \alpha + \beta$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 2$. Es gilt aber eine noch bessere Abschätzung: für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$ ist $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta$. Für $\beta = 1$ ist das klar; für $\beta = 2$ ist $\alpha^\beta = \alpha^2 = \alpha\alpha \geqq \alpha 2$. Sei die Behauptung als richtig bekannt für jedes der Beziehung $2 \leqq \beta < \beta'$ genügende β, dann ist zu zeigen, daß auch $\alpha^{\beta'} \geqq \alpha\beta'$. Ist nun $\beta' = \beta'' + 1$, dann ist also $\alpha^{\beta''} \geqq \alpha\beta''$ und daher

$$\alpha^{\beta'} = \alpha^{\beta''+1} = \alpha^{\beta''}\alpha \geqq \alpha\beta''\alpha \geqq \alpha(\beta'' + \alpha) > \alpha(\beta'' + 1) = \alpha\beta',$$

d. h. es ist $\alpha^{\beta'} > \alpha\beta'$. Ist aber $\beta' = \lim \beta$, dann folgt aus $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta$ auch $\alpha^{\lim \beta} \geqq \alpha \lim \beta$ oder $\alpha^{\beta'} \geqq \alpha\beta'$. — Aus diesem Beweise folgt insbesondere, daß stets $\alpha^\beta > \alpha\beta$ ist, falls β eine Nicht-Limeszahl ist. Weiter folgt $\alpha^\beta \geqq \alpha\beta \geqq \beta$, d. h. $\alpha^\beta \geqq \beta$; hier kann das Gleichheitszeichen nur gelten, wenn β eine Limeszahl ist. Es ist also $\alpha^\beta > \alpha$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 2$; und $\alpha^\beta \geqq \beta$ für $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq 1$, aber $\alpha^\beta > \beta$, falls β eine unmittelbar vorhergehende Zahl besitzt. *Die Potenz ist also größer als die Grundzahl und nicht kleiner als der Exponent; sie ist aber sicher größer als der Exponent, falls dieser eine Nicht-Limeszahl ist.*

6) Sei $\alpha \geqq 2$ und $\beta \geqq \alpha^0 = 1$*), dann existiert nach VI eine Zahl ξ, sodaß $\alpha^{\xi+1} > \beta \geqq \alpha^\xi$ ist. Nach § 4, Nr. 6 existiert daher ein α_0 und ein $\beta' < \alpha^\xi$ derart, daß $\beta = \alpha^\xi\alpha_0 + \beta'$ ist. Hieraus folgt $\alpha^{\xi+1} > \beta \geqq \alpha^\xi\alpha_0$ oder $\alpha^\xi\alpha > \alpha^\xi\alpha_0$, d. h. $\alpha > \alpha_0$. *Wenn also $\beta \geqq 1$, $\alpha \geqq 2$ ist, dann existiert ein eindeutig bestimmtes Zahlentripel ξ, $\alpha_0 < \alpha$, $\beta' < \alpha^\xi$, so daß $\beta = \alpha^\xi\alpha_0 + \beta'$ ist.* Hieraus folgt sofort, indem man für β' eine entsprechende Gleichung ansetzt etc., daß sich jede Zahl $\beta \geqq 1$ in eindeutiger Weise in die Form $\beta = \alpha^{\xi_0}\alpha_0 + \alpha^{\xi_1}\alpha_1 + \cdots + \alpha^{\xi_r}\alpha_r$ setzen läßt, wenn $\alpha \geqq 2$, $\xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_r \geqq 0$ und $\alpha > \alpha_t$ $(t = 0, 1, \cdots, r)$ ist.

