NOUVELLES REMARQUES SUR LES GROUPES CONTINUS.

Par M. **H. Poincaré** (Paris).

Adunanza del 10 novembre 1907.

§ 1.

Introduction.

J'ai déjà eu deux fois l'occasion de présenter quelques remarques sur les groupes continus, une première fois à l'occasion du jubilé de Sir G. G. Stokes (Cambridge, University Press, 1900), une seconde fois dans les Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo [tome XV (1901), pp. 321-368] ce sont ces deux Mémoires que je citerai plus loin simplement en disant « Cambridge » ou « Palerme ». Je crois devoir compléter ici ces remarques et en particulier étudier les propriétés des équations différentielles qui définissent ces groupes au point de vue de la théorie des fonctions.

Cette étude, à vrai dire, pourrait se faire par des procédés purement élémentaires, puisque ces équations différentielles sont susceptibles d'être intégrées complètement; mais il n'est pas inutile de l'aborder en partant des équations elles-mêmes; car la comparaison des résultats obtenus de la sorte avec ceux auxquels on arrive en partant des intégrales de ces équations, est instructive par elle-même; quelquefois même, cette comparaison conduit à certaines apparences paradoxales, qui jettent quelques lumières sur les propriétés générales des groupes et qu'il faut parfois quelque attention pour bien expliquer.

Rappelons d'abord les notations employées et les résultats obtenus. Le groupe considéré dérive d'un certain nombre de transformations infinitésimale; et l'une d'elles, la $i^{\text{ème}}$ par exemple, transforme les variables

$$x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n$$

en

$$x_1 + \varepsilon(X_{i1}), \quad x_2 + \varepsilon(X_{i2}), \quad \ldots, \quad x_n + \varepsilon(X_{in}),$$

ε étant une constante très petite et les X_{ik} des fonctions données des x. Elle transforme donc la fonction

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

en

$$f + \varepsilon \sum \frac{df}{dx_k}(X_{ik}) = f + \varepsilon X_i(f).$$

Ainsi se trouve défini l'opérateur

$$X_i(f) = \frac{df}{dx_1}(X_{i1}) + \frac{df}{dx_2}(X_{i2}) + \cdots + \frac{df}{dx_n}(X_{in}),$$

que je désignerai le plus souvent simplement par X_i.

Nous avons donc r opérateurs $X_1, X_2, \ldots, X_r$ correspondant aux r transformations infinitésimales du groupe et nous devons en étudier les combinaisons.

Nous poserons

$$X_i X_k = X_i X_k(f) = X_i[X_k(f)]$$

et X_i^m ou $X_i^m(f)$ se définit de la même manière. Il faut remarquer que cette opération n'est pas commutative et que l'on n'a pas $X_i X_k = X_k X_i$. Nous poserons :

$$(X_i X_k) = X_i X_k - X_k X_i.$$

Nous envisagerons aussi d'autres combinaisons de ces opérateurs, tels que

$$e^{tX} = f + \frac{t}{1} X(f) + \frac{t^2}{1.2} X^2(f) + \cdots.$$

Alors la transformation infinitésimale correspondant à X_i sera

$$f + \varepsilon X_i(f) = [1 + \varepsilon X_i] f,$$

ce que je puis écrire aussi

$$e^{\varepsilon X_i (f)}$$

ou simplement $e^{\varepsilon X_i}$ en négligeant le carré de ε.

La transformation la plus générale du groupe pourra alors être représentée par e^T, en posant

$$T = t_1 X_i + \cdots + t_r X_r,$$

les t étant des constantes quelconques. J'introduirai d'ailleurs d'autres combinaisons linéaires des X_i que je désignerai par

$$U = \sum u_i X_i, \qquad V = \sum v_i X_i, \qquad W = \sum w_i X_i, \quad \text{etc.}$$

On doit avoir, comme on sait, les *relations de structure* :

$$(X_i X_k) = \sum_s c_{iks} X_s,$$

les c étant des constantes; mais ces constantes ne peuvent pas être quelconques, elles doivent être choisies de façon à satisfaire aux *relations de* Jacobi :

$$[(X_a X_b) X_c] + [(X_b X_c) X_a] + [(X_c X_a) X_b] = 0.$$

Nous aurons alors, en vertu des relations de structure,

$$(VT) = \sum b_{ik} t_i X_k,$$

où

$$b_{ik} = \sum_s c_{sik} v_s.$$

Nous envisagerons le déterminant

$$F(\xi) = \begin{vmatrix} b_{11} - \xi & b_{12} & \ldots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} - \xi & \ldots & b_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{r1} & b_{r2} & \ldots & b_{rr} - \xi \end{vmatrix}$$

contenant l'indéterminée ξ; l'équation

$$F(\xi) = 0$$

dite *équation de* KILLING a une extrême importance. Nous désignerons les mineurs de ce déterminant par

$$P_{ik} = \frac{\partial F(\xi)}{\partial b_{ik}}.$$

On sait que, lorsque deux groupes sont isomorphes, l'étude de l'un peut se ramener à celle de l'autre; il suffira donc, parmi tous les groupes qui ont même structure, d'en étudier un seul et nous choisirons ce que nous appellerons le *groupe paramétrique* et que nous définirons de la façon suivante.

Soit e^V la substitution générale du groupe, où $V = \sum v_i X_i$; nous choisirons pour variables $v_1, v_2, \ldots, v_r$. Posons ensuite

$$e^V e^T = e^W$$

(où nous supposerons toujours $T = \sum t_i X_i$, $W = \sum w_i X_i$, ce qu'il sera inutile de répéter désormais); les w seront des fonctions des v et des t, ou, en d'autres termes, la transformation e^T transforme e^V en e^W, c'est-à-dire les v en w; c'est le groupe ainsi défini que nous appelons le groupe paramétrique.

Nous avons donné le moyen de former les équations différentielles de ce groupe quand on connaît les relations de structure; soit en effet

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

les t_i étant très petits; nous aurons en faisant varier seulement t_k, par exemple:

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} \frac{P_{ik}}{F(\xi)}, \tag{1}$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour fermé enveloppant toutes les racines de l'équation de KILLING. Si par exemple toutes ces racines sont simples et qu'elles s'écrivent $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, il viendra:

$$\frac{dv_i}{dt_k} = \sum \frac{\omega}{1 - e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F(\omega)},$$

la sommation s'étendant aux diverses racines. Une de ces racines est toujours nulle; si elle est multiple, les autres racines étant simples, on a:

$$\frac{dv_i}{dt_k} = A + \sum \frac{\omega}{1 - e^{-\omega}} \frac{P_{ik}(\omega)}{F(\omega)}, \tag{1$^{\text{bis}}$}$$

la sommation étant étendue cette fois aux racines différentes de zéro et A représentant le coefficient de $\frac{1}{\xi}$ dans le développement de la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances croissantes de ξ.

Outre le groupe paramétrique, nous considérerons le *groupe adjoint*. A la transformation

$$e^V e^T = e^W$$

du groupe paramétrique qui change V en W, nous ferons correspondre une substitution que nous appellerons son *adjointe,* et qui sera définie par l'équation :

$$e^{-T} e^V e^T = e^U$$

et qui change V en U, c'est-à-dire $v_1, v_2, \ldots, v_r$ en $u_1, u_2, \ldots, u_r$. Ces substitutions adjointes forment le groupe adjoint.

On sait que les substitutions du groupe adjoint sont linéaires, c'est-à-dire que les u sont des fonctions linéaires des v, et nous avons donné (Palerme, pages 324 et 326) le moyen de former les coefficients l_{ik} de ces substitutions linéaires.

Il y a isomorphisme du groupe adjoint et du groupe paramétrique, mais cet isomorphisme n'est pas toujours holoédrique et on doit distinguer deux catégories de groupes. Ceux de la 1ère catégorie ne contiennent pas de transformations *distinguées,* c'est-à-dire de transformations infinitésimales permutables à toutes les transformations du groupe; l'isomorphisme est alors holoédrique. Ceux de la 2de catégorie contiennent des transformations distinguées; l'isomorphisme est alors mériédrique, car chacune de ces transformations distinguées a pour adjointe la substitution identique.

Si l'on a

$$V = \sum v_i X_i, \qquad \text{(les } X_i \text{ étant les operateurs simples)}$$

V sera ce que nous appellerons un *opérateur composé* du groupe. Mais à chaque opérateur correspondront ce que nous appellerons des *opérateurs conjugués* de V. Si ω est une racine simple, il y aura un opérateur T tel que:

$$(VT) = \omega T; \tag{2}$$

ce sera un *opérateur conjugué du 1er ordre* appartenant à la racine ω; si cette racine est simple, cet opérateur est entièrement déterminé à un facteur constant près.

Si la racine est double, par exemple, il existe toujours au moins un opérateur conjugué du 1er ordre, mais il pourra exister également un *opérateur conjugué du 2d ordre* T_2 appartenant à la racine ω et tel que

$$(VT_2) = \omega T_2 + T. \tag{2bis}$$

Alors cet opérateur n'est pas entièrement déterminé, puisqu'une combinaison linéaire quelconque de T_2 et de T satisferait également à l'équation (2bis); mais nous ne regarderions pas une pareille combinaison comme un opérateur conjugué du 2d ordre distinct de T_2. Nous dirons que T est le *dérivé* de T_2.

C'est là le cas général; il peut arriver également, si ω est racine double, qu'il n'y ait pas d'opérateur conjugué du 2d ordre, mais deux opérateurs conjugués du 1er ordre distincts T et T'; il est clair alors que toute combinaison linéaire de T et de T' satisfait à l'équation (2).

Si ω est racine triple, il peut y avoir un opérateur conjugué du 1er ordre T, un du 2d ordre T_2 et un du 3e ordre T_3 tel que

$$(VT_3) = \omega T_3 + T_2.$$

Il peut y avoir aussi deux opérateurs conjugués du 1er ordre et un du 2d ordre, ou bien encore trois du 1er ordre. Et ainsi de suite.

Si les opérateurs conjugués appartenant à une racine sont tous du 1^{er} ordre, nous dirons que cette racine, quoique multiple, *se comporte comme une racine simple.*

Remarquons que V est un de ses propres opérateurs conjugués du 1^{er} ordre, appartenant à la racine zéro.

Tout cela peut s'exprimer dans un langage géométrique. Considérons $v_1, v_2, \dots, v_r$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à r dimensions; l'équation

$$F(1) = 0,$$

où ξ a été remplacé par 1, représentera une surface algébrique que j'appellerai la *surface de* Killing. Cette surface est susceptible d'être engendrée de plusieurs manières par des droites, ou par des variétés planes à plus d'une dimension.

L'étude détaillée de cette génération ne serait pas sans intérêt.

Quoi qu'il en soit, à tout point M de cette surface correspond un opérateur V pour lequel l'une des racines de l'équation de Killing est égale à 1. Si nous envisageons un opérateur T_1 conjugué du 1^{er} ordre de V, à cet opérateur correspondra un point; si nous le joignons à l'origine, nous aurons une droite D_1, qui sera l'une des droites conjuguées du 1^{er} ordre du point M. Soit T_2 un opérateur conjugué du 2^d ordre et T'_1 son dérivé; le plan à 2 dimensions qui passe par l'origine et par les points correspondants à T_2 et T'_1 sera un plan conjugué du 2^d ordre du point M; et ainsi de suite.

Si 1 est racine simple, la droite conjuguée correspondant à la racine 1 sera la *droite conjuguée principale* de M et le plan à $r-1$ dimensions qui passe par toutes les autres droites ou plans conjugués sera le *plan conjugué principal* de M.

Nous appellerons *série régulière d'opérateurs conjugués,* une suite d'opérateurs conjugués:

$$T_1, \quad T_2, \quad \dots, \quad T_n,$$

le 1^{er} du 1^{er} ordre, le 2^d du 2^d, ..., le n^e du n^e ordre; et tels que l'on ait:

$$(VT_1) = \omega T_1, \qquad (VT_2) = \omega T_2 + \lambda_1 T_1, \qquad (VT_3) = \omega T_3 + \lambda_1 T_2 + \lambda_2 T_1, \dots$$
$$\dots, (VT_n) = \omega T_n + \lambda_1 T_{n-1} + \lambda_2 T_{n-2} + \dots + \lambda_{n-1} T_1;$$

les constantes $\omega, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ doivent être les mêmes dans toutes les équations de la série; mais sont d'ailleurs quelconques; nous n'excluons pas le cas de $\lambda = 0$; seulement dans ce cas particulier tous les opérateurs sont du 1^{er} ordre.

Deux transformations e^V et $e^{V'}$ auront alors une série régulière commune

$$T_1, \quad T_2, \quad \dots, \quad T_n$$

si l'on a:

$$(VT_1) = \omega T_1, \quad (VT_2) = \omega T_2 + \lambda_1 T_1, \dots, (VT_n) = \omega T_n + \lambda_1 T_{n-1} + \dots + \lambda_{n-1} T_1;$$
$$(V'T_1) = \omega' T_1, \quad (V'T_2) = \omega' T_2 + \lambda'_1 T_1, \dots, (V'T_n) = \omega' T_n + \lambda'_1 T_{n-1} + \dots + \lambda'_{n-1} T_1;$$

les constantes ω, λ, et ω', λ' peuvent d'ailleurs être différentes pour V et pour V'; mais les opérateurs $T_1, T_2, \dots, T_n$ sont les mêmes pour V et pour V'.

Cela posé, *la condition nécessaire et suffisante pour que les adjointes de e^V et $e^{V'}$ soient permutables, c'est que V et V' admettent un certain nombre de séries régulières communes, comprenant ensemble r opérateurs indépendants, si r est l'ordre du groupe.*

Ainsi, si le groupe est par exemple du 6^e^ ordre et si V et V' admettent une série régulière commune de 3 opérateurs, une seconde série régulière commune de 2 opérateurs et une troisième série régulière commune formée d'un seul opérateur du 1^er^ ordre, e^V et $e^{V'}$ seront permutables.

Plus généralement, je dirai qu'une substitution linéaire quelconque admet une *série régulière* s'il existe n combinaisons linéaires des variables indépendantes, combinaisons que j'appelle

$$y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n,$$

qu'elle change respectivement en

$$\omega y_1, \quad \omega y_2 + \lambda_1 y_1, \quad \omega y_3 + \lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1, \ldots, \omega y_n + \lambda_1 y_{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1} y_1.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante pour que deux substitutions linéaires soient permutables, c'est qu'elles admettent des séries régulières communes comprenant ensemble autant de combinaisons linéaires y indépendantes qu'il y a de variables.

§ 2.

Non-uniformité des Fonctions.

Soit

$$e^U e^W = e^V; \tag{1}$$

les v seront des fonctions des u et des w et notre but principal est d'étudier ces fonctions au point de vue de la théorie générale des fonctions. La première remarque que nous devons faire, c'est que ces fonctions ne sont pas en général uniformes. Si partant de certaines valeurs initiales des u et des w, et des valeurs correspondantes des v, on fait décrire aux u et aux w des contours fermés, il est possible que les valeurs finales des v ne soient pas identiques à leurs valeurs initiales.

Si j'envisage au contraire l'équation

$$e^{-W} e^U e^W = e^V \tag{2}$$

qui définit le groupe adjoint, je vois que les v sont des fonctions uniformes des u et des w. Si donc on pose

$$e^A e^U e^B = e^V;$$

si l'on fait décrire à A, U et B des contours fermés; si on a au début et à la fin de ce contour

$$-A = B = W,$$

on sera certain que V reviendra à sa valeur primitive, si on a eu *constamment*

$$A = -B.$$

Mais on n'en sera plus certain, si cette relation n'a lieu qu'au début et à la fin du contour, et ne s'est pas maintenue constamment sur tout le contour.

