9.

Ueber die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades.

(Von Hrn. *Rudolf Wolf* aus Zürich.)

Fällt man von einem in der Ebene einer Curve willkürlich angenommenen Puncte, dem sogenannten *Pole*, Perpendikel auf die Tangenten dieser Curve, so liegen die Fufspuncte derselben in einer neuen Curve, welche man die *Fufspunctencurve* der Vorgelegten zu nennen pflegt. Der Zweck dieses Aufsatzes ist, die Fufspunctencurven der Linien zweiten Grades, sowohl ihrer Form als auch ihrem Gehalte nach zu untersuchen, mit vorzüglicher Hinsicht auf einige der von Herrn Professor *Steiner* im vierten Hefte des vorigen Bandes dieses Journals mitgetheilten Sätze.

§. 1.

Legt man durch den zum Pole gewählten Punct ein zu den Haupt-Axen der Linie des zweiten Grades paralleles Axensystem x, y, so wird die Curve zweiten Grades in Beziehung auf dasselbe durch die Gleichung

$$1.\quad ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + e = 0$$

ausgedrückt, und hieraus folgt für die Tangente an den Punct (x, y) die Gleichung

$$2.\quad y' - y = -\frac{m}{n}(x' - x),$$

wo der Kürze wegen

$$3.\quad m = ax + c, \qquad n = by + d.$$

Für den Fufspunct des Perpendikels aus dem Pole auf diese Tangente, oder für den dem Puncte (x, y) entsprechenden Punct (x'', y'') der Fufspunctencurve hat man demnach

$$4.\quad x'' = m\frac{mx + ny}{m^2 + n^2}, \qquad y'' = n\frac{mx + ny}{m^2 + n^2}.$$

Eliminirt man aus den Gleichungen (1.), (3.) und (4.) die Gröfsen x und y, so erhält man eine von dem Puncte (x, y) unabhängige Verbindungsgleichung zwischen x'' und y'', d. h. die gesuchte Gleichung der Fufspunctencurve. Um diese Rechnung zu vereinfachen, kann man

$$x'' = r\cos v, \qquad y'' = r\sin v$$

setzen, d. h. Polarcoordinaten einführen. Dann giebt die Verbindung der Gleichungen (3.) und (4.)

$$r = x\cos v + y\sin v, \qquad (ax+c)\sin v - (by+d)\cos v = 0,$$

und die successive Elimination:

$$x = \frac{br\cos v + d\sin v\cos v - c\sin^2 v}{a\sin^2 v + b\cos^2 v}, \quad y = \frac{ar\sin v + c\sin v\cos v - d\cos^2 v}{a\sin^2 v + b\cos^2 v}.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht (1.), wenn man den Factor $ab(a\sin^2 v + b\cos^2 v)$ absondert, in die Gleichung

$$5. \quad r^2 + 2r\left(\frac{c}{a}\cos v + \frac{d}{b}\sin v\right)$$
$$+ \frac{ae-c^2}{ab}\sin^2 v + \frac{be-d^2}{ab}\cos^2 v + \frac{2cd}{ab}\sin v\cos v = 0$$

über, und dies ist demnach die verlangte allgemeine Gleichung der Fuſspunctencurve einer Linie zweiten Grades; sie ist jedoch noch einer für die folgenden Untersuchungen passenderen Form ihrer Coefficienten fähig. Bezeichnen nämlich p den Parameter, ε das Verhältniſs der Excentricität der durch die Gleichung (1.) ausgedrückten Curve zweiten Grades, ξ und ν die Coordinaten ihres Scheitels, so hat man, wie ich in den Annalen der Wiener-Sternwarte (Band XVII.) zu zeigen versucht habe,

$$6. \quad \begin{cases} p^2 = \dfrac{ad^2+bc^2-abe}{b^3}, & \varepsilon^2 = \dfrac{b-a}{b}, \\ \xi = -\left(\dfrac{b}{a}p + \dfrac{c}{a}\right), & \nu = -\dfrac{d}{b}, \end{cases}$$