7) Nach VII gilt: ist $\alpha > \alpha' > 0$, dann ist $\alpha^\beta \geqq \alpha'^\beta$, und ist $\alpha^\beta > \alpha'^\beta$, dann ist $\alpha > \alpha'$. Es ist wegen (c′) für $\alpha > \alpha'$ sogar $\alpha^{\beta+1} > \alpha'^{\beta+1}$, und aus $\alpha^{\beta+1} = \alpha'^{\beta+1}$ folgt daher $\alpha = \alpha'$. *Ist also $\alpha^\beta = \alpha'^\beta$ für $\alpha > \alpha'$ und $\beta > 0$, dann ist β eine Limeszahl.*

8) Es ist $\alpha^\beta\alpha^\gamma = \alpha^{\beta+\gamma}$, d. h. es ist (d) erfüllt und $f_2(\xi, \eta) = \xi + \eta$. Ferner ist $(\alpha^\beta)^\gamma = \alpha^{\beta\gamma}$, d. h. es ist (e) erfüllt und $f_3(\xi, \eta) = \xi\eta$.

Da 0^0 nicht definiert sind, so muß für $\alpha = 0$ sowohl β als auch $\gamma > 0$ sein. In diesem Fall sind die beiden Gesetze erfüllt, ebenso für $\alpha = 1$.

*) Nach § 1, VI müßte es eigentlich heißen: $\beta \geqq \alpha^1 = \alpha$. Doch auch für $\alpha > \beta \geqq 1$ ist der Satz richtig, denn dann ist

$$\beta = \alpha^0\beta + 0, \quad \text{d. h.} \quad \xi = 0, \quad \alpha_0 = \beta < \alpha \quad \text{und} \quad \beta' = 0 < \alpha^0 = 1.$$

Sei $\alpha \geqq 2$, dann sind beide Gesetze für $\gamma = 0, 1$ nach den definierenden Gleichungen in Nr. 2 erfüllt und werden leicht durch vollständige Induktion für jedes γ erwiesen.

9) Es ist also (d) und (e) erfüllt und daher gilt nach XXI—XXIII der Satz: *Ist δ eine δ-Zahl, dann hat für jedes der Beziehung $1 < \alpha \leqq \delta$ genügende α die Gleichung $\delta = \alpha^\xi$ eine Wurzel ξ, die eine Hauptzahl von $f_2(\xi, \eta) = \xi + \eta$, also eine additive Hauptzahl ist. Hat umgekehrt eine überendliche Zahl δ die Eigenschaft, daß für jedes oberhalb 1 und nicht oberhalb δ gelegene α die Gleichung $\delta = \alpha^\xi$ eine Lösung ξ besitzt, dann ist δ eine δ-Zahl und diese Lösungen ξ sind additive Hauptzahlen. — Ist $\alpha \geqq 2$ und π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl, dann ist α^π eine δ-Zahl.*

Folgerung 1. *Ist $\alpha \geqq 2$ und β eine Limeszahl, dann ist α^β eine additive Hauptzahl.**)

Denn der kleinste von Null verschiedene Rest der Zahl β ist eine additive Hauptzahl $\pi > 1$, d. h. $\beta = \beta' + \pi$, also $\alpha^\beta = \alpha^{\beta'}\alpha^\pi$. Da nun α^π eine δ-Zahl, also eine additive Hauptzahl ist, so ist auch $\alpha^{\beta'}\alpha^\pi = \alpha^\beta$ eine solche. — Man kann das auch direkt beweisen: es ist α^β der Limes aller der Zahlen α^ϑ, die man erhält, wenn ϑ gegen β konvergiert. Nach § 2, Nr. 12, (a) ist α^β eine additive Hauptzahl, wenn für jedes dieser ϑ die Gleichung $\alpha^\vartheta + \alpha^\beta = \alpha^\beta$ besteht. Nun ist $\beta = \vartheta + \eta$, wo η als Rest von β eine Limeszahl ist. Also ist $\alpha^\eta \geqq \eta \geqq \omega$; hieraus folgt $1 + \alpha^\eta = \alpha^\eta$ und weiter $\alpha^\vartheta + \alpha^{\vartheta+\eta} = \alpha^{\vartheta+\eta}$, d. h. $\alpha^\vartheta + \alpha^\beta = \alpha^\beta$.