De ce défaut d'uniformité peuvent résulter certaines particularités déconcertantes au premier abord; on est tenté d'écrire

$$e^V e^{-V} = 1$$

et en effet on est souvent en droit de le faire, mais pas toujours. Supposons que l'on envisage

$$e^U e^W,$$

que U et W, partant par exemple de la valeur initiale zéro, suivent un chemin quelconque, à la fin duquel on ait

$$U = V, \qquad W = -V,$$

on ne sera pas certain que $e^U e^W$ tendra vers 1. (Cfr. Palerme, page 357).

La fonction $e^V e^W$ n'étant pas uniforme, 1 est l'une des valeurs qu'elle prend pour $U = V$, $W = - V$, mais ce n'est pas la seule.

Autre exemple. Supposons que la substitution V_0 soit permutable à U_0, c'est-à-dire que l'on ait:

(3) $$e^{-V_0} e^{U_0} e^{V_0} = e^{U_0}.$$

A-t-on le droit d'en déduire

(4) $$e^{-U_0} e^{V_0} e^{U_0} = e^{V_0},$$

c'est-à-dire que U_0 est permutable à V_0?

Écrivons

(3^{bis}) $$e^{-V'} e^U e^V = e^{U'},$$

d'où nous déduirons

(4^{bis}) $$e^{-U} e^{V'} e^{U'} = e^V.$$

Si nous faisons varier U, V, U' et V' d'une manière continue, en partant de zéro, et suivant un chemin quelconque, mais de telle façon que la relation (3^{bis}) soit toujours remplie, la relation (4^{bis}) sera aussi toujours remplie.

Que signifie maintenant la relation (3)? elle signifie que si l'on a sur le chemin constamment $V = V'$, et que les valeurs finales de U, V, et V' soient U_0, V_0 et V_0, la valeur finale de U' (qui est entièrement déterminée puisque le groupe adjoint est définie par des fonctions uniformes) sera U_0.

Que signifierait maintenant la relation (4)? Ce serait que, si l'on a sur le chemin constamment $U = U'$, les valeurs finales de U, V', U' étant U_0, V_0, U_0, la valeur finale de V sera V_0. Ce n'est pas tout à fait la même chose, puisque dans un cas le chemin doit être choisi de telle façon que l'on ait constamment $V = V'$, et dans l'autre cas de telle façon que l'on ait constamment $U = U'$. On ne pourra donc sans un examen spécial déduire (4) de (3).

Si toutefois l'on avait, quelles que soient les indéterminées α et β:

(3^{ter}) $$e^{-\beta V_0} e^{\alpha U_0} e^{\beta V_0} = e^{\alpha U_0},$$

on aurait le droit d'en déduire:

(4^{ter}) $$e^{-\alpha U_0} e^{\beta V_0} e^{\alpha U_0} = e^{\beta V_0},$$

car on pourrait faire varier α et β depuis 0 jusqu'à 1 et on aurait alors, tout le long du chemin, d'une part

$$V = V' = \beta V_0$$

et d'autre part

$$U = U' = \alpha U_0.$$

C'est ce qui arrive lorsque deux transformations infinitésimales sont permutables.

Nous avons vu dans le Mémoire de Palerme que si dans l'équation (1) les inconnues v (ou ce qui revient au même l'opérateur V, ou la transformation e^V) sont susceptibles de plusieurs déterminations, les différentes déterminations de la transformation e^V ont *même adjointe*. En d'autres termes, si V' et V'' sont deux déterminations de l'opérateur V, les opérateurs conjugués des divers ordres de V' et V'' sont les mêmes; et les racines correspondantes de l'équation de KILLING sont les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$. D'où cette conséquence fort importante, que si $e^{V'}$ et $e^{V''}$ sont deux déterminations de e^V, *les deux transformations $e^{\alpha V'}$ et $e^{\beta V''}$ sont permutables quelles que soient les constantes α et β, pourvu toutefois que le groupe soit de la 1ère catégorie, c'est-à-dire ne contienne pas de transformations distinguées.*

Dans ce cas, en effet, il suffit (puisque l'isomorphisme des deux groupes, adjoint et paramètrique, est holoédrique) de montrer que les deux adjointes de $e^{\alpha V'}$ et $e^{\beta V''}$ sont permutables.

Or V et V' ont mêmes racines de KILLING et mêmes opérateurs conjugués; elles diffèrent seulement parce qu'une racine de KILLING, qui correspond dans V à une certaine série régulière d'opérateurs conjugués s'étant échangée avec une autre racine, correspondra dans V' à une autre série régulière d'opérateurs conjugués.

Donc V et V' auront toutes leurs séries régulières communes. Donc les adjointes $e^{\alpha V}$ et $e^{\beta V'}$ et ces transformations elles-mêmes sont permutables.

§ 3.

Transformations spéciales.

Cela posé, faisons varier dans l'équation (1) U et W d'une manière continue, de façon que V varie aussi d'une manière continue; soient U_0, W_0, V_0 les valeurs initiales de U, W, V; supposons que U et W décrivent un contour fermé C de façon à revenir à leurs valeurs initiales U_0 et W_0, mais que V ait pour valeur finale une autre détermination V'_0.

Considérons un chemin L suivi par U et W et allant de $U = W = 0$ à $U = U_0$, $W = W_0$; parcourons ce chemin de façon que la valeur de V qui corresponde à $U = U_0$, $W = W_0$ soit $V = V_0$ et supposons que la valeur de V qui corresponde à $U = W = 0$ soit $V = 0$.

Supposons maintenant que l'on suive le même chemin L en partant de $U = U_0$, $W = W_0$. Avec la valeur $V = V'_0$, on n'arrivera pas à $U = W = 0$ avec la valeur $V = 0$; sans quoi, en revenant à $U = U_0$, $W = W_0$ par le même chemin, on y arriverait avec la valeur $V = V_0$ et non avec la valeur $V = V'_0$. Donc, s'il y a plusieurs valeurs distinctes pour V quand elle est définie par l'équation (1), il y en aura plusieurs également quand on fera $U = W = 0$; l'une de ces valeurs sera $V = 0$, mais il y en aura d'autres et généralement une infinité.

Les transformations e^V qui sont ainsi les diverses solutions de l'équation

$$e^0 e^0 = e^V$$

s'appellent les *transformations spéciales* (Palerme, page 353); elles sont caractérisées par ce fait que leur adjointe est la substitution identique.

Nous pouvons tout de suite en donner un exemple simple. Envisageons le groupe des rotations; on a (Palerme, page 332):

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation.

Les transformations spéciales correspondent aux rotations dont l'angle est multiple de 2π, et sont caractérisées par

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = k^2\pi^2.$$

D'après ce qui précède, ou bien il y a des transformations spéciales, ou bien les v sont fonctions uniformes des u et des w (ce qui arrive par exemple dans le cas des groupes de rang zéro).

Il peut se faire également qu'il existe des transformations qui, sans être spéciales au sens propre du mot (c'est-à-dire susceptibles de s'échanger avec e^0 quand U et W décrivent des contours fermés) ont néanmoins pour adjointe la substitution identique. Je les appellerai *quasi-spéciales.*

Il importe de remarquer que ces transformations quasi-spéciales jouissent de quelques-unes des plus importantes propriétés des transformations spéciales. Si, par exemple, e^A est spéciale ou quasi spéciale et qu'on pose

$$e^U e^A = e^V,$$

e^U et e^V auront même adjointe; les racines de l'équation de KILLING seront les mêmes à des multiples près de $2\pi\sqrt{-1}$; ces multiples devant demeurer constants quand U varie d'une manière continue, ne pourront être autre chose que les racines de e^A (Palerme, page 358). Donc, chaque racine de e^V sera égale à la racine correspondante de e^U, plus la racine correspondante de e^A, laquelle sera un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$.

Ce n'est pas tout. Les deux transformations e^U et e^V ayant même adjointe, on verrait comme plus haut que, quels que soient les constantes α et β, $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta V}$ (ou au moins leurs adjointes si le groupe est de 2^{de} catégorie, cas sur lequel je me réserve de revenir plus loin) sont permutables.

Soit alors

$$e^{A_1}, \quad e^{A_2}, \quad \ldots, \quad e^{A_n}$$

une suite de transformations spéciales ou quasi-spéciales et posons:

$$e^U e^{A_i} = e^{V_i};$$

on verrait toujours pour les mêmes raisons que les diverses transformations

$$e^{\alpha U}, \qquad e^{\beta_i V_i}$$

sont permutables entre elles, quelles que soient les constantes α et β_i; l'ensemble des transformations:

$$e^{\alpha U + \Sigma \beta_i V_i}$$

forme un sous-groupe continu dont toutes les transformations sont permutables. Si la k^e racine de l'équation de KILLING est ω_k pour e^U, et τ_{ik} pour e^{A_i}, elle sera, pour la transformation précédente:

$$\omega_k(\alpha + \sum \beta_i) + \sum \beta_i \tau_{ik}$$

(Cfr. Palerme, page 356 in fine).

Comparons le résultat précédent à d'autres qui ont été obtenus par d'autres voies et pour cela reportons-nous à la thèse de CARTAN (Paris, Nony, 1894). Nous voyons qu'il y définit un certain sous-groupe γ, et que, dans les groupes simples en particulier, toutes les transformations de ce sous-groupe sont permutables. Soient maintenant deux opérateurs X_α et $X_{\alpha'}$ appartenant respectivement par rapport au sous-groupe γ à deux racines égales et de signe contraire ω_α et $-\omega_\alpha$. Formons le crochet

$$(X_\alpha X_{\alpha'}) = Y_\alpha.$$

CARTAN démontre (page 42) que pour Y_α les racines de l'équation de KILLING ont leurs rapports commensurables. Il en résulte que l'on peut choisir le coefficient λ_α de façon que pour $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ toutes les racines de KILLING soient des multiples de $2\pi\sqrt{-1}$, et comme d'ailleurs elles se comportent comme des racines simples, il en résulte que $e^{\lambda_\alpha Y_\alpha}$ sera spéciale ou quasi-spéciale.

Le sous-groupe γ contient donc des transformations spéciales $e^{A_1}, e^{A_2}, \ldots, e^{A_l}$, et la transformation la plus générale de γ peut s'écrire:

$$e^{\Sigma \beta_i A_i}.$$

Comme d'ailleurs CARTAN montre encore que les racines de l'équation de KILLING dans ce sous-groupe sont des fonctions linéaires des β, on aperçoit l'identité foncière du résultat de KILLING-CARTAN avec celui que je viens d'obtenir par une voie toute différente.

Si e^A est une transformation spéciale, $e^U e^A$ sera une autre détermination de e^U; on aura d'ailleurs:

$$e^U e^A = e^A e^U$$

et

$$e^{-A} e^U e^A = e^U,$$

c'est-à-dire que e^U sera permutable à e^A; cela résulte de ce que l'adjointe de e^A est la substitution identique, mais on n'aurait pas le droit d'en conclure, ainsi que nous l'avons remarqué plus haut,

$$e^{-U} e^A e^U = e^A.$$

Prenons pour exemple le groupe des rotations, et représentons chaque rotation par un vecteur ayant pour composantes v_1, v_2, v_3. Le vecteur $e^{-A} e^U e^A$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^U la rotation e^A, et comme l'angle de cette rotation est un multiple de 2π, ce vecteur ne changera pas. Au contraire, le vecteur $e^{-U} e^A e^U$ s'obtiendra en faisant subir au vecteur e^A la rotation e^U qui altère la direction de ce vecteur. Donc

$e^{-U} e^A e^U$ et e^A sont deux rotations d'un même angle, multiple de 2π, mais autour d'axes différents.

Terminons par une remarque sur le sens du mot isomorphisme. Nous avons dit que les groupes paramétrique et adjoint sont holoédriquement isomorphes, dans le cas des groupes de la $1^{\text{ère}}$ catégorie. Cela n'est pas exact en un sens, puisque le groupe paramétrique contient des transformations spéciales auxquelles correspond dans le groupe adjoint la substitution identique. Cela est exact seulement si l'on se borne à envisager les transformations infinitésimales et c'est dans ce sens que nous emploierons ce mot d'ordinaire.

§ 4.

Transformations singulières.

Reprenons l'équation $e^U e^W = e^V$, faisons décrire à U et à W un contour fermé, de telle façon que V ne revienne pas à sa valeur initiale. Comme les u et les w sont $2r$ variables indépendantes, le contour fermé décrit par U et W pourra se décomposer en contours fermés infiniment petits (ce qui n'aurait pas lieu, par exemple, si l'on avait deux variables x et y non indépendantes, liées par une relation algébrique, de telle façon que le point analytique x, y soit assujetti à rester sur une surface de Riemann non simplement connexe). Pour l'un au moins de ces contours infiniment petits, V ne reviendra pas à sa valeur initiale, la transformation correspondante e^V s'appellera une *transformation singulière*, de sorte que les diverses déterminations de e^V s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière.

On peut voir (Palerme, pages 327 à 330, 338 à 340) qu'il y a trois espèces de transformations singulières (cette classification est la même en principe que dans le Mémoire de Palerme, mais les dénominations sont modifiées):

1° Les transformations singulières de la $1^{\text{ère}}$ espèce sont celles dont l'adjointe a son déterminant nul. Pour que e^V soit singulière de $1^{\text{ère}}$ espèce, il faut que l'une des transformations e^U, e^W soit singulière de $1^{\text{ère}}$ espèce. Comme nous supposerons en général que e^U, e^W sont régulières, les transformations singulières de $1^{\text{ère}}$ espèce n'auront pas à intervenir.

2° Les transformations singulières de la 2^{e} espèce sont celles pour lesquelles deux racines de l'équation de Killing diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$; il en résulte que, dans l'équation déterminante de l'adjointe, les deux racines correspondantes deviennent égales, mais *elles se comportent comme deux racines distinctes*. Dans ces conditions, les valeurs des v sont des fonctions *indéterminées* des coefficients l de l'adjointe. Ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w. Si nous prenons pour exemple le groupe des rotations, une rotation d'un angle 2π autour d'un axe quelconque (qui est en même temps une transformation spéciale) sera une transformation singulière de 2^{e} espèce. On voit en effet que l'adjointe se réduit à la substitution identique, de sorte que l'on trouve:

$$v_1 = \alpha\pi, \qquad v_2 = \beta\pi, \qquad v_3 = \gamma\pi,$$

α, β, γ étant trois cosinus directeurs assujettis seulement à la condition:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

mais d'ailleurs indéterminés.

3° Les transformations singulières de la 3^e^ espèce sont, comme celles de la 2^e^, telles que deux racines de l'équation de KILLING diffèrent d'un multiple de $2\pi\sqrt{-1}$, et par conséquent que deux racines de l'équation déterminante de l'adjointe soient égales. Seulement ces deux racines égales *ne se comportent pas comme deux racines distinctes*, et l'adjointe devient une substitution linéaire *parabolique*. Dans ces conditions, si nous regardons les v comme des fonctions des u et des w, ces fonctions deviennent *infinies* et non pas indéterminées.

Nous emprunterons encore notre exemple au groupe des rotations.

Supposons que e^U soit une rotation imaginaire d'un angle

$$\operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-8}}{3}$$

autour de l'axe des z, de telle façon que

$$u_1 = u_2 = 0, \qquad u_3 = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{-8}}{3};$$

l'adjointe sera

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ -\sqrt{-8} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que e^W soit une rotation d'un angle $2k\pi + \frac{\pi}{2}$ autour de l'axe des x, ayant pour adjointe:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

La résultante e^V aura pour adjointe

$$\begin{vmatrix} 3 & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & 0 \end{vmatrix}.$$

L'équation déterminante en S s'écrit:

$$\begin{vmatrix} 3-S & \sqrt{-8} & 0 \\ 0 & -S & 1 \\ \sqrt{-8} & -3 & -S \end{vmatrix} = -(S-1)^3 = 0.$$

Elle a donc une racine triple, mais cette racine triple ne se comporte pas comme trois racines simples, ou comme une racine simple et une racine double. Il faudrait pour cela que les mineurs de l'équation en S s'annulassent tous à la fois pour $S = 1$, ce qui n'a pas lieu.