und es ist somit

$$\frac{c}{a} = -\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right), \quad \frac{d}{b} = -\nu, \quad \frac{2cd}{ab} = 2\nu\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right),$$
$$\frac{ae-c^2}{ab} = \nu^2 - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{be-d^2}{ab} = \xi^2 + 2\frac{p}{1-\varepsilon^2}\xi.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (5.) erhält man

$$7. \quad r^2 - 2r\left[\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)\cos v + \nu\sin v\right]$$
$$+\left(\nu^2 - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\right)\sin^2 v + \left(\xi^2 + 2\frac{p}{1-\varepsilon^2}\xi\right)\cos^2 v + 2\nu\left(\xi + \frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)\sin v\cos v = 0,$$

und diese Gleichung soll das Fundament der folgenden Untersuchungen bilden, die von jetzt an am zweckmäſsigsten für jede der drei Classen der Curven zweiten Grades besonders dürften geführt werden.

§. 2.

Ist $\varepsilon < 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Ellipse an. Bezeichnet man die halben Axen der Ellipse durch $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, so ist

$$\mathfrak{a} = \frac{p}{1-\varepsilon^2}, \qquad \mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}p = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2},$$

und setzt man der Kürze wegen

$$8. \qquad \alpha = (\mathfrak{a}+\xi)\cos v + \nu \sin v,$$

so erhält man aus (7.) für die Fufspunctencurve der Ellipse die Gleichung

$$9. \qquad r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 - \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2 \sin^2 v = 0,$$

oder auch die Formel

$$10. \qquad r = \alpha \pm \sqrt{(\mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v)}.$$

Liegt der Pol im Scheitel der Ellipse, so ist $\xi = 0 = \nu$, und die zugehörige Fufspunctencurve hat nach (9.) die Gleichung

$$r^2 - 2\mathfrak{a}r\cos v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v = 0,$$

welche eine auffallende Uebereinstimmung mit der Gleichung der Cardioide, der einfachsten aller Epicycloiden, hat. Denn, restituirt man $x = r\cos v$ und $y = r\sin v$, so geht sie in

$$x^4 + y^4 - 2\mathfrak{a}x^3 = y^2(\mathfrak{b}^2 + 2\mathfrak{a}x - 2x^2)$$

über, und für den speciellen Fall des Kreises, oder für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, verwandelt sie sich in der That in die bekannte Gleichung

$$x^4 + y^4 - 2\mathfrak{a}x^3 = y^2(\mathfrak{a}^2 + 2\mathfrak{a}x - 2x^2)$$

der Cardioide. Liegt der Pol dagegen im Mittelpuncte der Ellipse, so ist $\mathfrak{a} + \xi = 0 = \nu$, und für diesen Fall hat man nach (9.) als Gleichung der Fufspunctencurve:

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v,$$

eine durch die Untersuchungen des Herrn Hofrath *Gaufs* (*Zach's* Correspondenz XXIII. 112) schon bekannte Form der Ellipsengleichung.

Bezeichnet man den vom Radius-vector r bei der Construction der Fufspunctencurve beschriebenen Raum durch F, so ist

$$11. \quad \begin{cases} F = \int \frac{r^2\,dv}{2} \\ = \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2}{4}v - \frac{\alpha\beta}{2}\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{8}\sin 2v \\ \pm \alpha\left[\frac{u\sin v}{2} + \frac{\mathfrak{a}^2-4\mathfrak{b}^2}{4\mathfrak{a}\varepsilon}\arcsin\frac{u^2-\mathfrak{a}^2\varepsilon^2\sin^2 v}{\mathfrak{a}^2}\right] \\ \pm \beta\left[\frac{u\cos v}{2} + \frac{\mathfrak{b}^2}{2\mathfrak{a}\varepsilon}\log(u + \mathfrak{a}\varepsilon\cos v)\right] + \text{const.,} \end{cases}$$