Folgerung 2. *Ist $\alpha \geqq 2$, $\beta \geqq \omega$, dann ist α^β eine Limeszahl.*

Denn es ist $\beta = \omega + \eta$. Also $\alpha^\beta = \alpha^\omega\alpha^\eta$ eine Limeszahl, da α^ω eine solche ist.

Folgerung 3. *Ist $\alpha \geqq 2$, dann ist die erste δ-Zahl über α die Zahl α^ω.*

Nach § 4, Nr. 15, (e) ist die erste δ-Zahl über α der Limes der Folge $\alpha = \alpha^1, \alpha\alpha = \alpha^2, \cdots, \alpha^n = \alpha\alpha\alpha \cdots (n \text{ Mal}) \cdots$, d. h. die Zahl α^ω. — Wir folgern das auch unmittelbar aus dem Vorhergehenden. Denn α^ω ist eine δ-Zahl, da $\alpha \geqq 2$ und ω eine additive Hauptzahl ist, und es ist $\alpha^\omega > \alpha$. Ist δ eine δ-Zahl oberhalb α, so ist zu zeigen: $\delta \geqq \alpha^\omega$. Nun ist nach unserem Satz in dieser Nummer $\delta = \alpha^{\pi'} > \alpha$, d. h. $\pi' > 1$, also $\pi' \geqq \omega$ und daher $\delta \geqq \alpha^\omega$.

10) Satz. *Jede additive Hauptzahl ist eine Potenz von ω, und umgekehrt ist jede derartige Potenz ω^μ eine additive Hauptzahl.*

---

*) Ist α^β eine additive Hauptzahl, aber $\beta = \beta'' + 1$, dann folgt daraus, daß $\alpha^\beta = \alpha^{\beta''}\alpha$ eine Hauptzahl der Addition ist, das gleiche für α selbst. Und ist α eine additive Hauptzahl, dann ist auch $\alpha^{\beta''+1}$ eine solche.

Beweis. Sei π eine additive Hauptzahl. Ist $\pi = 1$, dann ist $\pi = \omega^0$. Sei daher $\pi > 1$, d. h. $\pi \geqq \omega$, und $\pi \geqq \alpha \geqq 2$, dann folgt aus Nr. 6 eine Gleichung der Form $\pi = \alpha^\mu \pi'$, wo π' eine additive Hauptzahl unterhalb α ist. Also ist speziell für $\alpha \leqq \omega$ stets $\pi' = 1$ und $\pi = \alpha^\mu$. Wenn also π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl ist und α der Bedingung $\pi \geqq \omega \geqq \alpha \geqq 2$ genügt, so ist $\pi = \alpha^\mu$ eine Potenz von α, d. h. für $\alpha = \omega$ erhalten wir $\pi = \omega^\mu$. Ist umgekehrt μ irgend eine Zahl, dann ist ω^μ nach Nr. 9, Folgerung 1 (nebst Anm.) stets eine additive Hauptzahl.

Die Cantorsche Normalform für eine Zahl α gewinnt jetzt die Form:

$$\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \omega^{\alpha_1} a_1 + \cdots + \omega^{\alpha_r} a_r,$$

wo die Zahlen a_ι endlich sind und $\alpha_0 > \alpha_1 > \cdots > \alpha_r$ ist. —

Aus dem Satz von Nr. 9 folgt der

11) Satz: *Jede δ-Zahl hat die Gestalt $\omega^{(\omega^\mu)}$ und jede Zahl $\omega^{(\omega^\mu)}$ $(\mu \geqq 0)$ ist eine δ-Zahl.*

12) Es seien nun $\alpha > 1$ und $\beta \geqq 0$ in der Cantorschen Normalform gegeben. Es ist α^β in der Normalform darzustellen.