L'adjointe de e^V est donc une substitution parabolique. Quant aux racines de l'équation de KILLING, elles doivent être l'une nulle, les deux autres égales et de signe contraire, ainsi qu'il advient toujours dans le groupe des rotations. Les deux racines qui ne sont pas nulles doivent être multiples de $2\pi\sqrt{-1}$; le raisonnement du § précédent montrent qu'elles dépendent de k; on peut choisir la détermination de l'arc tg, de telle façon qu'elles soient égales à $\pm 2k\pi\sqrt{-1}$. Elles ne sont donc pas égales entre elles en général.

Or si une substitution parabolique peut être une puissance d'une substitution linéaire infinitésimale, c'est à la condition que cette substitution infinitésimale soit elle même parabolique. Si donc e^V a pour adjointe une substitution parabolique de la forme précédente, il faut que $e^{\alpha V}$, où α est très petit, ait également son adjointe parabolique, et par conséquent que l'équation de KILLING ait ses trois racines égales.

Cela est en contradiction avec ce que nous venons de dire et la contradiction ne peut s'expliquer que parce que les v cessent d'être finis.

Il reste à étudier de quelle façon les transformations s'échangent entre elles quand on tourne autour d'une transformation singulière; cette étude peut se faire, soit en partant des équations finies du groupe, soit en partant des équations différentielles et c'est précisément la comparaison de ces deux méthodes qui est intéressante.

§ 5.

Groupes de la 2e catégorie.

Plusieurs des résultats précédents ne s'appliquent qu'aux groupes de la 1ère catégorie; et nous avons à voir maintenant comment ils doivent être modifiés en ce qui concerne les groupes de la 2de catégorie, c'est-à-dire ceux qui renferment des transformations distinguées.

Parmi les opérateurs X_i qui correspondent aux diverses transformations infinitésimales du groupe, nous distinguerons ceux qui correspondent aux transformations distinguées et que nous appellerons les X_i'', et ceux qui correspondent aux autres transformations et que nous appellerons les X_i' (Palerme, page 337) et nous poserons:

$$V = \sum v_i X_i = \sum v_i' X_i' + \sum v_i'' X_i'',$$

distinguant ainsi les v' et les v''.

Nous voyons alors que les b_{ik}, et par conséquent les P_{ik} et $F(\xi)$ dépendent seulement des v' et pas des v'', et que

$$\frac{P_{ij}}{F(\xi)}$$

se réduit à 0 ou à $\frac{1}{\xi}$ si le 2d indice j correspond à un des X'', à savoir: à 0 si les deux indices sont différents et à $\frac{1}{\xi}$ s'ils sont égaux. (Dans le mémoire de Palerme il y a eu une permutation d'indices).

Si nous avons alors

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

T étant très petit, il viendra (Palerme, page 331):

$$(1) \qquad dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1-e^{-\xi}} \sum \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

d'où:

$$\frac{dv_i}{dt_j''} = 0, \quad \text{sauf} \quad \frac{dv_j''}{dt_j''} = 1.$$

Cherchons alors à former les équations différentielles d'où dépendent les relations de U, W et V; nous avons

$$e^U e^W = e^V$$

ou (T étant très petit):

$$e^U e^W e^T = e^V e^T.$$

Or, en posant:

$$e^W e^T = e^{W+dW}, \qquad e^V e^T = e^{V+dV},$$

il vient:

$$e^U e^{W+dW} = e^{V+dV},$$

ce qui définit la relation différentielle entre les v et les w, les u restant constants.

Mais, l'équation

$$e^{V+dV} = e^V e^T$$

peut s'écrire (Palerme, page 331):

$$t_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)},$$

de sorte que nos relations différentielles peuvent s'écrire explicitement:

$$(2) \qquad \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dw_j P_{ij}^1}{F_1(\xi)} = \int d\xi \frac{1-e^{-\xi}}{\xi} \sum_j \frac{dv_j P_{ij}}{F(\xi)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

où P_{ij}^1 et $F_1(\xi)$ désignent ce que deviennent P_{ij} et $F(\xi)$ quand on y remplace les v par les w. Je puis les écrire aussi sous la forme:

$$(3) \qquad \sum_j W_{ij} dw_j = \sum_j V_{ij} dv_j,$$

les V_{ij} étant des fonctions entières des v, et les W_{ij} les mêmes fonctions entières des w.

Par je ne sais quelle inadvertance, j'ai écrit simplement (Palerme, page 339):

$$dw_i = \sum_j V_{ij} dv_j$$

et je voudrais d'abord faire voir que la conclusion fondamentale n'est pas altérée.

Dans le cas des groupes de la 2[de] catégorie, les V_{ij} ne dépendent que des v' et le coefficient de dv_j'' se réduit à zéro si j est différent de i, et à 1 si $j = i$.

Je puis donc écrire, si l'indice i correspond à un des v':

$$(3^{\text{bis}}) \qquad \sum_j W_{ij}' dw_j' = \sum_j V_{ij}' dv_j';$$

et si l'indice i correspond à un des v'':

$$(3^{\text{ter}}) \qquad dw_i'' + \sum_j W_{ij}'' dw_j' = dv_i'' + \sum_j V_{ij}'' dv_j'.$$

Dans l'un et l'autre cas on ne donne à l'indice j que les valeurs qui correspondent aux v'.

Cela posé, si e^V n'est pas une *transformation singulière* (c'est-à-dire si son adjointe ne satisfait pas aux conditions énoncées dans le § précédent pour définir ces substitutions singulières), les v' sont des fonctions holomorphes des w' (les u étant regardés comme constants). Si dans l'équation (3^{ter}) nous remplaçons les v' par leurs valeurs en fonctions des w', les V''_{ij} qui sont des fonctions entières des v' deviendront des fonctions holomorphes des w'; il en sera de même des $\frac{dv'_i}{dw'_j}$, de sorte que je puis écrire:

$$dv''_i = dw''_i + \sum_j H_{ij}\, dw'_j,$$

les H_{ij} étant des fonctions holomorphes des w'; on en conclut que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'' et des w'; et on verrait de même, si on faisait varier à la fois les u et les w, que les v'' sont des fonctions holomorphes des w'', des w', des u'' et des u'.

En résumé, si e^V n'est pas singulière, les v sont fonctions holomorphes des u et des w. C'était là notre conclusion fondamentale et elle subsiste; en revanche la formule (7) (Palerme, page 340) où figurent les fonctions entières Θ_i est inexacte.

§ 6.

Échange des déterminations.

Examinons maintenant de quelle manière se fait l'échange des diverses déterminations des fonctions v quand on tourne autour d'une transformation singulière de la 2[de] espèce. Ce qui caractérise ces transformations c'est, comme nous l'avons vu, que les v sont des fonctions indéterminées des u et des w, ou bien encore des fonctions indéterminées des coefficients l de l'adjointe.

Supposons, par exemple, que pour une transformation singulière quelconque, il y ait trois racines de l'équation de Killing différant entre elles de multiples de $2i\pi$, et deux autres racines différant entre elles de multiples de $2i\pi$. L'équation déterminante de l'adjointe aura donc une racine triple et une racine double (se comportant comme des racines simples, puisque la transformation est singulière de 2[de] espèce). Par un choix convenable des variables, cette adjointe peut donc être mise sous la forme:

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

tous les coefficients étant nuls sauf ceux de la diagonale principale, trois de ces derniers étant égaux à a et deux à b.

Soit e^V la transformation qui correspond à cette adjointe.

Reprenons la terminologie de la fin du § 1. Pour définir V il faut se donner d'abord les racines de l'équation de KILLING; ici, trois de ces racines sont égales à trois déterminations différentes de $\log a$; et deux, à deux déterminations différentes de $\log b$. Il faut se donner ensuite *les opérateurs conjugués du 1^er^ ordre* correspondant à ces diverses racines. Mais ici ces opérateurs ne sont pas entièrement déterminés; nous savons seulement que les trois premiers (correspondant à $\log a$) sont de la forme:

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3$$

et les deux suivants (correspondant a $\log b$) de la forme

$$t_4 X_4 + t_5 X_5 .$$

Les opérateurs conjugués n'étant pas entièrement déterminés, les v ne le sont pas davantage, ce sont des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe, et c'est pour cette raison (Palerme, page 338) que ce sont également des fonctions indéterminées des u et des w.

Une remarque avant d'aller plus loin; l'analyse précédente suppose que les racines de l'équation de KILLING sont simples ou se comportent comme des racines simples.

On verra plus loin comment l'analyse devrait être modifiée s'il n'en était pas ainsi.

Envisageons maintenant, non plus la transformation singulière elle-même, mais une transformation très peu différente. Dans ce cas l'indétermination disparait. Si donc e^{V_0} est une transformation singulière et A_0 son adjointe, A_0 ne suffira pas pour déterminer V_0; mais si e^V est une transformation non singulière ayant pour adjointe A, et nous faisons varier V et A en les faisant tendre vers les limites V_0 et A_0, V_0 sera déterminé quand on connaîtra la suite des valeurs de A et la façon dont A a tendu vers A_0.

Par exemple, dans le groupe des rotations toute rotation d'un angle 2π a pour adjointe la substitution identique; la connaissance de cette adjointe ne détermine donc pas la rotation, puisque nous ignorons la direction de l'axe de rotation; mais si nous savons de plus que cette rotation est la limite pour $\varepsilon = 0$ d'une rotation d'un angle $2\pi + \varepsilon$, la rotation sera déterminée puis qu'elle aura pour axe la limite vers laquelle tend l'axe de la rotation $2\pi + \varepsilon$.

Supposons que l'adjointe A_0 soit représentée par le tableau (1), une adjointe A infiniment peu différente s'obtiendra en combinant A_0 avec une substitution infinitésimale du groupe adjoint. Cette substitution infinitésimale correspondra à la transformation infinitésimale e^U du groupe paramétrique et s'écrira:

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} 1 + b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots \\ b_{21} & 1 + b_{22} & b_{23} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix},$$

les lettres b_{ik} ayant même signification qu'au § 1; mais les v doivent y être remplacées par les u (puisque notre transformation est désignée par e^U); on aura donc:

$$b_{ik} = \sum c_{sik} u_s$$

et les u seront des quantités très petites.

Alors A, qui correspond à la transformation $e^{V} = e^{V_0} e^{U}$ du groupe paramétrique, s'écrira:

$$
(3) \qquad \left|\begin{array}{cccc}
a + a b_{11} & a b_{12} & a b_{13} & \dots \\
a b_{21} & a + a b_{22} & a b_{23} & \dots \\
a b_{31} & a b_{32} & a + a b_{33} & \dots \\
b b_{41} & b b_{42} & b b_{43} & \dots \\
b b_{51} & b b_{52} & b b_{53} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}\right| .
$$

Il s'agit maintenant de former les opérateurs conjugués relatifs à cette nouvelle transformation. Formons pour cela l'équation déterminante en S, en ajoutant S à tous les termes de la diagonale principale du tableau (3) et égalant à zéro le déterminant ainsi obtenu. A chaque racine de cette équation en S, correspondra un opérateur conjugué $T = \sum t_i X_i$ défini par les équations suivantes:

$$
(4) \qquad \left\{\begin{array}{r}
(a + a b_{11} + S) t_1 + a b_{12} t_2 + a b_{13} t_3 + \dots = 0, \\
a b_{21} t_1 + (a + a b_{22} + S) t_2 + a b_{23} t_3 + \dots = 0, \\
a b_{31} t_1 + a b_{32} t_2 + (a + a b_{33} + S) t_3 + \dots = 0, \\
b b_{41} t_1 + b b_{42} t_2 + b b_{43} t_3 + (b + b b_{44} + S) t_4 + \dots = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}\right.
$$

Envisageons en particulier celles des racines de l'équation en S qui sont voisines de a et qui sont au nombre de 3; posons donc

$$S = - a - \sigma,$$

σ étant très petit. Considérons la 4^e^ équation (4); les b_{ik} étant très petits ainsi que σ, tous les coefficients de cette équation sont très petits, sauf celui de t_4 qui s'écrit:

$$b + b b_{44} - a - \sigma$$

et qui est très voisin de $b - a$; cette équation donne donc sensiblement:

$$t_4 = 0$$

et on trouverait de même:

$$0 = t_5 = t_6 = \cdots .$$

Dans ces conditions les trois premières équations (4) peuvent s'écrire (en divisant par a):

$$
(5) \qquad \left\{\begin{array}{l}
(b_{11} - \sigma) t_1 + b_{12} t_2 + b_{13} t_3 = 0, \\
b_{21} t_1 + (b_{22} - \sigma) t_2 + b_{23} t_3 = 0, \\
b_{31} t_1 + b_{32} t_2 + (b_{33} - \sigma) t_3 = 0,
\end{array}\right.
$$

ce qui détermine à la fois σ et T. Ainsi les opérateurs conjugués de V_0 et par conséquent V_0 lui-même se trouveront entièrement déterminés quand nous saurons que e^{V_0} est la limite de $e^{V} = e^{V_0} e^{U}$ et que nous donnons la transformation infinitésimale U. Si nous ne connaissions pas U, nous saurions seulement que les trois premiers de ces opérateurs conjugués sont de la forme

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3 .$$

Les indéterminées t_1, t_2, t_3, dépendent de U et nous voyons qu'ils dépendent seulement des b_{ik}, où les indices i et k prennent les valeurs 1, 2 et 3.

Si j'élimine les t entre les équations (5), j'obtiendrai une équation du 3^e degré en σ, présentant quelque analogie avec l'équation de KILLING. Si alors l'équation en S relative à A_0 admet h racines distinctes, a, b, etc., il y aura h équations en σ et le degré de chacune d'elles sera l'ordre de multiplicité de la racine correspondante; par exemple pour celle que nous venons de former, elle est du 3^e degré parce qu'elle correspond à la racine a qui est triple. D'autre part, les b_{ik} étant des fonctions linéaires des u, le 1^er membre de l'équation en σ sera un polynôme entier homogène par rapport à σ et aux u.

Nous pouvons maintenant répondre à la question: comment s'échangent entre elles les différentes déterminations quand on tourne autour d'une transformation singulière?

Soit

$$e^Z e^W = e^V$$

et regardons les v comme fonctions des z et des w; je suppose que pour $W = W_0$, on ait $V = V_0$ et que e^{V_0} soit une transformation singulière ayant pour adjointe A_0. Donnons à W des valeurs voisines de W_0, et pour cela faisons

$$e^W = e^{W_0} e^U, \qquad e^V = e^{V_0} e^U,$$

U étant infinitésimale. Nous nous demandons si les diverses déterminations de V s'échangent quand W tourne autour de W_0, c'est-à-dire quand U tourne autour de O. Ces déterminations s'échangeront si les opérateurs conjugués s'échangent.

Les seuls opérateurs conjugués qui puissent s'échanger entre eux sont ceux qui correspondent à des racines égales de l'équation en S de A_0, c'est-à-dire ceux qui correspondent à une même équation en σ. Tout revient donc à savoir si deux racines d'une des équations en σ s'échangent quand on fait varier les u; c'est ce qui arrivera certainement si cette équation est irréductible.