wo $\alpha = \mathfrak{a} + \xi$ und $\beta = \nu$ die Coordinaten des Mittelpunctes bedeuten und der Kürze wegen

$$12. \quad u^2 = \mathfrak{a}^2 \cos^2 v + \mathfrak{b}^2 \sin^2 v$$

gesetzt wurde. Das Doppelzeichen $\pm$ in der Gleichung (10.) bedeutet offenbar, dafs für jeden Werth des Winkels v der Radius-vector r zwei Werthe haben könne; entsprechend sagt das Doppelzeichen in (11.), dafs vom Radius-vector zwei verschiedene Räume beschrieben werden. Begreift man daher unter F die Summe der Räume, so ist F aus der Formel

$$13. \quad F = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2}{2} v - \alpha\beta \sin^2 v + \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \mathfrak{a}^2 \varepsilon^2}{4} \sin 2v$$

zu berechnen. Es ist leicht zu sehen, dafs für jede Lage des Poles die Integration zwischen den Grenzen $v = 0$ und $v = \pi$ zu vollführen ist. Der vollständige, von der Fufspunctencurve eingeschlossene Raum wird daher durch

$$14. \quad F = \tfrac{1}{2}\pi(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 + \alpha^2 + \beta^2)$$

ausgedrückt. Man kann ohne weitere Rechnung hieraus schliefsen, dafs für $\alpha = 0 = \beta$, oder für den Mittelpunct, der entsprechende Raum

$$15. \quad f = \tfrac{1}{2}\pi(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2)$$

ein Minimum ist. Bezeichnet man demnach überhaupt den Abstand des Poles vom Mittelpuncte durch ϱ, so ist im Allgemeinen

$$16. \quad F = f + \tfrac{1}{2}\pi r^2;$$

d. h. alle Fufspunctencurven, deren Pole gleichen Abstand vom Mittelpuncte haben, sind dem Inhalte nach gleich, und ihr Inhalt läfst sich leicht geometrisch darstellen.

§. 3.

Ist $\varepsilon = 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Parabel an. Multiplicirt man daher (7.) mit $(1 - \varepsilon^2)$, und setzt $\varepsilon = 1$, so stellt die daraus entspringende Gleichung

$$17. \quad r = \xi \cos v + \nu \sin v - \frac{p}{2} \cdot \frac{\sin^2 v}{\cos^2 v}$$

die Fufspunctencurve der Parabel dar. Sie zeigt, dafs die Fufspunctencurve aus einem endlichen Theile besteht (der zur Schleife wird, sobald der Pol aufserhalb der Parabel liegt), und aus zwei unendlichen Aesten. Zur Untersuchung, ob diese Curve für ihre unendlichen Aeste eine Asymptote habe, dienen die bekannten Ausdrücke

$$18. \quad \operatorname{tang}(v+\psi) = -r\frac{dv}{dr}, \qquad u = r^2\frac{dv}{\Delta(dr^2+r^4dv^2)},$$

wo ψ den Winkel irgend einer Tangente mit der Axe der x und u das Loth aus dem Ursprunge der Coordinaten auf diese Tangente repräsentirt. Setzt man nämlich in der Gleichung der Curve r unendlich grofs und berechnet den entsprechenden Werth von v, so hat die Curve eine Asymptote, wenn ψ und u für diese Werthe reell und endlich werden. Im vorliegenden Falle findet man auf diese Weise $\psi = 90^0$, $u = -\frac{p}{2}$: also hat die Fufspunctencurve der Parabel eine Asymptote, welche senkrecht auf der Abscissen-Axe steht und um den halben Parameter hinter dem Pole liegt.