Ist $\alpha = a < \omega$ und $\beta = \omega\beta' + b$, $(b < \omega)$, dann ist

$$\alpha^\beta = a^\beta = a^{\omega\beta'} a^b = (a^\omega)^{\beta'} a^b = \omega^{\beta'} a^b.$$

Das ist die Normalform von α^β. Ist aber $\alpha \geqq \omega$, dann ist in $\alpha^\beta = \alpha^{\omega\beta'}\alpha^b$ der zweite Faktor α^b nach § 4, Nr. 10 in der Normalform bekannt, wenn die Normaldarstellung von α gegeben ist. Es ist also nur noch der erste Faktor $\alpha^{\omega\beta'}$, der nach Nr. 9, Folgerung 1 eine additive Hauptzahl ist, genauer zu bestimmen, d. h. wenn die Normalform von α gegeben ist, dann ist anzugeben, wie die additive Hauptzahl $\alpha^{\omega\beta'}$ aussieht. Setzen wir nun die Limeszahl $\omega\beta' = \bar\beta$ und bezeichnen wir die größte nicht oberhalb α gelegene Hauptzahl mit π, dann behaupten wir, daß $\alpha^{\bar\beta} = \pi^{\bar\beta}$ ist. Der Nachweis dieser Gleichung geht aus von der Ungleichung $\pi\omega > \alpha \geqq \pi \geqq \omega$. (Da $\alpha \geqq \omega$ ist, muß auch $\pi \geqq \omega$ sein.) Hieraus folgt $\pi\omega \leqq \pi^2$, also auch $\pi^{\bar\beta} \leqq \alpha^{\bar\beta} \leqq (\pi\omega)^{\bar\beta} \leqq (\pi^2)^{\bar\beta} = \pi^{2\bar\beta} = \pi^{\bar\beta}$. Somit ist $\pi^{\bar\beta} = \alpha^{\bar\beta}$. Da mit der Normalform von α auch π bekannt ist, so ist hiermit $\alpha^{\bar\beta}$ gefunden. Setzt man nach Nr. 10: $\alpha = \omega^{\alpha_0} a_0 + \cdots$ und $\beta = \bar\beta + b$, so ist $\pi = \omega^{\alpha_0}$, $\alpha^\beta = \alpha^{\bar\beta}\alpha^b = \omega^{\alpha_0\bar\beta}\alpha^b$.*)

13) Satz. *Jede von Null verschiedene Zahl β läßt sich auf unendlich viele oder endlich viele Arten als Potenz darstellen, je nachdem β eine additive Hauptzahl ist oder nicht.*

---

*) Durch diesen Ausdruck definiert Hessenberg die Potenz (G. d. M. § 79). Man könnte analog das Produkt mit Hilfe der Normalform definieren, indem man eine Festsetzung über die Multiplikation der additiven Hauptzahlen trifft; es wäre noch vorher das distributive Gesetz zu fordern.

Beweis. Sei β keine additive Hauptzahl. Nach Satz VIII gibt es nur endlich viele Zahlen ξ, für die eine der Gleichung $\beta = \alpha^\xi$ genügende Zahl α existiert, und diese Zahlen ξ sind alle Nicht-Limeszahlen, da sonst β nach Nr. 9 eine additive Hauptzahl wäre. Also ist nach VIII (da hier (c′) gilt) β nur auf endlich viele Arten als Potenz darstellbar. — Sei nun β eine additive Hauptzahl π. Ist $\pi = 1$, dann ist $\pi = 1 = \alpha^0$ für $\alpha = 1, 2, 3, \cdots$. Sei $\pi \geqq \omega$, dann ist nach dem in Nr. 10 gegebenen Beweise $\pi = \alpha^\mu$ für $\alpha = 2, 3, \cdots; \omega$. Also läßt sich in der Tat jede additive Hauptzahl auf unendlich viele Arten als Potenz darstellen.