Reprenons le groupe des rotations et envisageons une rotation d'un angle π; les racines de l'équation de KILLING sont $i\pi$, 0 et $-i\pi$. Deux d'entre elles diffèrent de $2i\pi$; on pourrait donc croire que la transformation est singulière. Ici l'équation en S de A_0 a deux racines égales à -1 et une à $+1$. Le tableau des b_{ik} s'écrit:

$$\begin{vmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{vmatrix};$$

l'adjointe A_0 s'écrit:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{vmatrix};$$

celui des coefficients des équations (4):

$$\begin{vmatrix} -1+S & u_3 & -u_2 \\ -u_3 & -1+S & u_1 \\ -u_2 & u_1 & -1+S \end{vmatrix}.$$

On obtient deux équations en σ, l'une en faisant $S = +1 - \sigma$, correspondant à la racine double -1, l'autre en faisant $S = -1 - \sigma$, correspondant à la racine simple $+1$; la seconde de ces équations est tout simplement $-\sigma = 0$; et la première est

$$\begin{vmatrix} -\sigma & u_3 \\ -u_3 & -\sigma \end{vmatrix} = (\sigma^2 + u_3^2) = 0.$$

Comme le 1^er membre se décompose en deux facteurs linéaires $\sigma \pm i u_3$, il ne peut pas y avoir d'échange entre les racines, et la transformation n'est pas effectivement singulière. Si nous prenons au contraire une rotation d'un angle 2π, il y a une racine triple égale à 1, et une seule équation en σ qui s'écrit:

$$\sigma(\sigma^2 + u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0.$$

Les deux racines $\pm i\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$ pouvant s'échanger, la transformation est effectivement singulière.

Supposons que l'équation déterminante en S ait une racine double égale à 1, correspondant à deux racines de l'équation de Killing, l'une nulle, et l'autre différente de zéro, égale par exemple à $2i\pi$; il ne peut y avoir d'échange entre ces deux racines, de sorte que la transformation ne sera pas effectivement singulière. Pour qu'une transformation soit singulière, il faut donc non-seulement que deux des racines de Killing diffèrent d'un multiple de $2i\pi$, mais que ces deux racines soient toutes deux différentes de zéro; il ne suffit donc pas qu'une racine de Killing devienne égale à un multiple de $2i\pi$, auquel cas, comme il y a toujours au moins une racine nulle, on pourrait dire que la différence de deux racines est multiple de $2i\pi$.

Soit A_0 une adjointe, correspondant à une transformation singulière, celle du tableau (1) par exemple

$$e^{V_0}, \quad e^{V'_0}, \quad e^{V''_0}, \ldots,$$

différentes transformations admettant cette même adjointe; on peut en trouver une infinité puisque les v sont des fonctions indéterminées. Je dis que les puissances de ces diverses transformations appartiennent toutes à un même sous-groupe que nous allons étudier. Soient

$$B, \quad B', \quad B'', \ldots$$

les adjointes de

$$e^{\alpha V_0}, \quad e^{\alpha' V'_0}, \quad e^{\alpha'' V''_0}, \ldots,$$

où α, α', α'' sont des nombres quelconques.

Il est clair que toutes ces adjointes jouiront d'une propriété commune; celle de transformer tout opérateur de la forme:

$$t_1 X_1 + t_2 X_2 + t_3 X_3, \qquad \text{ou} \qquad t_4 X_4 + t_5 X_5,$$

par exemple, en un opérateur de la même forme, et que cette propriété commune définit un sous-groupe dans le groupe adjoint, et un sous groupe correspondant (que j'appellerai Γ) dans le groupe paramétrique.

Reprenons la transformation infinitésimale e^U, dont nous avons parlé plus haut, et son adjointe; supposons qu'elle appartienne au sous-groupe Γ. Dans ce cas tous les b_{ik} sont nuls, à moins que les indices i et k ne soient égaux tous deux à 1, 2, ou à 3, ou bien tous deux à 4 ou à 5, ..., ou plus généralement ne correspondent à deux racines égales de l'équation déterminante en S, c'est-à-dire à deux termes égaux de la diagonale principale du tableau (1).

Si nous formons ensuite l'équation de KILLING relative à cette transformation e^U, je vois qu'elle se décompose en autant de facteurs qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S; quelle relation y a-t-il entre ces différents facteurs et les différentes équations en σ que nous venons de former? C'est ce que nous expliquerons plus loin, dans un cas plus général, au § 8.

Si nous revenons encore au groupe des rotations: pour une rotation d'un angle 2π, toutes les racines de l'équation en S sont égales à 1, et le sous groupe Γ ne diffère pas du groupe total; pour une rotation d'un angle π, deux racines seulement sont égales entre elles et égales à -1; le sous groupe Γ comprend toutes les rotations possibles autour d'un axe déterminé, l'axe des z par exemple; dans le 1^er^ cas, l'équation de KILLING du sous-groupe Γ est la même que pour le groupe total:

$$\xi(\xi^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) = 0$$

et elle n'est pas décomposable en facteurs linéaires: la transformation est effectivement singulière; dans le 2^d^ cas, cette équation se réduit à

$$\xi(\xi^2 + v_3^2) = 0$$

et elle est décomposable en facteurs linéaires: la transformation n'est pas effectivement singulière.

Remarquons maintenant qu'il peut très bien se faire qu'une transformation ne soit pas *effectivement singulière,* c'est-à-dire qu'il n'y ait pas échange entre les valeurs des v quand on fait décrire aux u et aux w des contours fermés infiniment petits, et que cependant elle soit *quasi-singulière*, je veux dire que les v soient des *fonctions indéterminées* des u et des w; ou, ce qui revient au même, soient des fonctions indéterminées des coefficients de l'adjointe. On peut en citer un exemple simple; considérons le groupe des transformations

$$(x,\ ax + b);$$

il dérive des deux transformations infinitésimales

$$[x,\ (1 + \varepsilon)x], \qquad (x,\ x + \varepsilon)$$

que j'appellerai X_1 et X_2. Alors, si on pose

$$(x,\ ax + b) = e^V, \qquad V = v_1 X_1 + v_2 X_2,$$

on a

$$a = e^{v_1}, \qquad b = (e^{v_1} - 1)\frac{v_2}{v_1},$$

d'où:

$$v_1 = u_1 + w_1, \qquad \frac{v_2}{v_1}(e^{v_1} - 1) = (e^{v_1} - e^{w_1})\frac{u_2}{u_1} + (e^{w_1} - 1)\frac{w_2}{w_1}.$$

Cette formule nous montre que les v sont des fonctions uniformes des u et des

w, mais en même temps que ces fonctions peuvent devenir indéterminées; c'est ce qui arrive quand v_1 et w_1 sont multiples de $2i\pi$.

Nous avons dit plus haut que si une racine de KILLING était nulle et une autre multiple de $2i\pi$, sans que la différence de deux racines distinctes l'une et l'autre de zéro devînt égale à un multiple de $2i\pi$, cela ne suffisait pas pour que la transformation pût être effectivement singulière; mais en revanche elle peut être quasi-singulière, l'exemple précédent le prouve suffisamment.

Enfin, il peut arriver que la différence de deux racines de KILLING soit multiple de $2i\pi$, sans que la transformation soit singulière, ni quasi-singulière; c'est ce que prouve l'exemple ci-dessus des rotations de 180°.

Reprenons le groupe paramétrique donné G; son groupe adjoint G_α; le sous groupe Γ défini plus haut et contenu dans G; et le sous groupe Γ_α qui lui correspond dans G_α. Les substitutions de Γ_α sont linéaires; de plus, si le groupe G est d'ordre r, il y a r variables, mais ces variables se répartissent en autant de systèmes qu'il y a de racines distinctes dans l'équation déterminante en S. Chaque substitution linéaire de Γ_α résulte de la combinaison de substitutions linéaires partielles, chacune de ces substitutions linéaires partielles portant sur les variables d'un seul système. C'est là, on s'en souvient, la définition même de Γ. Ainsi, si l'on se reporte au tableau (1), chaque substitution de Γ_α se décompose: 1° en une substitution linéaire portant seulement sur v_1, v_2, v_3; 2° en une substitution linéaire portant seulement sur v_4, v_5, etc. Alors les substitutions linéaires partielles portant seulement sur v_1, v_2, v_3, par exemple, formeront un groupe que j'appellerai H_α; ce groupe sera isomorphe à Γ_α, mais l'isomorphisme pourra dans certains cas être mériédrique. Si nous formons le groupe adjoint de H_α, de façon à calculer les racines de l'équation de KILLING relative au groupe H_α, nous arriverons au résultat suivant: Considérons le déterminant des coefficients d'une substitution linéaire infinitésimale de H_α; égalons ce déterminant à zéro aprés avoir ajouté $-(1+\sigma)$ aux termes de la diagonale principale, nous obtiendrons une certaine équation en σ. Nous distinguerons ainsi 3 équations, à savoir: l'équation (a), c'est-à-dire l'équation de KILLING relative au groupe G; l'équation (b), c'est-à-dire l'équation de KILLING relative au groupe H_α; et enfin l'équation en σ, que nous appellerons (c). Nous formerons ces équations pour une transformation quelconque de G et pour la substitution correspondante de H_α.

Nous trouverons alors que les racines de (c) sont quelques-unes des racines de (a) (à savoir celles qui deviennent égales entre elles et à a pour la transformation singulière qui nous a servi de point de départ); chaque racine de (b) est égale à la différence de deux racines de (c) [deux racines de (c) n'étant pas nécessairement distinctes, une des racines de (b) est toujours nulle]. Or pour notre transformation singulière, les racines de (c) deviennent égales entre elles à des multiples près de $2i\pi$; donc toutes les racines de (b) sont égales à des multiples de $2i\pi$, de sorte que la transformation correspondante de H_α est spéciale.

Les transformations singulières de G correspondent donc aux transformations spéciales de H_α.

Reprenons: notre transformation singulière e^{V_0}, son adjointe A_0, les autres transformations singulières $e^{V'_0}$, qui ont même adjointe et qui appartiennent comme e^{V_0} au sous-groupe Γ, la transformation infinitésimale e^U, la transformation finie $e^V = e^{V_0} e^U$, qui a pour adjointe A et qui tend vers $e^{V''_0}$ quand U tend vers zéro. Nous avons vu plus haut comment on forme les opérateurs conjugués de V''_0 en formant les tableaux (2) et (3) et les équations (4) et (5). Dans le cas où e^U appartient au sous-groupe Γ (c'est-à-dire où $b_{ik} = 0$, à moins que les deux indices i et k ne se rapportent à des variables d'un même système), le résultat peut s'énoncer comme il suit: *les opérateurs conjugués de V''_0 sont les mêmes que ceux de U.* Il en résulte que V''_0 et U sont permutables.

Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_0, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^U (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ.

Si, en particulier, toutes les racines de l'équation déterminante en S sont égales: l'adjointe A_0 se réduit à la substitution identique; la transformation singulière e^{V_0} devient une transformation spéciale; le sous-groupe Γ n'est autre chose que le groupe G lui même. Donc, *si un groupe G contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.*

Ou bien considérons un groupe G; prenons dans ce groupe deux transformations e^{T_1} et e^{T_2}, la seconde tout à fait quelconque, la première assujettie à la condition unique que ses racines de KILLING se comportent comme des racines simples et que le rapport de deux quelconques d'entre elles soit commensurable; alors il y aura toujours dans le groupe une transformation permutable à e^{T_2} et ayant mêmes racines de KILLING que e^{T_1}; et en effet une des puissances de e^{T_1} est une transformation spéciale ou quasi spéciale.

§ 7.

Discussion des équations différentielles.

Dans le § précédent, nous avons étudié la façon dont se comportent les fonctions v dans le voisinage d'une transformation singulière, au moins dans le cas où toutes les racines de KILLING se comportent comme des racines simples; pour cela nous nous sommes servis des équations finies du groupe; il conviendrait de reprendre cette étude en se servant des équations différentielles. Nous nous rappelons quelle est la forme de ces équations; si T étant infinitésimal on a:

$$e^V e^T = e^{V+dV},$$

on peut exprimer $\dfrac{dv_i}{dt_k}$ en fonction des v et on trouve:

$$\frac{dv_i}{dt_k} = A_i + \sum B_i \frac{1}{(1 - e^{-\omega_h})^m}. \tag{1}$$

Les A et les B sont des fonctions algébriques des v; de plus ω_h est l'une des racines de KILLING et m est un entier positif qui sera égal à 1, si, comme nous le supposons, toutes les racines de KILLING se comportent comme des racines simples.

Les seconds membres ne peuvent devenir infinis que si ω_h est un multiple de $2i\pi$.

Donc, *une transformation ne peut devenir singulière que si une des racines de* KILLING *est multiple de* $2i\pi$. Ainsi, pour une rotation de 180° les trois racines de KILLING sont

$$-i\pi, \qquad 0, \qquad i\pi;$$

la différence de deux entre elles est $2i\pi$ (ce qui est la condition que nous avions envisagée jusqu'ici), mais aucune d'elles n'est multiple de $2i\pi$, et c'est pour cette raison qu'elle n'est pas effectivement singulière.

Soit φ une fonction algébrique quelconque des v; on aura évidemment

$$\frac{d\varphi}{dt} = A' + \sum B' \frac{1}{(1-e^{-\omega_h})^m}, \tag{2}$$

où

$$A' = A_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + A_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \cdots + A_r \frac{d\varphi}{dv_r},$$
$$B' = B_1 \frac{d\varphi}{dv_1} + B_2 \frac{d\varphi}{dv_2} + \cdots + B_r \frac{d\varphi}{dv_r}$$

sont des fonctions algébriques des v. De plus, si φ et ses dérivées restent finies, les seconds membres ne pourront devenir infinis que pour $e^{-\omega_h} = 1$.

Si cette condition est remplie, ou près de l'être, on se trouve dans le voisinage d'une transformation singulière ou quasi-singulière. Supposons donc que $1 - e^{-\omega_h}$ soit une quantité très petite de l'ordre de ε et qu'il en soit de même de t_k; on aura alors sensiblement (m étant égal à 1):

$$d\varphi = B' \frac{t_k}{1-e^{-\omega_h}},$$

de sorte que $d\varphi$ sera fini, à moins que B' ne soit nul.

Les deux transformations e^V et e^{V+dV} différeront donc d'une quantité finie.

Cela tient à ce qu'elles sont infiniment voisines de deux transformations singulières e^{V_0} et $e^{V'_0}$; mais *ces deux transformations doivent avoir même adjointe.*

Si donc φ est un des coefficients de l'adjointe, ou une fonction bien déterminée des coefficients de l'adjointe, $d\varphi$ devra être infiniment petit, c'est-à-dire que B' devra être nul.

Supposons par exemple que ω soit une des racines de l'équation de KILLING.

Si l'adjointe subit une variation infiniment petite, les racines de son équation en S, qui sont e^ω, subiront des variations infiniment petites et il sera donc de même de ω. Si donc on prend $\varphi = \omega$, on devra avoir $B' = 0$. On a donc:

$$B_1 \frac{d\omega}{dv_1} + B_2 \frac{d\omega}{dv_2} + \cdots + B_r \frac{d\omega}{dv_r} = 0. \tag{3}$$

Cette relation n'est ainsi établie que pour $\omega_h = 2ki\pi$; mais comme les B et ω sont des fonctions homogènes des v, elle devra subsister pour toutes les valeurs de ω_h.

Pour étudier cette relation cherchons à nous rendre compte de ce que c'est que les

B_i. On a, par la formule (2) (Palerme, page 331; voir aussi plus haut):

$$dv_i = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int d\xi \frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} \sum \frac{t_j P_{ij}}{F(\xi)}.$$

Si nous envisageons une racine simple ω_h de l'équation de KILLING $F(\xi) = 0$, cette racine nous donnera dans le second membre un terme:

$$\frac{\omega_h}{1 - e^{-\omega_h}} \sum \frac{t_j P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)}.$$

Si ce terme était le seul qui devienne infini quand $e^{-\omega_h} - 1$ s'annule, les quantités B_i seraient simplement proportionnelles à $P_{ij}(\omega_h)$ et nous pourrions écrire:

$$P_{1j}(\omega_h)\frac{d\omega}{dv_1} + \cdots + P_{rj}(\omega_h)\frac{d\omega}{dv_r} = 0. \tag{4}$$

Mais il peut arriver que d'autres racines de KILLING deviennent multiples de $2i\pi$ toutes les fois que ω_h est lui-même multiple de $2i\pi$, par exemple s'il y a une racine qui est toujours multiple de ω_h, et par exemple égale à $-\omega_h$.