Liegt der Pol im Scheitel der Parabel, so ist $\xi = \nu = 0$; also geht dann (17.) in

$$2r\cos v + p\sin^2 v = 0$$

über, oder, wenn man $x = r\cos v$, $y = r\sin v$ setzt, in

$$x^3 = y^2\left[\left(-\frac{p}{2}\right) - x\right].$$

Die Fufspunctencurve der Parabel aus dem Scheitel ist demnach eine Cissoide, und zwar hat sie die Leitlinie der Parabel zur Asymptote. Liegt dagegen der Pol im Brennpuncte der Parabel, so ist $\nu = 0$ und $\xi = -\frac{p}{2}$. Für diese Werthe geht (17.) in

$$r\cos v = -\frac{p}{2}$$

über; d. h. die Fufspunctencurve der Parabel aus dem Brennpuncte fällt mit ihrer Asymptote und der Tangente im Scheitel zusammen.

Es ist nun die Fufspunctencurve der Parabel zu quadriren. Bezeichnet man den Inhalt, ohne einstweilen auf die Grenzen Rücksicht zu nehmen, durch F, so wird für $\frac{p}{2} = a$:

$$F = \int\frac{r^2\,dv}{2}$$
$$= \frac{(\xi+a)^2-\nu^2}{8}\sin 2v + \frac{(\xi-a)^2+\nu^2-4a^2}{4}v$$
$$+ \frac{\nu(a+\xi)}{2}\sin^2 v + \frac{a^2}{2}\operatorname{tang} v + a\nu\log\cos v,$$

oder, wenn man

$$19. \quad a+\xi = 2x, \qquad \nu = 2y$$

setzt:

$$20. \quad F = (x^2 - 2ax + y^2)v + \frac{x^2 - y^2}{2}\sin 2v + 2xy\sin^2 v + \frac{a^2}{2}\operatorname{tang} v + 2ay\log\cos v.$$

Die Bestimmung der Grenzen hängt offenbar, wenn der Pol aufserhalb der Parabel liegt, von der Lage der Tangenten ab, die man von ihm aus an die Parabel ziehen kann. Bezeichnet θ den Winkel der über der Abscissen-Axe liegenden Tangente mit dieser Axe und θ' den der untern Tangente zugehörenden Winkel, so hat man, abgesehen von der Lage dieser Winkel,

$$21. \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{a}{\sqrt{(y^2 + a(2x - a))} - y}, \quad \operatorname{tang}\theta' = \frac{a}{\sqrt{(y^2 + a(2x - a))} + y},$$

und in Bezug auf diese Werthe von θ und θ' ist der Inhalt S der Schleife:

$$22. \quad \begin{cases} S = \int_0^{90^\circ - \theta'} \frac{r^2\,dv}{2} + \int_{\frac{3}{2}\pi + \theta}^{2\pi} \frac{r^2\,dv}{2} \\ = (x^2 - 2ax + y^2)(\pi - \theta - \theta') + \frac{x^2 - y^2}{2}(\sin 2\theta + \sin 2\theta') \\ -2xy(\cos^2\theta - \cos^2\theta') + \frac{a^2}{2}(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{cotg}\theta') - 2ay\log\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \\ = (x^2 - 2ax + y^2)(\pi - \theta - \theta') + (x + a)\sqrt{(y^2 + a(2x - a))} \\ -2ay.\log\frac{y^2 + ax + y\sqrt{(y^2 + a(2x - a))}}{a\sqrt{(x^2 + y^2)}}. \end{cases}$$

Der Inhalt des von r beim Beschreiben der unendlichen Aeste durchlaufenen Raumes ist analog:

$$23. \quad \begin{cases} T = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi + \theta} \frac{r^2\,dv}{2} + \int_{\frac{3}{2}\pi - \theta'}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{r^2\,dv}{2} \\ = -\frac{x^2 - y^2}{2}(\sin 2\theta + \sin 2\theta') + (x^2 - 2ax + y^2)(\theta + \theta') \\ + 2xy(\cos^2\theta - \cos^2\theta') - \frac{a^2}{2}(\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{cotg}\theta') - a^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi \\ \qquad + 2ay\log\frac{\sin\theta}{\sin\theta'} \\ = (x^2 - 2ax + y^2)(\theta + \theta') - (x + a\sqrt{(y^2 + a(2x - a))} - a^2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi \\ + 2ay\log\frac{y^2 + ax + y\sqrt{(y^2 + a(2x - a))}}{a\sqrt{(x^2 + y^2)}}. \end{cases}$$

