ordnende Tätigkeiten unseres Verstandes. Es folgt eine Skizze der Entwicklung der Begriffe der negativen, komplexen und irrationalen Zahlen, ferner des Funktionsbegriffes. Die Frage nach der Existenz der Lösungen von Differentialgleichungen wird gestreift, ebenso der Integralbegriff. Von hier gelangt der Verfasser zur Besprechung der Mengenlehre, die mir allerdings wenig geklückt scheint (findet sich doch hier, unter manchen anderen Versehen, die Behauptung, die Zahl ω sei die Kardinalzahl der Menge der natürlichen Zahlen). Ausführliche Erörterung finden auch die prinzipiellen Fragen der Geometrie. Es wird die Unvollkommenheit der Anschauung in Gegensatz gebracht zur Schärfe bes Zahlbegriffes, wir finden eine ausführliche Erörterung der Möglichkeit der nichteuklidischen Geometrien und einen Hinweis auf die Frage der Unabhängigkeit und Widerspruchslosigkeit der Axiomensysteme. Mit einer starken Betonung des Wertes mathematischer Spekulation, ganz abgesehen von jeder praktischen Anwendbarkeit, mit dem Wunsche nach Berücksichtigung der für unsere ganze Kultur so fundamental wichtigen Grundbegriffe der Analysis im Schulunterricht, und mit der Zuversicht, daß es in der Mathematik keine unlösbaren Fragen geben könne, schließt diese ungemein anregende und instruktive Rede, der wir weite Verbreitung, auch unter Nichtmathematikern wünschen. *Hans Hahn.*

Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola. Deutsche Ausgabe besorgt von H. Liebmann. VIII u. 244 Seiten. Preis geb. 5 M. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner, 1908. (Sammlung Wissenschaft und Hypothese Bd. IV.)

Was den Inhalt dieses Buches anlangt, sei verwiesen auf die Besprechung des italienischen Originals in Bd. 18 dieser Zeitschrift. In den Abschnitten über Saccheri und Gauß sind in der deutschen Ausgabe einige Beweise hinzugefügt, die in der italienischen Ausgabe übergegangen waren. Auf die Deutung der nichteuklidischen Geraden durch Kreise gewisser euklidischer Kreisbündel, von der im Originale nicht die Rede war, wird in einer Anmerkung hingewiesen (S. 194). Ferner kommt die Zuordnung der rechtwinkligen Dreiecke der hyperbolischen Geometrie zu den dreirechtwinkligen Vierecken und ihrer Verwertung zur Lösung der Parallelenkonstruktion in einem neu hinzugefügten Anhang III zur Sprache. Die Literaturangaben sind an verschiedenen Stellen vervollständigt, doch vermisse ich hier, wie im Original anläßlich der Besprechung der Lieschen Untersuchungen einen Hinweis auf die Hilbertsche Arbeit (Grundlagen der Geometrie, zweite Aufl., Anhang IV). — Da dieses Buch zweifellos viele Leser finden wird, so ist es vielleicht nicht unangebracht, wenn ich einige Stellen anführe, die einer Korrektur bedürfen. S. 77 Z. 13 v. u. muß es heißen „eines rechtwinkligen, gleichschenkligen Dreieckes". In § 45 bedeutet a nicht den Erdbahnhalbmesser, sondern den Erdbahndurchmesser. Ebenda beruht die Behauptung: „Damit im wirklichen Raume die euklidische Geometrie gilt, müßte es Sterne geben mit beliebig kleiner Parallaxe" auf einer logisch unzulässigen Umkehrung; es könnten ja die Abstände sämtlicher Sterne von uns unter einer endlichen Grenze liegen. Der Anfang von § 77 ist falsch übersetzt; es muß heißen: „auch wenn man die Annahme macht, daß den Resultaten exakte Geltung zukommt". Ebenso S. 163, wo der Satz (Z. 18 v. o.) „für die die Kongruenz den logischen Charakter der Gleichheit fordert" zu lauten hat: „die es ausmachen, daß die Kongruenz den logischen Charakter der Gleichheit hat". In § 87 ff. ist im italienischen auseinandergehalten die „metrica convenzionale" (die „verabredete", d. i. nichteuklidische Maßbestimmung) von der „ordinaria" (der gewöhnlichen, euklidischen); es wurde beides mit „gewöhnlich" übersetzt, wodurch die Klarheit gelitten hat. Ich hoffe, durch diese wenigen Bemerkungen den Lesern des ausgezeichneten Buches einen kleinen Dienst zu erweisen. *Hans Hahn.*

Ernst Schröder. Abriß der Algebra der Logik. Bearbeitet von E. Müller. In drei Teilen. I. Teil: Elementarlehre. Teubner, Leipzig u. Berlin 1909. S. V u. 50.

In Schröders Nachlaß finden sich (wie das Vorwort berichtet) kurze freilich nur andeutende Entwürfe zu einem „Abriß" der Algebra der Logik, der die Grundzüge des algebraischen Kalküls in knapper Form, aber zugleich in möglichst straffer Entwicklung und Begründung geben sollte. Was so bisher nicht viel mehr geplant war, liegt nun (vorläufig seinem 1. Teil nahe), und zwar in ausgezeichneter Weise verwirklicht vor. Dabei handelt es sich zunächst um eine Begründung der Gebietetheorie, deren Gegenstand ganz allgemein als „Untersuchung von Dingen einer gewissen Art (Gebieten) hinsichtlich ihrer Beziehungen zueinander" bezeichnet wird (§ 9). Die im weiteren in Betracht kommenden Gebiete erfahren aber noch gewisse Einschränkungen: Zunächst sollen sie zu einem „Elementensystem" gehören, d. h. zwischen je zwei von ihnen soll dieselbe Beziehung oder aber die ihr kontradiktorisch widersprechende bestehen und überdies soll die betreffende Beziehung einer Reihe von Bedingungen wie Reflexivität, Transivität u. s. f. genügen, die als Axiome (in § 24) formuliert werden. Die Verträglichkeit dieser (7) Axiome wird, wie üblich, an einem besonderen Beispiel gezeigt, und zwar an den begrenzten Flächenstücken einer begrenzten Fläche, wobei die zugehörige Beziehung „Teilsein" ist (§ 32). Bedient man sich nun gewisser „selbstverständlicher" Schlußprozesse, die übrigens ebenfalls gewissenhaft in 12 „aussagetheoretischen" Sätzen formuliert erscheinen (§ 12 bis § 18), so gestatten jene Axiome sämtliche bekannte Sätze aus dem Operationskreis des Logikkalküls (Multiplikation, Addition, Negation und Distribution) in knapper und vollkommen exakter Weise abzuleiten, wie dies in § 33—68 geschieht.

Zum Schlusse (§ 70—75) wird noch speziell das Zweigebietesystem (das aus dem untersten und obersten Gebiet allein bestehen muß) betrachtet. Dieses System ist deshalb wichtig, weil die Aussagetheorie, deren Begründung zur weiteren Entwicklung der allgemeinen Gebietetheorie (Auflösung von Gleichungen) nötig ist, sich als Theorie eines solchen Zweigebietesystems herausstellen wird. Die Auflösung der Gleichungen sowie die Lehre von den Gebietsfunktionen soll der binnen kurzem erscheinende zweite Teil enthalten, dem alle Leser des ersten mit Spannung entgegensehen dürften. *C. Siegel.*

Theorie der Wasserräder. Von Ing. Dr. Richard v. Mises. Sonderabdruck aus dem 57. Bd. der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Leipzig, B. G. Teubner, 1909.