Si nous avons deux racines égales et de signe contraire ω_h et $-\omega_h$, nous avons à envisager les deux termes:

$$\frac{\omega_h}{1 - e^{-\omega_h}} \sum \frac{t_j P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)} - \frac{\omega_h}{1 - e^{\omega_h}} \sum \frac{t_j P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)},$$

d'où:

$$B_i = \omega_h \left[\frac{P_{ij}(\omega_h)}{F'(\omega_h)} + \frac{P_{ij}(-\omega_h)}{F'(-\omega_h)}\right].$$

On pourrait alors se demander si la relation (4) va subsister; pour s'en rendre compte, il faut examiner ce que représentent les quantités $P_{ij}(\omega_h)$; si les racines de KILLING se comportent comme des racines simples, il existe r opérateurs (dits conjugués du 1^er^ ordre)

$$U^{(h)} = \sum u_i^h X_i \qquad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

tels que

$$(V U^{(h)}) = \omega_h U^{(h)}$$

ou

$$\sum\nolimits_i b_{ik} u_i^h = \omega_h u_k^h. \tag{5}$$

Si nous formons le déterminant Δ des r^2 coefficients u_i^h, ce déterminant ne sera pas nul et nous envisagerons les mineurs

$$\tau_i^h = \frac{\partial \Delta}{\partial u_i^h}.$$

Nous pourrons même, sans restreindre la généralité, supposer $\Delta = 1$, puisque les coefficients u ne sont déterminés que par leurs rapports.

Cela posé, cherchons à déterminer deux opérateurs Y et Z satisfaisant à l'identité

$$(VY) = \xi Y + Z, \tag{6}$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$y_i F(\xi) = \sum P_{ij} z_j. \tag{7}$$

Supposons que l'on ait

$$Y = \lambda U^{(h)} + \varepsilon W, \qquad \xi = \omega_h + \varepsilon, \qquad Z = \varepsilon Z',$$

ε étant un coefficient constant très petit; nous aurons sensiblement, en supposant ω_h racine simple:

$$y_i F'(\omega_h) = \sum z'_j P_{ij}(\omega_h).$$

On voit ainsi que λ doit être une fonction linéaire des z'_i:

$$\lambda = \sum \lambda_j z'_j$$

et il vient (en faisant tendre ε vers zéro):

$$P_{ij}(\omega_h) = F'(\omega_h)\lambda_j u_i^h.$$

Il reste à déterminer λ; pour cela nous avons la relation

$$(6^{\text{bis}}) \qquad (VW) = \omega_h W + \lambda U^{(h)} + Z',$$

qui se déduit de l'identité (6) en négligeant les puissances supérieures de ε.

Supposons que tous les z'_i soient nuls sauf z'_j, et que $z'_j = 1$; de sorte que

$$Z' = X_j, \qquad \lambda = \lambda_j.$$

Soit ensuite:

$$W = \sum_k \mu_k U^{(k)}.$$

Remarquons que la résolution des équations linéaires

$$U^{(h)} = \sum u_i^h X_i$$

va nous donner:

$$X_i = \sum \tau_i^h U^{(h)},$$

de sorte que

$$Z' = X_j = \sum \tau_i^k U^{(k)}.$$

Si donc nous remplaçons dans (6^{bis}) W et Z' par leurs valeurs, il vient:

$$\sum \omega_k \mu_k U^{(k)} = \omega_h \sum \mu_k U^{(k)} + \lambda_j U^{(h)} + \sum \tau_j^k U^{(k)},$$

ou, en égalant le coefficient de $U^{(h)}$,

$$0 = \lambda_j + \tau_j^h,$$

d'où:

$$P_{ij}(\omega_h) = -F'(\omega_h)\tau_j^h u_i^h$$

et

$$B_i = -\omega_h(\tau_j^h u_i^h - \tau_j^{h'} u_i^{h'}),$$

l'indice h' étant celui qui correspond à la racine $-\omega_h$. Notre relation (3) (qui doit avoir lieu quelque soit j) devient alors:

$$-\omega_h \tau_j^h \sum u_i^h \frac{d\omega}{dv_i} + \omega_h \tau_j^{h'} \sum u_i^{h'} \frac{d\omega}{dv_i} = 0.$$

Mais les coefficients τ_j^h ne sont pas proportionnels aux coefficients $\tau_j^{h'}$; sans quoi le déterminant Δ serait nul. On aura donc séparément

$$\sum u_i^h \frac{d\omega}{dv_i} = \sum u_i^{h'} \frac{d\omega}{dv_i} = 0,$$

c'est-à-dire que la relation (4) sera vraie séparément pour la racine ω_h et pour la racine $-\omega_h$, puisque les $P_{ij}(\omega_h)$ sont entre eux comme les u_i^h et que les $P_{ij}(-\omega_h)$ sont entre eux comme les $u_i^{h\prime}$.

Il est aisé de démontrer la relation (4) dans des cas plus compliqués. Si par exemple on avait à la fois les racines $\pm\alpha$ et $\pm 2\alpha$, on commencerait par donner aux v des valeurs telles que 2α soit multiple *impair* de $2i\pi$; alors les racines $\pm\alpha$ n'interviendraient pas et l'on démontrerait comme plus haut les relations (4) pour $\omega_h = 2\alpha$ et pour $\omega_h = -2\alpha$. Cela fait, on donnerait aux v des valeurs telles que α soit multiple de $2i\pi$ et on démontrerait ensuite aisément les équations (4) pour $\omega_h = \pm\alpha$. On pourrait aussi faire directement la démonstration, par un procédé tout semblable à celui qui précède (B_i étant une combinaison de quatre termes de la forme $\tau_j^h u_i^h$ au lieu de deux seulement).

La relation (4) est donc générale; elle a lieu quelles que soient les racines ω et ω_h, que ces racines soient identiques ou distinctes (le cas de $\omega_h = 0$ devant être exclus). Revenons maintenant aux équations (1), où nous supposons toujours $m = 1$.

Donnons aux v des valeurs qui rendent une racine multiple de $2i\pi$; généralement d'autres racines deviendront en même temps multiples de $2i\pi$. Soit:

$$\omega_h = m_h \alpha$$

ces racines, où m_h est un entier positif ou négatif et α la commune mesure de toutes ces racines, laquelle doit être elle-même un multiple de $2i\pi$; nous continuerons à désigner ces racines par ω_h, et nous désignerons par ω_λ les racines qui ne deviennent pas multiples de $2i\pi$.

Si α est très voisin d'un multiple de $2i\pi$, les termes qui contiennent au dénominateur une expression de la forme $1-e^{-\omega_h}$ seront seuls sensibles; si l'on a $e^\alpha = 1+\varepsilon$, on aura très sensiblement

$$1 - e^{-\omega_h} = m_h \varepsilon$$

et les équations (1) se réduiront sensiblement à

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\sum \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_h \varepsilon},$$

ou, en posant $dt_k = \varepsilon\, ds_k$:

$$\frac{dv_i}{ds_k} = -\sum \omega_h \frac{\tau_k^h u_i^h}{m_h}. \tag{8}$$

Les τ et les u peuvent être regardés comme des fonctions algébriques des v, de sorte que ces équations (8) nous représentent des équations différentielles auxquelles doivent satisfaire les v. Quelle est la signification de ces équations différentielles?

On voit que, si ds_k est un infiniment petit de l'ordre de ζ, et par conséquent dt_k un infiniment petit de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, dv sera un infiniment petit de l'ordre de ζ; de sorte que les deux transformations e^V et e^{V+dV} différeront d'infiniment petits de l'ordre de ζ, tandis que leurs *adjointes* différeront d'infiniment petits de l'ordre de $\varepsilon\zeta$, *c'est-à-dire d'ordre supérieur.*

Donc, quand les v varieront de façon à satisfaire aux équations différentielles (8), l'adjointe de e^V ne variera pas. Si donc nous considérons les différentes transformations singulières qui ont même adjointe, les équations différentielles (8) nous feront passer des unes aux autres d'une façon continue.

Prenons encore un instant pour exemple le groupe des rotations, et soit

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta,$$

α, β, γ étant les cosinus directeurs de l'axe de rotation et 2θ l'angle de rotation; on aura pour les équations (8):

$$\begin{array}{lll} \dfrac{dv_1}{ds_1} = \beta^2 + \gamma^2, & \dfrac{dv_2}{ds_1} = -\alpha\beta, & \dfrac{dv_3}{ds_1} = -\alpha\gamma, \\ \dfrac{dv_1}{ds_2} = -\alpha\beta, & \dfrac{dv_2}{ds_2} = \alpha^2 + \gamma^2, & \dfrac{dv_3}{ds_2} = -\beta\gamma, \\ \dfrac{dv_1}{ds_3} = -\alpha\gamma, & \dfrac{dv_2}{ds_3} = -\beta\gamma, & \dfrac{dv_3}{ds_3} = \alpha^2 + \beta^2 \end{array}$$

et on verra que

$$v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3 = 0,$$

d'où $\theta = \text{const}$. Le point représentatif restera constamment sur une sphère (dont le rayon devra être multiple de $i\pi$) et aux différents points de cette sphère correspondront diverses transformations qui auront même adjointe et qui seront d'ailleurs spéciales.

Appelons V_{ik} le second membre de (8); l'équation (8) définit une transformation infinitésimale S_k qui change v_i en $v_i + ds_k V_{ik}$; et dépendant de l'opérateur

$$S_k = \sum V_{ik} \frac{df}{dv_i}.$$

Il importe de remarquer que les opérateurs S_k ne forment pas un groupe de Lie, comme on pourrait le croire, mais les opérateurs

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v forment un groupe continu *d'ordre infini*.

La condition pour qu'il en soit ainsi, c'est que l'on ait

$$(9) \qquad (S_j S_k) = \sum \Phi_{jks} S_s,$$

les Φ_{jks} étant des fonctions des v. Pour le montrer, considérons un opérateur T_k du groupe G; on obtiendra l'opérateur correspondant S_k en multipliant T_k par

$$\varepsilon = e^\alpha - 1$$

et faisant tendre ensuite les v vers des limites telles que ε tende vers zéro. On a alors:

$$(10) \qquad \begin{cases} (T_j T_k) = \sum c_{jks} T_s, \\ (S_j S_k) = (\varepsilon T_j, \varepsilon T_k) = \varepsilon^2 (T_j T_k) + \varepsilon T_j(\varepsilon T_k) - \varepsilon T_k(\varepsilon T_j). \end{cases}$$

Or le crochet (εT_k) est une fonction des v et si, par exemple,

$$T_k = \sum \lambda_i \frac{df}{dv_i},$$

on aura

$$(\varepsilon T_k) = \sum \lambda_i \frac{d\varepsilon}{dv_i};$$

le crochet (εT_k) se présente comme une simple fonction des v, où ne figurent pas les dérivées $\frac{df}{dv}$. La relation (10) est donc bien de la forme (9) en prenant:

$$\Phi_{jks} = \varepsilon c_{jks} \qquad (s \gtrless j,\ s \gtrless k),$$
$$\Phi_{jkj} = \varepsilon c_{jkj} + (\varepsilon T_k), \qquad \Phi_{jkk} = \varepsilon c_{jkk} - (\varepsilon T_j) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce résultat établi, voyons quelles en sont les conséquences. Dans l'espace à r dimensions, considérons un point $v_1, v_2, \ldots, v_r$, tel que α soit multiple de $2i\pi$; je l'appelle M_0. Prenons ensuite l'équation (8) pour chaque valeur de k, elle définira une famille de courbes, telles qu'il en passe une par chaque point de l'espace à r dimensions. Nous aurons donc r familles de courbes

$$F_1, F_2, \ldots, F_r$$

correspondant aux valeurs

$$k = 1, \quad k = 2, \ldots, k = r.$$

Par M_0 je fais passer une courbe C_1 de la famille F_1; par chacun des points de C_1 je fais passer une courbe de la famille F_2; l'ensemble de ces courbes engendrera une surface C_2, par les divers points de cette surface C_2 je fais passer des courbes de la famille F_3 qui vont engendrer une variété C_3 à 2 ou 3 dimensions; et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'enfin par les divers points de la variété C_{r-1} je fasse passer des courbes de la famille F_r qui engendreront la variété C_r qui aura toujours moins de r dimensions.

Comme les opérateurs ΦS_k forment un groupe, cette variété C_r sera inaltérée par les transformations S_k, ce sera un invariant pour les équations (8); elle représente donc le lieu des points $v_1, v_2, \ldots, v_r$ qui correspondent aux diverses transformations singulières admettant une même adjointe.

Or le déterminant des τ_k^h n'étant pas nul, nous pouvons déduire des équations (8) certaines relations linéaires entre les dv_i relations qui peuvent s'écrire:

$$(11) \qquad \begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \ldots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_r^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ u_1^p & u_2^p & \ldots & u_r^p \end{vmatrix} = 0;$$

les quantités

$$u_i^1, \quad u_i^2, \ldots, u_i^p$$

correspondent aux p racines ω_h

$$\omega_1, \quad \omega_2, \ldots, \omega_p,$$

qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$.

Le tableau (11) a plus de colonnes que de lignes, et il faut entendre que tous les déterminants obtenus en supprimant un nombre convenable de colonnes dans le tableau (11) doivent être nuls à la fois. Cette équation (11) définit le plan tangent à la variété C_r, et ce « plan tangent » est une variété plane ayant autant de dimensions que C_r; or il en a p.

Donc le nombre des dimensions de C_r est égal au nombre p des racines qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$; et les transformations singulières qui admettent cette même adjointe sont au nombre de ∞^p. Si une seule racine devient multiple de $2i\pi$, la variété C_r se réduit à une simple courbe.

Au sous-groupe Γ du § précédent correspond dans l'espace à r dimensions une variété plane passant par l'origine et qui doit contenir la variété C_r.

Jusqu'ici nous avons supposé que les v n'étaient assujettis qu'à une seule condition; de telle façon que, seules deviennent multiples de $2i\pi$ diverses racines dont le rapport est constant et commensurable, à savoir celles qui sont égales à une certaine fonction des v, que nous avons appelée α, multipliée par l'entier m_h.

Considérons maintenant les racines qui sont de la forme:

$$\omega_h = m_h\alpha + n_h\beta.$$

α et β sont deux fonctions déterminées des v; m_h et n_h indépendantes l'une de l'autre sont des entiers; nous appellerons ω_λ les racines qui ne sont pas de cette forme. Si nous donnons aux v des valeurs telles que α et β soient multiples de $2i\pi$, il en sera de même de toutes les racines ω_h et nous obtiendrons une nouvelle catégorie de transformations singulières. Soit

$$e^\alpha = 1 + \varepsilon, \qquad e^\beta = 1 + \zeta;$$

ε et ζ étant très petits, les équations (1) se réduiront sensiblement à:

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\sum \frac{\omega_h \tau_k^h u_i^h}{m_h\varepsilon + n_h\zeta}, \tag{12}$$

ou bien

$$\frac{dv_i}{dt_k} = -\sum \frac{\omega_h \tau_k^h}{m_h\varepsilon + n_h\zeta}\frac{dv_i}{ds_h}$$

avec

$$\frac{dv_i}{ds_h} = u_i^h. \tag{8bis}$$

On aurait ainsi défini l'opérateur

$$S_h = \sum u_i^h \frac{df}{dv_i}$$

qui correspondrait à une transformation infinitésimale changeant v_i en $v_i + u_i^h ds_h$. Ici encore les opérateurs S_h ne forment pas un groupe, mais les opérateurs ΦS_h, où Φ est une fonction arbitraire des v, forment un groupe continu d'ordre infini; nous trouvons en effet, en résolvant les équations (1) par rapport aux u_i^h et aux u_i^λ:

$$u_i^h = (1 - e^{-\omega_h})\sum A_{k.h}\frac{dv_i}{dt_k},$$

les $A_{k.h}$ étant des fonctions des v dépendant des indices k et h, mais indépendantes de l'indice i, ou bien encore:

$$S_h = (1 - e^{-\omega_h})\sum A_{k.h}\, T_k.$$

En se servant de cette formule [par un raisonnement analogue à celui qui précède et où intervenaient les équations (9) et (10)], on établirait que les ΦS_h forment un groupe et on en conclurait que les équations analogues aux équations (11):

$$(11^{\text{bis}})\qquad \begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \dots & dv_r \\ u_1^h & u_2^h & \dots & u_r^h \end{vmatrix} = 0,$$

où h prend p valeurs distinctes s'il y a p racines qui deviennent multiples de $2i\pi$, où par conséquent le premier membre est un tableau à r colonnes et $p+1$ lignes, on en conclurait, dis-je, que ces équations définissent une variété qui n'est autre que C_r et qui a précisément p dimensions. Ce seraient donc les mêmes résultats que dans le cas simple examiné d'abord.