Da aber $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\pi = \infty$ ist, so ist auch dieser Raum T unendlich grofs und kann daher kein weiteres Interesse haben. Es zeigte sich aber, dafs die Fufspunctencurven der Parabel immer eine in Bezug auf den Pol constant liegende Asymptote hat. Stellt man sich daher vor, der Radius-vector r beschreibe vom Pole aus diese Gerade, so durchläuft er hiebei offenbar den Raum

$$T' = -a^2 \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\pi,$$

welcher ebenfalls unendlich grofs ist. Die Vergleichung dieser Räume T und T' zeigt, dafs ihre Differenz eine endliche Gröfse ist. Es scheint daher zweckmäfsig, dem den unendlichen Aesten zugehörenden Raume den Raum zwischen ihnen und ihrer Asymptote zu substituiren. Die Formeln (23.) und (24.) geben für ihn den Ausdruck

$$25.\quad V = -(x^2 - 2ax + y^2)(\theta + \theta') + (x+a)\sqrt{(y^2 + a(2x-a))} \\ -2ay \log \frac{y^2 + ax + y\sqrt{(y^2 + a(2x-a))}}{a\sqrt{(x^2+y^2)}}.$$

Summirt man endlich die Räume S und V, mit Hinsicht auf den Gegensatz ihrer Lage, so geht für den Gesammt-Inhalt der einfache Ausdruck

$$26.\quad F = x^2 - 2ax + y^2)\pi$$

hervor. Es ist leicht zu sehen, dafs dieser Ausdruck seine Gültigkeit behält, wenn auch der Pol innerhalb der Parabel liegt. Das Minimum des Raumes F hat, zufolge der bekannten Regel, für $x = a$ und $y = 0$ statt, nemlich wenn der Pol im Durchschnittspuncte der Leitlinie der Parabel mit ihrer Haupt-Axe liegt; und zwar ist es dann

$$f = -a^2\pi.$$

Der Ausdruck (26.) giebt zugleich Mittel an die Hand, den Ort des Poles zu bestimmen, dem ein bestimmter Raum F entspricht. Denn setzt man in (26.) $x = -\frac{x'-a}{2}$, $y = -\frac{y'}{2}$ (wo x', y' die Coordinaten des Poles in Bezug auf den Scheitel ausdrücken), so wird

$$x'^2 + 2ax' + y'^2 = \frac{4F}{\pi} + 3a^2;$$

und diese Gleichung bezeichnet offenbar einen Kreis, dessen Centrum in dem obigen Minimumspuncte liegt und dessen Radius r durch

$$27.\quad r^2 = \frac{4}{\pi}(F + a^2\pi) = \frac{4}{\pi}(F - f)$$

ausgedrückt wird. Der Ort des den Raum F erzeugenden Poles ist demnach dieser Kreis. Hieraus hat man auch statt (26.) den Ausdruck

$$28.\quad F = f + \frac{r^2\pi}{4},$$

dessen geometrische Bedeutung leicht zu erkennen ist.

§. 4.

Ist endlich $\varepsilon > 1$, so gehört die Gleichung (1.) einer Hyperbel an. Die Formeln für die Fufspunctencurve stimmen in diesem Falle natürlich wieder mit denen bei der Ellipse überein; nur ist zu bemerken, dafs für die Hyperbel die grofse Axe und das Quadrat der kleinen Axe negativ sind; d. h. man hat jetzt für die Fufspunctencurve die Gleichung

$$29.\quad r^2 - 2r\alpha + \alpha^2 - \mathfrak{a}^2\cos^2 v + \mathfrak{b}^2\sin^2 v = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$30.\quad \alpha = (\xi - \mathfrak{a})\cos v + \nu\sin v.$$

Verlegt man den Pol in den Mittelpunct der Hyperbel, so geht (29.) in

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v$$

über und stellt eine schleifenförmige Curve dar, die für $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, oder für die gleichseitige Hyperbel, zu der in der Geschichte der Mathematik so merkwürdigen, von *Jacob Bernoulli* zuerst betrachteten Lemniscate wird; denn die zugehörende Gleichung

$$r^2 = \mathfrak{a}^2\cos 2v$$

ist der einfache Polar-Ausdruck der Lemniscate.