14) Satz. *Ist π eine von 1 verschiedene additive Hauptzahl und β eine Limeszahl, für die die Gleichung $\pi = \alpha^\beta$ eine Wurzel α hat*), dann hat diese Gleichung unendlich viele Wurzeln, die eine δ-Zahl δ zum Limes haben. Es ist $\pi = \delta^{\beta'}$ und β' ist der größte unterhalb β gelegene Exponent, der bei allen Potenzdarstellungen von π auftritt.***)

Beweis. Da nach Nr. 8 Voraussetzung (e) erfüllt ist, so sind nach XXIV unendlich viele Wurzeln α vorhanden, die eine Hauptzahl von $f_4(\xi, \eta) = \xi\eta$, d. h. eine δ-Zahl, zum Limes haben. Es ist $\pi \geqq \delta$, also nach Nr. 6: $\pi = \delta^{\beta'}\pi'$, wo π' eine additive Hauptzahl unterhalb δ ist. Sei nun α eine beliebige Wurzel der Gleichung $\pi = \alpha^\beta$, dann ist $\alpha < \delta$, also nach Nr. 9: $\delta = \alpha^{\pi''}$, wo π'' eine additive Hauptzahl ist. Es folgt:

$$\pi = \alpha^\beta = \delta^{\beta'}\pi' = \alpha^{\pi''\beta'}\pi' = \alpha^\beta.$$

Es sei nun $\pi' > 1$, dann ist $\alpha^\beta > \alpha^{\pi''\beta'}$, d. h. $\beta > \pi''\beta'$, also ist $\beta = \pi''\beta' + \eta$, wo $\eta \geqq 1$ ist. Hieraus folgt

$$\alpha^{\pi''\beta}\pi' = \alpha^\beta = \alpha^{\pi''\beta'+\eta} = \alpha^{\pi''\beta'}\alpha^\eta \quad \text{oder} \quad \pi' = \alpha^\eta \geqq \alpha$$

für jede der Wurzeln α, also ist auch $\pi' \geqq \lim \alpha = \delta$, während doch $\pi' < \delta$ ist. Somit ist die Annahme $\pi' > 1$ unmöglich und es folgt $\pi' = 1$ oder $\pi = \delta^{\beta'}$. Daß β' der größtmögliche Exponent unterhalb β ist, folgt aus XV.

15) Die Hauptzahlen der Potenzfunktion sind die von Cantor eingeführten ε-Zahlen.***)

Eine ε-Zahl ist eine oberhalb 2 gelegene Zahl ε, für die die Gleichung $\varepsilon = \alpha^\varepsilon$ besteht, falls α irgend eine oberhalb 1 und unterhalb ε gelegene Zahl bedeutet. Es gilt nun:

(a) *Jede ε-Zahl ist eine δ-Zahl.* (XX.)

(b) *Ist eine Zahl ε der Limes einer Folge von Zahlen α, deren jede die Gleichung $\varepsilon = \alpha^\varepsilon$ erfüllt, dann ist ε eine ε-Zahl.* (X.)

---

*) Nach Nr. 13 sind stets derartige Limeszahlen β vorhanden.

**) Man vgl. den analogen Satz in § 4, Nr. 16.

***) G. Cantor, l. c. §. 20. — Cantor rechnet ω nicht zu den ε-Zahlen.

(c) *Hat eine Folge von Zahlen* $\alpha\,(>1)$ *die Eigenschaft, daß mit* α *zugleich auch* α^α *der Folge angehört, dann hat die Folge eine* ε-*Zahl zum Limes.* (XI.)

(d) *Der Limes einer Folge von* ε-*Zahlen ist eine* ε-*Zahl.*

(e) *Ist* $\alpha > 1$, *dann ist die erste* ε-*Zahl über* α *der Limes der Folge* $\alpha,\ \alpha_1 = \alpha^{\alpha},\ \alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1},\ \alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2}, \cdots, \alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n} \cdots\cdots.$ (XIII.)