Considérons par exemple le groupe linéaire fractionnaire à deux variables:

$$\left[x, y; \frac{ax+by+c}{a''x+b''y+c''}, \frac{a'x+b'y+c'}{a''x+b''y+c''}\right].$$

Il est d'ordre 8. Si α, β, γ sont les trois racines de l'équation:

$$\begin{vmatrix} a-S & b & c \\ a' & b''-S & c' \\ a'' & b'' & c''-S \end{vmatrix} = 0,$$

les 8 racines de KILLING sont:

$$0, \quad 0, \quad \alpha-\beta, \quad \alpha-\gamma, \quad \beta-\alpha, \quad \beta-\gamma, \quad \gamma-\alpha, \quad \gamma-\beta.$$

Si l'on a:

$$\alpha \equiv \beta$$

(je veux dire par là que α est égal à β plus un multiple de $2i\pi$), on aura:

$$\alpha-\beta \equiv \beta-\alpha \equiv 0$$

et on aura une première famille de transformations singulières, la variété C_r étant à 2 dimensions. Si l'on a

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma,$$

toutes les racines non nulles sont multiples de $2i\pi$ et on a une 2[de] famille de transformations singulières, d'ailleurs spéciales, pour lesquelles la variété C_r est à 6 dimensions.

§ 8.

Cas des racines multiples.

Dans les deux § précédents, nous avons toujours supposé que les racines de KILLING se comportaient comme des racines simples; qu'y aurait-il à changer s'il n'en était pas ainsi? L'adjointe A_0 ne pourrait plus en général être ramenée par un choix convenable des variables à la forme du tableau (1) du § 6. Elle peut toutefois être ramenée à une autre forme canonique.

Considérons le groupe des substitutions linéaires permutables à A_0.

Le groupe commun à ce groupe et au groupe adjoint, s'appellera Γ_α; de sorte que les substitutions de Γ_α feront partie du groupe adjoint et seront permutables à A_0

(qui est par définition l'adjointe de e^{V_0}, $e^{V'_0}$ ...), mais pourront ne pas l'être aux adjointes de $e^{\alpha V_0}$, $e^{\beta V'_0}$, ... Le groupe paramétrique G étant isomorphe à son groupe adjoint, au sous-groupe Γ_α du groupe adjoint correspondra dans le groupe G un sous-groupe que j'appelle Γ.

Il est clair alors que $e^{\alpha V_0}$, $e^{\beta V'_0}$, ... feront partie de Γ, de sorte que ce sous-groupe joue bien le même rôle que le groupe du même nom dans le § 6.

Soit alors e^U une transformation infinitésimale quelconque du groupe G; posons

$$e^V = e^{V_0} e^U;$$

e^V aura une adjointe A très peu différente de A_0; quand U tendra vers zéro, V tendra vers un certain opérateur V'_0, et A vers A_0, de sorte que la transformation limite $e^{V'_0}$ aura pour adjointe A_0.

Quand on connaît la façon dont U tend vers zéro, les opérateurs conjugués de V'_0 se trouvent entièrement déterminés, et il en est de même de V'_0 lui-même: Cela se verrait par une analyse toute pareille à celle du § 6. Si en particulier e^U fait partie de Γ, le résultat s'énonce très simplement; les opérateurs conjugués de V, et à la limite ceux de V'_0, sont les mêmes que ceux de U. En effet, si e^U fait partie de Γ, son adjointe B est permutable à A_0; je dis à A_0 et non à l'adjointe de $e^{\alpha V_0}$.

Cela veut dire que les deux substitutions linéaires A_0 et B (à r variables) admettent des *séries régulières communes* comprenant ensemble r combinaisons linéaires (indépendantes entre elles) des variables. Et cela *au moins* d'une manière (Cfr. § 1 in fine). Ces séries appartiendront également à leur résultante

$$A = A_0 B.$$

Elles nous donneront donc les opérateurs conjugués de e^V qui seront les mêmes que ceux de e^U.

Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que e^U fait partie de Γ; je veux dire que si $e^{V'_0}$ est la limite de

$$e^{V_0} e^{\alpha U}$$

pour $\alpha = 0$, e^U ne faisant pas partie de Γ, nous pourrons trouver une substitution $e^{U'}$ faisant partie de Γ et telle que $e^{V'_0}$ soit également la limite de

$$e^{V_0} e^{\alpha U'} \qquad (\alpha = 0).$$

Il suffit en effet de prendre $U' = V'_0$; car

$$e^{V_0} e^{\alpha V'_0} = e^{(\alpha+1) V'_0},$$

puisque ces deux transformations ont même adjointe et ne sont pas singulières; et pour $\alpha = 0$ il reste:

$$\lim e^{V_0} e^{\alpha V'_0} = e^{V'_0}.$$

Supposons maintenant

$$e^{V'_0} = \lim e^{V_0} e^{\alpha U};$$

e^U ne faisant pas forcément partie de Γ, faisons varier U d'une manière continue et de façon à le faire revenir finalement à sa valeur initiale; dans quelles conditions les différentes déterminations de V'_0 pourront-elles s'échanger? Les coefficients de l'adjointe de $e^{V_0}e^{\alpha U}$ sont des fonctions uniformes des u, ils devront donc revenir à leurs valeurs initiales; il en est donc de même de *l'ensemble* des opérateurs conjugués de V'_0; ces opérateurs conjugués peuvent seulement s'échanger entre eux; les racines de KILLING d'autre part n'ont pas varié, car elles sont restées égales aux logarithmes des racines de l'équation en S de l'adjointe A_0.

Soient alors e^{B_0} et e^{B_1} les valeurs initiale et finale de $e^{V'_0}$; les racines de KILLING de B_0 seront alors $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs conjugués $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$; les racines de KILLING de B_1 seront encore $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, correspondant aux opérateurs conjugués $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ qui ne seront autre chose que les opérateurs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, dans un autre ordre.

L'ensemble des opérateurs conjugués étant les mêmes pour e^{B_0} et pour e^{B_1}, ces deux transformations sont permutables et si nous considérons la transformation

$$e^{hB_0+(1-h)B_1},$$

où h est un nombre arbitraire, cette transformation qui fait d'ailleurs partie de Γ a mêmes opérateurs conjugués que e^{B_0} et que e^{B_1}; quand nous ferons croître h depuis 0 jusqu'à 1, les opérateurs conjugués ne changeront pas, et les racines de KILLING varieront d'une manière continue; la transformation se réduit pour $h = 0$, à e^{B_1} et elle admet par conséquent les racines $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$ correspondant aux opérateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$; pour $h = 1$, elle se réduit à e^{B_0}, les opérateurs sont restés $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$, et les racines sont devenues $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_r$. Comme nous sommes revenus à la transformation initiale, les racines ω' ne sont autre chose que les racines ω dans un autre ordre, de même que les μ ne sont autre chose que les λ dans un autre ordre; la correspondance entre les racines et les opérateurs doit être rétablie, de sorte que c'est la même permutation qui fait passer des ω aux ω', et des λ aux μ.

Ainsi donc, nous sommes partis de e^{B_0} et nous sommes allés à e^{B_1} en faisant

$$e^{V'_0} = e^{V_0}e^{\alpha U}$$

et faisant varier U d'une manière continue comme nous l'avons dit; puis nous sommes revenus de e^{B_1} à e^{B_0} en prenant

$$e^{hB_0+(1-h)B_1}.$$

Notre transformation n'a jamais cessé de faire partie de Γ *et nos racines de* KILLING *se sont permutées.*

A tout échange entre deux déterminations de V'_0, correspond donc un échange entre deux racines de l'équation de KILLING relative au sous-groupe Γ. Je veux dire l'équation obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique relatif à ce sous-groupe; cette équation est de degré r et il ne faut pas la confondre avec l'équation de KILLING du sous-groupe, obtenue en égalant à zéro le déterminant caractéristique du sous-groupe, et dont le degré est égal à l'ordre du sous-groupe. Pour ces distinctions voir CARTAN, Thèse inaugurale, page 28.

Réciproquement, si deux racines de cette équation s'échangent, deux des déterminations de V'_0 s'échangeront, sauf une restriction sur laquelle nous reviendrons.

Reprenons l'équation

$$e^{V'_0} = e^{V_0} e^{\alpha U}$$

et supposons maintenant que e^U fasse partie de Γ; alors les opérateurs conjugués de U sont les mêmes que ceux de V'_0. Si deux racines de U s'échangent, les opérateurs conjugués correspondants de U s'échangent également, de sorte que deux opérateurs de V'_0 s'echangent.

Si les deux opérateurs de V'_0 qui s'échangent ainsi correspondent à deux racines de Killing de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0) qui ne sont pas égales, deux déterminations différentes de V'_0 se seront échangées. Il est clair d'ailleurs que si ces deux racines ne sont pas égales, leur différence doit être multiple de $2i\pi$, puisque ces deux déterminations différentes de $e^{V'_0}$ doivent avoir même adjointe.

Soit $F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_r)$ le 1^er^ membre de l'équation de Killing. Le sous groupe Γ est caractérisé par un certain nombre de relations linéaires entre les v; à l'aide de ces relations, on peut exprimer les v en fonctions de m d'entre eux, par exemple de $v_1, v_2, \ldots, v_m$, m étant l'ordre du sous-groupe Γ.

On aura par exemple:

$$v_{m+1} = \alpha_{m+1}, \quad v_{m+2} = \alpha_{m+2}, \quad \ldots, \quad v_r = \alpha_r,$$

les α étant des fonctions linéaires de $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Nous obtiendrons ainsi l'équation

$$F(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_r) = 0$$

qui est *l'équation de* Killing *relative au sous-groupe* Γ et dont le 1^er^ membre est homogène de degré r par rapport à

$$\xi, \quad v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_m.$$

Si le 1^er^ membre se décompose en facteurs linéaires, il est impossible que deux de ses racines s'échangent entre elles; et par conséquent que deux déterminations de $e^{V'_0}$ s'échangent. La transformation e^{V_0} est seulement *quasi-singulière.*

Supposons au contraire que le 1^er^ membre ne se décompose pas en facteurs linéaires et soit

$$\Phi(\xi, v_1, v_2, \ldots, v_m)$$

un facteur irréductible non linéaire, homogène d'ordre q par rapport à ξ et aux v.

Il est certain alors que les racines de $\Phi = 0$ sont susceptibles de s'échanger entre elles.

Alors plusieurs déterminations de V'_0 s'échangeront entre elles et e^{V_0} sera *effectivement singulière* à moins que les racines qui s'échangent ainsi entre elles ne correspondent à des racines égales de V'_0 (ou ce qui revient au même de V_0). Soient alors

$$v_1 = v_1^0, \quad v_2 = v_2^0, \quad \ldots, \quad v_m = v_m^0$$

les valeurs des v qui correspondent à V_0; alors e^{V_0} sera effectivement singulière à moins que

$$\Phi(\xi,\ v_1^0,\ v_2^0,\ \ldots,\ v_m^0)$$

ne soit une puissance p^e parfaite.

Si $\Phi(\xi,\ v_i^0)$ ne se réduit pas à une puissance p^e parfaite, $e^{V'_0}$ admet plusieurs déterminations susceptibles de s'échanger, d'où il suit que le groupe G contient certainement des transformations spéciales. Ces considérations s'appliquent également au cas du § 6 et nous font comprendre les relations entre les équations en σ de ce paragraphe et les facteurs de l'équation de KILLING relative au groupe Γ.

Reprenons l'équation

$$e^{V'_0} = \lim e^{V_0} e^U;$$

nous voyons que $e^{\alpha U}$ et $e^{\beta V'_0}$ sont permutables. Donc, parmi les transformations singulières qui ont pour adjointe A_0, il en existe toujours une qui est permutable à une substitution donnée e^U (d'ailleurs quelconque) du sous-groupe Γ; et si un groupe G contient des transformations spéciales, il en contient une qui est permutable à l'une quelconque de ses transformations.

Étudions maintenant les transformations singulières en partant des équations différentielles

$$(1) \qquad \frac{dv_i}{dt_k} = A_i + \sum B_i \frac{1}{(1 - e^{-\omega_h})^m}$$

du § 7. Dans le cas du § 7, toutes les racines se comportant comme des racines simples, l'exposant m était toujours égal à 1. Ici nous examinons le cas où toutes les racines ne se comportent pas comme des racines simples.

Supposons par exemple que ω_h se comporte comme une racine triple, alors l'exposant m pourra prendre les valeurs 1, 2 et 3, et les termes du 2ᵈ membre de (1), qui contiennent au dénominateur une puissance de $1 - e^{-\omega_h}$, pourront s'écrire:

$$\frac{B_i^1}{1 - e^{-\omega_h}} + \frac{B_i^2}{(1 - e^{-\omega_h})^2} + \frac{B_i^3}{(1 - e^{-\omega_h})^3}.$$

Il s'agit d'étudier la forme de B_i^1, B_i^2 et B_i^3. Supposons, pour fixer davantage les idées, que la racine ω_h, tout en se comportant comme une racine triple, soit quintuple et que les opérateurs conjugués correspondants soient au nombre de 5, à savoir: 2 du 1ᵉʳ ordre:

$$U_1 = \sum u_i^1 X_i, \qquad W_1 = \sum w_i^1 X_i;$$

2 du 2ᵈ ordre:

$$U_2 = \sum u_i^2 X_i, \qquad W_2 = \sum w_i^2 X_i,$$

ayant respectivement pour dérivés U_1 et W_1; et un du 3ᵉ ordre:

$$U_3 = \sum u_i^3 X_i,$$

ayant pour dérivé U_2; il est aisé de voir alors que les B sont de la forme suivante:

$$\begin{aligned}
B_i^3 &= \alpha_k u_i^1, \\
B_i^2 &= \alpha'_k u_i^1 + \alpha''_k u_i^2 + \beta_k w_i^1, \\
B_i^1 &= \gamma_k u_i^1 + \gamma'_k u_i^2 + \gamma''_k u_i^3 + \beta'_k w_i^1 + \beta''_k w_i^2,
\end{aligned}$$

les α_k, les β_k et les γ_k étant des fonctions algébriques des v, dépendant de l'indice k mais indépendantes de l'indice i.

Cela posé, reprenons l'équation (2) du § 7 :

$$\frac{d\varphi}{dt} = A' + \sum B' \frac{1}{(1 - e^{-\omega_h})^m}. \tag{2}$$

Si φ est un des coefficients de l'adjointe et si, en particulier, c'est une des racines de l'équation de Killing, on verrait comme au § 7 que $\frac{d\varphi}{dt}$ doit rester fini quand e^{ω_h} devient très voisin de 1 et par conséquent que B' doit être nul. On en conclut, si ω est une racine quelconque de l'équation de Killing:

$$\sum \frac{d\omega}{dv_i} u_i^1 = \sum \frac{d\omega}{dv_i} u_i^2 = \sum \frac{d\omega}{dv_i} u_i^3 = \sum \frac{d\omega}{dv_i} w_i^1 = \frac{d\omega}{dv_i} w_i^2 = 0.$$

Ce sont là des équations tout à fait analogues à l'équation (4) du § 7.