Behufs der Quadratur hat man, analog (11.):

$$31.\quad \left\{\begin{aligned} F &= \int\frac{r^2\,dv}{2} \\ &= \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{4}v - \frac{\alpha\beta}{2}\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{8}\sin 2v \\ &\pm\alpha\left[\frac{u\sin v}{2} - \frac{\mathfrak{a}^2+4\mathfrak{b}^2}{4\mathfrak{a}\varepsilon}\arcsin\frac{u^2-\mathfrak{a}^2\varepsilon^2\sin^2 v}{\mathfrak{a}^2}\right] \\ &\pm\beta\left[\frac{u\cos v}{2} - \frac{\mathfrak{b}^2}{2\mathfrak{a}\varepsilon}\log(u - \mathfrak{a}\varepsilon\cos v)\right] + \text{const.}; \end{aligned}\right.$$

wo α und β die Coordinaten des Mittelpuncts der Hyperbel sind und der Kürze wegen

$$32.\quad u^2 = \mathfrak{a}^2\cos^2 v - \mathfrak{b}^2\sin^2 v$$

ist. Summirt man nun wieder die beiden vom Radius-vector beschriebenen Räume, so wird

$$33.\quad F = \frac{\alpha^2+\beta^2+\mathfrak{a}^2-\mathfrak{b}^2}{2}v - \alpha\beta\sin^2 v + \frac{\alpha^2-\beta^2+\mathfrak{a}^2\varepsilon^2}{4}\sin 2v.$$

Um den ganzen Inhalt zu bekommen, ist hier offenbar zwischen den Grenzen 0 und φ zu integriren; wo φ dem Winkel der kleinen Axe mit der Asymptote gleich ist, so dafs

$$34.\quad \varphi = \text{arc tang}\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}};$$

und dies Resultat ist noch zu verdoppeln. Es ist demnach

35. $$F = (a^2 - b^2)\Phi + ab + (\alpha^2 + \beta^2)\Phi - \alpha\beta\frac{2a^2}{a^2+b^2} + (\alpha^2 - \beta^2)\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Das Minimum von F gehört offenbar zu dem Puncte ($\alpha = 0$, $\beta = 0$), d. h. zum Mittelpuncte, so dafs derselbe

$$f = (a^2 - b^2)\Phi + ab$$

ist, und man hat für F auch den Ausdruck

36. $$F = f + (\alpha^2 + \beta^2)\Phi - \alpha\beta\frac{2a^2}{a^2+b^2} + (\alpha^2 - \beta^2)\frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Soll der Ort des Poles gesucht werden, dem ein bestimmter Inhalt F entspricht, so hat man (36.) nur in Bezug auf die Variabeln α, β als Gleichung der Ortscurve zu betrachten. Untersucht man diese Gleichung nach den Formeln des in §. 1. angeführten Aufsatzes, so findet man, dafs sie zu einer Ellipse gehört, die mit der Hyperbel concentrisch ist; bezeichnet man überdies die Axen dieser Ellipse durch a' und b' und den Winkel der grofsen Axe mit der Abscissen-Axe durch μ, so ergiebt sich

$$\mu = -\tfrac{1}{2}\Phi, \qquad a'^2 : b'^2 = \varepsilon\Phi + 1 ; \varepsilon\Phi - 1.$$

Das Verhältnifs der Axen ist demnach von F unabhängig, d. h. es sind alle Orts-Ellipsen ähnlich.