Die erste ε-Zahl ist ω*); man kann das u. a. aus (e) folgern, da ω der Limes der Reihe $2, 4, [illegible], 256, \cdots$ ist.

Sei $\alpha \geqq \omega$, dann ist die erste ε-Zahl über α nach (e) der Limes der Folge $\alpha,\ \alpha_1 = \alpha^\alpha,\ \alpha_2, \alpha_3, \cdots$, wo stets $\alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n}$ ist. Wir behaupten nun, daß $\alpha_{n+1} = \alpha_n^{\alpha_n} = \alpha^{\alpha_n}$ ist. Der Nachweis stützt sich auf Nr. 9. Es ist zunächst wegen $\alpha \geqq \omega$ nach Nr. 9, Folgerung 2 die Zahl $\alpha_1 = \alpha^\alpha$ eine Limeszahl, also nach Folgerung 1 derselben Nummer $\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1}$ eine additive Hauptzahl und deshalb weiter $\alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2}$ eine δ-Zahl; also sind $\alpha_4, \alpha_5, \cdots$ alles δ-Zahlen, d. h. α_n ist für $n \geqq 3$ stets eine δ-Zahl. Nun ist

$$\alpha_2 = \alpha_1^{\alpha_1} = \alpha^{\alpha\alpha_1} = \alpha^{(\alpha^{1+\alpha})} = \alpha^{(\alpha^\alpha)} = \alpha^{\alpha_1},$$

d. h. für $n = 1$ ist die Behauptung richtig; für $n = 2$ zeigen wir es so:

$$\alpha_3 = \alpha_2^{\alpha_2} = \alpha^{\alpha_1\alpha_2} = \alpha^{(\alpha_1^{1+\alpha_1})} = \alpha^{(\alpha_1^{\alpha_1})} = \alpha^{\alpha_2}.$$

Sei für $n \geqq 2$ bewiesen, daß $\alpha_{n+1} = \alpha^{\alpha_n}$, dann ist

$$\alpha_{n+2} = \alpha_{n+1}^{\alpha_{n+1}} = \alpha^{\alpha_n\alpha_{n+1}} = \alpha^{\alpha_{n+1}},$$

da $\alpha_{n+1} > \alpha_n$ und α_{n+1} für $n = 2, 3, \cdots$ eine δ-Zahl ist. Es wird also ε der Limes der Folge $\alpha,\ \alpha_1 = \alpha^\alpha,\ \alpha_2 = \alpha^{\alpha_1}, \cdots$.**) Es erscheint mit Rücksicht auf Satz (a) bemerkenswert, daß die Limesreihe $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \cdots$ nur δ-Zahlen enthält, wenn man von den ersten drei Gliedern absieht, so daß also jede ε-Zahl oberhalb ω als Limes einer Reihe von δ-Zahlen dargestellt ist.

16) Sei für eine Zahl β eine Zahl $\alpha \geqq 2$ vorhanden, sodaß $\beta = \alpha^\beta$ ist. Was läßt sich dann über β aussagen? Wir wissen, daß eine solche Gleichung nur für Limeszahlen β bestehen kann, da andernfalls $\alpha^\beta > \beta$ ist. Es genügt aber aus $\beta = \alpha^\beta$ $(\alpha \geqq 2)$ die Folgerung zu ziehen, daß $\beta \geqq \omega$ ist. Denn dann ist nach Nr. 9, Folgerung 2 die Zahl $\alpha^\beta = \beta$ eine Limeszahl, also nach Folgerung 1: $\alpha^\beta = \beta$ eine additive Hauptzahl und schließlich folgt nach dem Satz in Nr. 9: $\alpha^\beta = \beta$ ist eine δ-Zahl. Nun

*) Man vgl. G. Hessenberg, P. t. O. Hessenberg hat zuerst darauf hingewiesen, daß auch ω den Charakter einer ε-Zahl hat.