Si donc ω est une racine quelconque de Killing, et si

$$T = \sum t_i X_i$$

est un opérateur conjugué quelconque de V (cet opérateur peut être d'ordre quelconque, et se rapporter à une racine de Killing quelconque, *la racine zéro seule exceptée,* distincte ou non de ω), on aura alors:

$$t_1 \frac{d\omega}{dv_1} + t_2 \frac{d\omega}{dv_2} + \cdots + t_r \frac{d\omega}{dv_r} = 0 \tag{3}$$

et cette équation subsiste quand on y remplace ω par un coefficient quelconque de l'adjointe.

Soit alors C la variété formée par les divers points $v_1, v_2, \ldots, v_r$ qui correspondent aux diverses transformations e^V admettant une même adjointe singulière A_0. Cette variété satisfera, d'après ce qui précède, à une équation différentielle

$$\begin{vmatrix} dv_1 & dv_2 & \ldots & dv_r \\ u_1^1 & u_2^1 & \ldots & u_r^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & \ldots & u_r^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^p & u_2^p & \ldots & u_r^p \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

tout à fait analogue à l'équation (11) du § 7. Soit C_r l'une des variétés définies par cette équation différentielle; elle peut ne pas être identique à C; il peut se faire que le nombre des dimensions soit plus petit pour les variétés C_r que pour la variété C; que par chaque point de C passe une variété C_r, de telle façon que C soit engendrée par une infinité de variétés C_r de la même façon qu'une surface l'est par une courbe mobile. Les p opérateurs

$$\sum u_i^1 X_i, \quad \sum u_i^2 X_i, \quad \ldots, \quad \sum u_i^p X_i$$

sont les divers opérateurs conjugués du 1^er^ ordre de V correspondant à celles des racines de Killing qui deviennent simultanément multiples de $2i\pi$. Le nombre p est donc égal au nombre de ces racines sans tenir compte de leur degré de multiplicité.

Il resterait à montrer que cette variété C_r a précisément p dimensions; et pour cela il faut démontrer que si l'on forme les p opérateurs:

$$S_k = u_1^k \frac{df}{dv_1} + u_2^k \frac{df}{dv_2} + \cdots + u_r^k \frac{df}{dv_r}$$

les différentes transformations infinitésimales

$$\Phi S_k,$$

où Φ est une fonction arbitraire des v, engendreront un groupe continu d'ordre infini.

C'est ce que l'on verrait par un raisonnement analogue à celui du § 7.

§ 9.

Le groupe des W_i.

Nous avons trouvé (Palerme, page 331) quelle est la forme des opérateurs fondamentaux du groupe paramétrique. Cette forme est la suivante:

$$X_i(f) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int \frac{\xi\, d\xi}{(1 - e^{-\xi}) F(\xi)} \sum P_{ji} \frac{df}{dv_j}. \tag{1}$$

L'intégrale doit être prise le long d'un contour quelconque enveloppant toutes les racines de l'équation $F(\xi) = 0$. Ce contour peut être décomposé en contours partiels, enveloppant chacun une des racines, ce qui me permet d'écrire:

$$X_i(f) = \sum X_i(\omega, f),$$

$X_i(\omega, f)$ étant la même intégrale prise le long d'un contour enveloppant seulement la racine $\xi = \omega$.

Examinons séparément chacun de ces termes, et d'abord $X_i(0, f)$. Si $\xi = 0$ est racine d'ordre μ, on peut poser $F(\xi) = \xi^\mu F_1(\xi)$ et développer ensuite suivant les puissances de ξ:

$$\frac{\xi}{1 - e^{-\xi}} = A_0 + A_1 \xi + \cdots,$$

$$\frac{P_{ij}}{F_1(\xi)} = B_0 + B_1 \xi + \cdots.$$

Nous remarquerons que $A_0, A_1, \ldots$ sont des nombres; que $\frac{P_{ij}}{F_1}$ étant une fonction rationnelle homogène d'ordre $\mu - 1$ par rapport aux v et à ξ, B_i sera homogène d'ordre $\mu - i - 1$. On trouve d'ailleurs:

$$X_i(0, f) = \sum \frac{df}{dv_j}(A_0 B_{\mu-1} + A_1 B_{\mu-2} + \cdots + A_{\mu-1} B_0). \tag{2}$$

On voit que $X_i(0, f)$ est une fonction rationnelle des v.

Un cas particulier intéressant est celui où les μ racines qui sont égales à zéro se comportent comme des racines simples. On a alors:

$$B_0 = B_1 = \cdots = B_{\mu-2} = 0,$$
$$X_i(\alpha, f) = \sum \frac{df}{dv_j} B_{\mu-1}.$$

Passons maintenant à $X_i(\omega, f)$. Si ω est racine simple, on a simplement:

$$(3) \qquad X_i(\omega, f) = \sum \frac{\omega}{1 - e^{-\omega}} \frac{P_{ji}(\omega)}{F'(\omega)} \frac{df}{dv_j}.$$

Si ω est racine multiple, d'ordre μ, nous pouvons écrire:

$$(3^{\text{bis}}) \qquad X_s(\omega, f) = \sum_{q=0}^{qp-1} D_q(\omega) R_q,$$

où R_q est une fonction rationnelle des v et de ω (algébrique par conséquent par rapport aux v) et où l'on a posé

$$D_0(\omega) = \frac{1}{1 - e^{-\omega}}, \qquad D_q(\omega) = \frac{d D_{q-1}(\omega)}{d\omega}.$$

On remarquera que $D_0(\omega)$, $D_q(\omega)$ et enfin $X_i(\omega, f)$ tendent vers zéro pour $\omega = -\infty$.

On voit en outre que $X_i(f)$ est le quotient de deux fonctions entières par rapport aux v; au contraire chacun des termes $X_i(\omega, f)$ n'est plus une fonction uniforme des v; c'est une fonction rationnelle des v, de ω et de la transcendante $e^{-\omega}$.

Maintenant $X_i(f)$ doit satisfaire aux relations de structure

$$(4) \qquad (X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s$$

et nous devons rechercher quelle est la forme du premier membre; on aura évidemment:

$$(X_i X_k) = \sum [X_i(\omega_p, f), X_k(\omega_q, f)],$$

ce que j'écrirai pour abréger:

$$(X_i X_k) = \sum (X_i^p X_k^q),$$

la sommation devant être étendue à tous les couples de racines ω_p, ω_q. Quelle est la forme de $(X_i^p X_k^q)$? On aura:

$$(X_i^p X_k^q) = \sum_j \left(\frac{d X_i^p}{d \frac{df}{dv_j}} \frac{d X_k^q}{d v_j} - \frac{d X_i^p}{d v_j} \frac{d X_k^q}{d \frac{df}{dv_j}} \right).$$

Or si l'on se reporte à la formule (3^{bis}) on voit que l'on aura encore:

$$\frac{d X_i^p}{d \frac{df}{dv_j}} = \sum_{q=0}^{q=\mu-1} D_q(\omega_p) R'_q,$$

$$\frac{d X_i^p}{d v_j} = \sum_{q=0}^{q=\mu} D_q(\omega_p) R''_q,$$

R'_q et R''_q étant comme R_q rationnels en v et ω_p.

Dans le cas où $\omega_p = 0$, les dérivées de X_i^p sont rationnelles par rapport aux v.

On conclut de là:

$$(5)\qquad (X_i^p X_k^q) = \sum R_{\alpha\beta} D_\alpha(\omega_p) D_\beta(\omega_q),$$

les $R_{\alpha\beta}$ étant rationnels par rapport aux v, à ω_p et ω_q; quant à α et β ils varient de o à μ et de o à μ', μ étant l'ordre de multiplicité de ω_p et μ' celui de ω_q; la combinaison $\alpha = \mu$, $\beta = \mu'$ étant d'ailleurs exclue.

J'ajoute que R_q est homogène de degré $q + 1$ par rapport aux v et aux ω; que par conséquent R'_q est de degré $q + 1$, R''_q de degré q et $R_{\alpha\beta}$ de degré $\alpha + \beta + 1$. J'observe encore que les équations (3^{bis}) et (5) peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(3^{\text{ter}})\qquad X_i^p = \sum S_q \frac{1}{(1 - e^{-\omega_p})^{q+1}},$$

$$(5^{\text{bis}})\qquad (X_i^p X_k^q) = \sum S_{\alpha\beta} \frac{1}{(1 - e^{-\omega_p})^{\alpha+1}(1 - e^{-\omega_q})^{\beta+1}},$$

les S étant des fonctions rationnelles, non homogènes cette fois, des v et des ω.

L'équation (4) peut encore s'écrire:

$$(4^{\text{bis}})\qquad \sum (X_i^p X_k^q) = \sum c_{iks} X_s^p,$$

les sommations portant sur les indices p, q, s. Elle doit devenir une identité quand on y remplace X_s^p et $(X_i^p X_k^q)$ par leurs valeurs (3^{ter}) et (5^{bis}). Parmi les termes des seconds membres de (3^{ter}) et (5^{bis}) nous distinguerons trois catégories:

1° Ceux qui ne dépendent d'aucune transcendante; ce sont ceux que l'on obtient dans (3^{ter}) si $\omega_p = 0$, ou dans (5^{bis}) si $\omega_p = \omega_q = 0$.

2° Ceux qui ne dépendent que d'une seule transcendante exponentielle; ce sont: 1° les termes de (3^{ter}) où $\omega_p \gtrless 0$; 2° les termes de (5^{bis}) où l'une des racines ω_p, ω_q est nulle et l'autre différente de zéro; 3° les termes de (5^{bis}) où le rapport des deux racines ω_p et ω_q est une constante commensurable.

3° Ceux qui dépendent de deux transcendantes exponentielles. On les rencontre dans (5^{bis}) quand le rapport $\dfrac{\omega_p}{\omega_q}$ n'est pas une constante commensurable.

Comme quelques-uns de ces termes ne sont pas susceptibles de se réduire avec ceux des autres catégories, on est conduit à certaines relations que nous allons examiner.

Pour cela, nous répartirons les racines ω en groupes en réunissant les racines dont le rapport est constant et commensurable.

Soient

$$k_1\omega_p,\quad k_2\omega_p,\quad \ldots,\quad k_h\omega_p$$

les diverses racines d'un même groupe, les k étant des constantes commensurables et ω_p une fonction des v. En général, nous supposerons que $k_1 = 1$ et que ω_p est elle-même une racine. Soit:

$$Y_i^p = Y_i(\omega_p, f) = X_i(k_1\omega_p, f) + \cdots + X_i(k_h\omega_p, f).$$

Nous devons encore faire une autre distinction: les rapports $k_1, k_2, \ldots, k_h$ sont par hypothèse tous réels et commensurables, mais quelques-uns d'entre eux peuvent être négatifs. Supposons par exemple $k < 0$. Nous avons vu que, quand ω tend vers

$-\infty$, les expressions $D_q(\omega)$ tendent vers zéro. Considérons maintenant:

$$D_q(k\omega_p), \qquad k < 0,$$

et faisons tendre ω_p vers $-\infty$. Alors D_q tendra encore vers zéro si $q > 0$, mais D_0 tendra vers 1. Soit alors, d'après la formule (3^{bis}),

$$X_i(k\omega_p, f) = \sum D_q(k\omega_p) R_q;$$

nous poserons:

$$X_i(k\omega_p, f) = X'_i(k\omega_p, f) + X''_i(k\omega_p, f) \tag{6}$$

avec

$$X''_i(k\omega_p, f) = R_0.$$

Si k est positif, je conserverai la formule (6), mais je poserai

$$X''_i(k\omega_p, f) = 0.$$

On voit que dans tous les cas X''_i est algébrique, et que X'_i tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Je poserai ensuite:

$$\begin{aligned} Z^p_i &= Z_i(\omega_p, f) = \sum X'_i(k\omega_p, f), \\ T^p_i &= T_i(\omega_p, f) = \sum X''_i(k\omega_p, f), \\ Y^p_i &= Z^p_i + T^p_i \end{aligned}$$

(les sommations portant sur les diverses valeurs attribuables au nombre k), de sorte que Z^p_i tende vers zéro pour $\omega_p = -\infty$ et que T^p_i soit algébrique. On observera que cette décomposition peut se faire de deux manières. Et en effet, nous pouvons faire jouer le rôle de ω_p à la quantité $-\omega_p$, ce qui revient à changer les signes de toutes les constantes k. On trouve alors:

$$\begin{gathered} X_i(k\omega_p, f) = X_i[(-k)(-\omega_p), f] = X'_i[(-k)(-\omega_p), f] + X''_i[(-k)(-\omega_p), f], \\ X''_i(k\omega_p, f) + X''_i[(-k)(-\omega_p), f] = R_0, \\ Z_i(-\omega_p, f) = \sum X'_i[(-k)(-\omega_p), f], \\ T_i(-\omega_p, f) = \sum X''_i[(-k)(-\omega_p), f]; \\ Y^p_i = Z_i(-\omega_p, f) + T_i(-\omega_p, f). \end{gathered}$$

Adoptons une fois pour toutes l'une ou l'autre de ces deux décompositions; et posons encore:

$$Z^0_i = X_i(0, f) + \sum T^p_i,$$

d'où:

$$X_i(f) = Z^0_i + \sum Z^p_i, \tag{7}$$

les sommations s'étendant aux divers groupes de racines, caractérisés par la quantité ω_p (qui ne diffère des racines du groupe envisagé que par un facteur constant) ou plus simplement par l'indice p.

Envisageons le second membre de (7); nous voyons que Z^0_i est une fonction algébrique des v, et que chaque terme Z^p_i dépend d'une transcendante unique $e^{-\omega_p}$ et tend vers zéro pour $\omega_p = -\infty$. Il est clair que X_i ne peut être décomposé *que d'une seule manière* en une somme de termes satisfaisant à ces conditions. Il vient ensuite:

$$(X_i X_k) = \sum (Z^p_i Z^q_k), \tag{8}$$

les indices p et q pouvant prendre sous le signe $\sum$ toutes les valeurs possibles, y compris la valeur zéro. Les divers termes du second membre de (8) peuvent être algébriques (si $p = q = 0$), ou dépendre d'une transcendante unique (si $p = 0$, ou $q = 0$, ou $p = q$), ou dépendre de deux transcendantes $e^{-\omega_p}$, $e^{-\omega_q}$. Ceux qui dépendent d'une ou de deux transcendantes tendent vers zéro, quand l'une ou l'autre de ces transcendantes tend vers $+\infty$. Ici encore cette décomposition n'est possible que d'une seule manière.

Si alors dans l'équation (4) nous remplaçons $(X_i X_k)$ et X_s par leurs valeurs (8) et (7), les deux membres de cette équation se trouvent décomposés en termes satisfaisant aux conditions que nous venons d'énoncer.

En faisant dans cette équation (9) toutes les transcendantes $e^{-\omega_p}$ infinies, il vient:

$$(9) \qquad (Z_i^0 Z_k^0) = \sum c_{iks} Z_s^0.$$

La (9) nous apprend que les opérateurs

$$Z_i^0(f)$$

définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Étudions le groupe des $Z_i^0(f)$; nous avons:

$$Z_i^0 = X_i(0, f) + \sum T_i^p.$$

$X_i(0, f)$ nous est donné par la formule (2), et nous en concluons que c'est une somme de termes rationnels et homogènes de degré

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \mu - 1$$

par rapport aux v (μ est le degré de multiplicité de la racine 0); le terme de degré 0 subsiste seul si les diverses racines nulles se comportent comme des racines simples. Quant aux T_i^p, ce sont des sommes de termes de la forme R_0; ils sont donc algébriques et homogènes de degré 1 par rapport aux v.