**) Das stimmt auch für $2 \leqq \alpha < \omega$. — Es wird direkt

$$\varepsilon = \lim_n \alpha_{n+1} = \lim_n \alpha^{\alpha_n} = \alpha^{\lim \alpha_n} = \alpha^\varepsilon.$$

Man vgl. die sich an den Beweis von XIII anschließenden Bemerkungen.

schließen wir weiter aus $\beta = \alpha^\beta$, daß erstens $\beta = \lim\limits_{\vartheta < \beta} \alpha^\vartheta$, wo ϑ gegen β konvergiert; zweitens ist für jedes dieser ϑ stets $\vartheta\beta = \beta$, da β eine δ-Zahl ist, und somit ist $(\alpha^\vartheta)^\beta = \alpha^{\vartheta\beta} = \alpha^\beta = \beta$. Die Zahlen α^ϑ, die β approximieren, erfüllen also jede die Gleichung $(\alpha^\vartheta)^\beta = \beta$. Nach Nr. 15, Satz (b) ist also β eine ε-Zahl. — Weiß man erst, daß β eine δ-Zahl ist, dann kann man auch anders schließen: aus der Gleichung $\beta = \alpha^\beta$ folgt durch Kombination des Satzes XIV, Zusatz 2 mit dem Satz in Nr. 14, daß $\beta = \varepsilon^\mu$ ist, wo ε eine ε-Zahl und μ eine additive Hauptzahl ist (da ja β eine δ-Zahl ist), und nach XIV ist $\varepsilon^\beta > \beta$ und $\beta = \alpha^\beta$ für jedes der Bedingung $1 < \alpha < \varepsilon$ genügende α. Es sei nun $\mu > 1$, dann ist $\beta = \varepsilon^\mu > \varepsilon$, also $\varepsilon\beta = \beta$ und daher $(2^\varepsilon)^\beta = 2^{\varepsilon\beta} = 2^\beta = \beta$, da ja $1 < 2 < \varepsilon$ ist. Da nun $2^\varepsilon = \varepsilon$ ist, so haben wir $\varepsilon^\beta = \beta$, eine Gleichung, deren Unrichtigkeit wir kennen. Somit ist $\mu = 1$, d. h. $\beta = \varepsilon$. Wir fassen zusammen:

(f) *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ε eine ε-Zahl ist, ist das Bestehen der Gleichung $\varepsilon = 2^\varepsilon$.*

Der Satz (b) in Nr. 15 ist dadurch wesentlich verschärft; es zeigt sich eben, daß die charakteristische Gleichung nur für die Grundzahl 2 zu bestehen braucht, um daraus für alle Grundzahlen $\alpha < \varepsilon$ zu folgern. Das Ergebnis von Nr. 5 verschärft sich dahin:

(g) *Es ist $\alpha^\beta > \beta$, falls β keine ε-Zahl und $\alpha > 1$ ist.*

Es erscheint bemerkenswert, daß die ε Zahlen sich wesentlich anders verhalten als die additiven Hauptzahlen und die δ-Zahlen. Denn $2 + \beta = \beta$ charakterisiert nur die Zahlen $\beta \geqq \omega$, aber nicht etwa nur die additiven Hauptzahlen; $2\beta = \beta$ sagt nicht aus, daß β eine δ-Zahl ist, sondern nur, daß β eine Limeszahl ist. Dagegen charakterisiert $2^\beta = \beta$ völlig die ε-Zahlen. Es ist eben die Potenzfunktion eine Funktion f mit der Eigenschaft, daß das Bestehen der Gleichung $\gamma = f(\alpha, \gamma)$ für eine einzige Zahl α bereits γ als Hauptzahl von f charakterisiert, während im allgemeinen dazu unendlich viele Gleichungen gehören.