Je puis écrire alors:

$$Z_i^0 = U_i^0 + U_i^1 + \cdots + U_i^\lambda,$$

U_i^k étant homogène de degré k.

De là les identités:

$$(10)\begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \cdots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = \sum c_{iks} U_s^{\mu-1} & (\mu - 1 \leqq \lambda), \\ (U_i^0 U_k^\mu) + (U_i^1 U_k^{\mu-1}) + \cdots + (U_i^{\mu-1} U_k^1) + (U_i^\mu U_k^0) = 0 & (\mu - 1 > \lambda). \end{cases}$$

En particulier, si les racines nulles se comportent comme des racines simples (ou tout au plus comme des racines doubles), on a $\lambda = 1$, d'où:

$$(10^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} (U_i^0 U_k^0) = 0, \\ (U_i^0 U_k^1) + (U_i^1 U_k^0) = \sum c U_s^0, \\ (U_i^1 U_k^1) = \sum c U_s^1; \end{cases}$$

ce qui montre que les opérateurs U_i^1 définissent un groupe isomorphe au groupe donné.

Pour aller plus loin, reprenons les relations de structure, où figurent, comme nous l'avons vu, à côté de fonctions algébriques des v, un certain nombre de transcendantes indépendantes $e^{-\omega_p}$. Dans ces relations, remplaçons chacune des transcendantes $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$; λ_p étant une constante quelconque, ces relations ne cesseront pas d'être satisfaites.

Soient donc

$$(X_i X_k) = \sum c_{iks} X_s \tag{4}$$

ces relations. Soit W_i ce que devient X_i quand on y change $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. J'observe:

1° Que le crochet $(W_i W_k)$ n'est autre chose que ce que devient le crochet $X_i X_k$ quand on y remplace $e^{-\omega_p}$ par $\lambda_p e^{-\omega_p}$. En effet, on a par définition:

$$(X_i X_k) = \sum_h \frac{d X_i}{d v_h} \frac{d X_k}{d p_h} - \frac{d X_i}{d p_h} \frac{d X_k}{d v_h},$$

$$(W_i W_k) = \sum_h \frac{d W_i}{d v_h} \frac{d W_k}{d p_h} - \frac{d W_i}{d p_h} \frac{d W_k}{d v_h},$$

en écrivant pour abréger p_h au lieu de $\dfrac{d f}{d v_h}$.

Cela posé, observons que X_i dépend des v de deux manières; d'abord algébriquement, ensuite par l'intermédiaire des exponentielles $e^{-\omega_p}$; c'est ce que j'exprimerai en écrivant:

$$X_i = F_i(p_h, v_h, e^{-\omega_p}),$$

F_i devant être une fonction algébrique des p_h, des v_h et des $J_p = e^{-\omega_p}$. On a alors:

$$W_i = F_i(p_h, v_h, \lambda_p e^{-\omega_p}).$$

Il vient alors:

$$\frac{d X_i}{d v_h} = \frac{\partial X_i}{\partial v_h} - \sum \frac{\partial X_i}{\partial J_p} J_p \frac{d \omega_p}{d v_h},$$

en représentant par des ∂ les dérivées prises en regardant les v_h et les J_p comme des variables indépendantes. On a de même:

$$\frac{d W_i}{d v_h} = \frac{\partial W_i}{\partial v_h} - \sum \frac{\partial W_i}{\partial J_p} J_p \frac{d \omega_p}{d v_h},$$

d'où:

$$(X_i X_k) = \sum \left(\frac{\partial X_i}{\partial v_h} \frac{d X_k}{d p_h} - \frac{\partial X_k}{\partial v_h} \frac{d X_i}{d p_h} \right) - \sum \sum J_p \frac{d \omega_p}{d v_h} \left(\frac{\partial X_i}{\partial J_p} \frac{d X_k}{d p_h} - \frac{\partial X_k}{\partial J_p} \frac{d X_i}{d p_h} \right),$$

$$(W_i W_k) = \sum \left(\frac{\partial W_i}{\partial v_h} \frac{d W_k}{d p_h} - \frac{\partial W_k}{\partial v_h} \frac{d W_i}{d p_h} \right) - \sum \sum J_p \frac{d \omega_p}{d v_h} \left(\frac{\partial W_i}{\partial J_p} \frac{d W_k}{d p_h} - \frac{\partial W_k}{d J_p} \frac{d W_i}{d p_h} \right).$$

On voit que la seule différence entre les deux crochets $(X_i X_k)$ et $(W_i W_k)$, c'est que dans le 1er on doit faire: $J_p = e^{-\omega_p}$ et dans le 2d: $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$.

2° La relation (4) a ses deux membres algébriques par rapport aux p_h, aux v_h et aux transcendantes $J_p = e^{-\omega_p}$. Elle doit donc être une identité quand on y regarde les p_h, les v_h et les J_p comme des variables indépendantes.

Elle doit donc subsister quand on y fait $J_p = \lambda_p e^{-\omega_p}$, c'est-à-dire que l'on a:

$$(W_i W_k) = \sum c_{iks} W_s.$$

En d'autres termes: *les opérateurs W_i engendreront un groupe isomorphe au groupe des Z_i.*

Pour bien préciser le résultat obtenu, supposons par exemple qu'une racine ω_3 soit égale à la somme de deux autres $\omega_1 + \omega_2$. Alors les trois transcendantes

$$J_1 = e^{-\omega_1}, \qquad J_2 = e^{-\omega_2}, \qquad J_3 = e^{-\omega_3}$$

ne sont plus indépendantes. Si on veut les remplacer par

$$\lambda_1 e^{-\omega_1}, \qquad \lambda_2 e^{-\omega_2}, \qquad \lambda_3 e^{-\omega_3}$$

les constantes λ_1 et λ_2 peuvent être choisies d'une manière quelconque; mais il n'en est pas de même de λ_3, qui est assujettie à la condition:

$$\lambda_3 = \lambda_1 \lambda_2.$$

Le groupe des W_i contient des cas particuliers remarquables. Si, par exemple, on suppose que toutes les constantes λ sont nulles, on tombe sur le groupe engendré par les Z_i^0; si on les suppose toutes nulles, sauf λ_p que l'on fait égal à 1, on tombe sur le groupe engendré par les opérateurs $Z_i^0 + Z_i^p$.

On a vu aussi que la définition de Z_i^0 peut être modifiée si l'on fait jouer le rôle de ω_p à $-\omega_p$. Si $Z_i'^0$ est ce que devient Z_i^0 par suite de cette modification, le groupe des $Z_i'^0$ est encore isomorphe au groupe donné. Mais il rentre encore comme cas particulier dans le groupe des W_i; il suffit de faire tous les $\lambda = 0$, à l'exception de λ_p que l'on suppose $= \infty$.

Le groupe des W_i contient donc comme cas particulier, non seulement le groupe donné, celui des X_i, mais encore les autres groupes que nous avons envisagés successivement dans ce §. Remarquons que l'isomorphisme du groupe des W_i à celui des X_i est *en général* holoédrique; en effet les W_i dépendent de certaines constantes λ que l'on peut faire varier d'une manière continue.

Pour certaines valeurs des λ, à savoir pour $\lambda = 1$, l'isomorphisme est certainement holoédrique, puisque les deux groupes sont identiques. L'isomorphisme ne pourrait donc cesser d'être holoédrique que pour certaines valeurs particulières des λ.

On verrait de même que les deux groupes sont en général semblables, au sens de Lie, de sorte qu'on peut passer de l'un à l'autre par un simple changement de variables.

Quel est ce changement de variables? C'est ce que nous allons voir plus loin.

Quelques explications sont ici nécessaires; le groupe des X_i, c'est-à-dire le groupe paramétrique, est *simplement transitif,* de telle sorte qu'étant donné deux systèmes quelconques de valeurs des variables $v_1^0, v_2^0, \ldots, v_r^0$ et $v_1^1, v_2^1, \ldots, v_r^1$, il y a une transformation du groupe et une seule qui transforme le 1^{er} système dans le second. Le groupe des W_i, dont celui des X_i n'est qu'un cas particulier, correspondant à certaines valeurs particulières des λ, devra être encore aussi *en général* simplement transitif et par conséquent *semblable* à celui des Z_i. Appelons v_i' les variables indépendantes relatives au groupe des W_i, pour ne pas les confondre avec les variables v_i relatives au groupe des X_i. Soit $v_i'^0$ un système quelconque de valeurs des v_i', que j'appellerai le *système initial.* Il y aura une transformation e^V (où $V = \sum v_i X_i$), et une seule, qui changera ce système initial $v_i'^0$ en un système quelconque v_i'. Les v_i' sont alors des fonctions des valeurs initiales $v_i'^0$ et des paramètres v_i qui définissent cette transformation e^V, et c'est là la relation entre les v_i et les v_i', le changement de variables qui fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. Pour certaines valeurs *particulières* des λ, le groupe des W_i peut cesser d'être simplement transitif et semblable à celui des X_i; nous verrons plus loin que cela peut arriver en particulier pour le groupe des Z_i^0.

§ 10.

Application au groupe des rotations.

Prenons d'abord pour exemple le groupe des rotations et renvoyons pour les notations à Palerme, pages 332 et 333. Nous avons désigné par 2θ l'angle de rotation et par α, β, γ les cosinus directeurs de l'axe de rotation; et nous avons posé:

$$(1) \qquad v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta \qquad (\theta^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2),$$

de telle façon que le vecteur v_1, v_2, v_3 a pour direction celle de l'axe de rotation et pour longueur la moitié de l'angle de rotation. Dans ces conditions nous avons formé les opérateurs Z_1, Z_2, Z_3 et trouvé par exemple:

$$(2) \quad Z_1 = \frac{df}{dv_1}[\theta\cot\theta(1-\alpha^2)+\alpha^2] + \frac{df}{dv_2}[v_3+\alpha\beta(1-\theta\cot\theta)] + \frac{df}{dv_3}[-v_2+\alpha\gamma(1-\theta\cot\theta)].$$

Pour former les W d'après le § précédent, il suffit de changer $\cot\theta$ en $\cot(\theta+h)$, h étant une constante quelconque. Je puis donc écrire l'expression de W_1, mais il sera préférable de ne pas confondre les variables qui figurent dans Z_1 avec celles qui figurent dans W_1; et pour éviter cette confusion, j'accentuerai les lettres. Je poserai donc:

$$v_1' = \alpha'\theta', \qquad v_2' = \beta'\theta', \qquad v_3' = \gamma'\theta' \qquad (\theta'^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + v_3'^2)$$

et j'aurai:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} W_1 = {} & \frac{df}{dv_1'}[\theta'\cot(\theta'+h)(1-\alpha'^2)+\alpha'^2] + \frac{df}{dv_2'}\{v_3'+\alpha'\beta'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\} \\ & + \frac{df}{dv_3'}\{-v_2'+\alpha'\gamma'[1-\theta'\cot(\theta'+h)]\}. \end{aligned} \right.$$

D'après le § précédent, le groupe des Z et celui des W doivent être isomorphes et même semblables, de sorte que l'on peut passer de l'un à l'autre par un changement de variables. Il s'agit de déterminer ce changement de variables, c'est-à-dire de voir quelles relations il doit y avoir entre les v' et les v.

Pour cela reprenons le calcul de la fin de la page 332 et du commencement de la page 333 (Palerme), mais en posant:

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} & \alpha = \alpha', \qquad \beta = \beta', \qquad \gamma = \gamma', \qquad \theta' = \theta - h, \\ & v_1' = \alpha(\theta - h), \qquad v_2' = \beta(\theta - h), \qquad v_3' = \gamma(\theta - h). \end{aligned} \right.$$

Nous trouverons par exemple:

$$dv_1' = \theta' d\alpha + \alpha d\theta' = \frac{\theta' d\mu}{\sin\theta} + \frac{\theta'\alpha\cos\theta\, d\lambda}{\sin^2\theta} - \frac{\alpha\, d\lambda}{\sin\theta}$$

et finalement nous arriverons à la même formule définitive, sauf que θ sera remplacé par θ' quand il est en dehors des signes trigonométriques, ou, ce qui revient au même, que les lettres y seront accentuées et $\cot\theta$ remplacé par $\cot(\theta' + h)$.

Le vecteur v'_1, v'_2, v'_3 a donc même direction que le vecteur v_1, v_2, v_3 (celle de l'axe de rotation), mais la longueur du vecteur n'est pas la même; la différence des longueurs est égale à la constante h. *Ainsi se trouve définie la relation cherchée entre les v et les v'.*

Mais cette solution n'est pas unique. Soit en effet

$$v'^0_1,\quad v'^0_2,\quad v'^0_3$$

un système quelconque de valeurs des v' que nous appellerons le système initial.

Appliquons à ce système, une rotation quelconque du groupe e^V, caractérisée par les valeurs

$$v_1 = \alpha\theta, \qquad v_2 = \beta\theta, \qquad v_3 = \gamma\theta$$

des variables v. Après cette rotation, les variables v' auront pris les valeurs

$$v'_1,\quad v'_2,\quad v'_3$$

et nous aurons:

$$v'_i = f_i(v'^0_1,\ v'^0_2,\ v'^0_3,\ v_1,\ v_2,\ v_3) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{5}$$

Si l'on se donne les valeurs initiales v'^0_i, les relations (5) définissent le changement de variables qui, en passant des variables v aux variables v', nous fait passer du groupe des Z_i à celui des W_i. On voit que ce changement de variables n'est pas unique, puisqu'il dépend des trois paramètres arbitraires v'^0_i.

La solution que nous venons d'étudier correspond à un choix particulier de ces paramètres; une rotation nulle y correspondra à un vecteur de longueur h de direction d'ailleurs quelconque; or cette rotation nulle doit d'ailleurs correspondre au système initial v'^0_i; notre solution particulière suppose donc:

$$(v'^0_1)^2 + (v'^0_2)^2 + (v'^0_3)^2 = h^2.$$

La solution la plus générale s'obtiendrait de la façon suivante. Elle dependrait de la constante h et de la rotation constante e^A, où $A = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3$.

Construisons avec les variables v_1, v_2, v_3 la rotation e^V; combinons les deux rotations l'une constante e^A, l'autre variable e^V et soit

$$e^U = e^A e^V, \qquad U = \sum u_i X_i.$$

Construisons le vecteur u_1, u_2, u_3, prolongeons-le d'une longueur égale à h, et nous aurons le vecteur v'_1, v'_2, v'_3; ce qui nous donne les v' en fonctions des v.

Voyons maintenant ce qui se passe en ce qui concerne le groupe des Z^0_i; pour le former il faut prendre $\omega_p = i\theta$, ou bien $\omega_p = -i\theta$; cela revient à remplacer $\cot\theta$ par $+i$, ou par $-i$. En effet, nous passons des groupe des Z_i à celui des W_i en changeant $\cot\theta$ en $\cot(\theta + h)$ ou $e^{i\theta}$ en $e^{i(\theta+h)} = \lambda e^{i\theta}$, où $\lambda = e^{ih}$.

Mais le groupe des Z^0_i s'obtient comme nous l'avons vu quand on fait $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$. Il faut donc faire $h = \infty$, la partie imaginaire de h étant égale soit à $+\infty$, soit à $-\infty$, ce qui donne $\cot(\theta + h) = \pm i$.

Il y a donc deux groupes des Z_i°. Nous considérerons l'un d'eux, par exemple celui où $\operatorname{cotg}(\theta + h) = + i$.

Prenons donc les formules de la page 333 de Palerme et remplaçons-y $\operatorname{cotg}\theta$ par i. Il viendra:

$$(6)\quad dv_1 = t_1[i\theta(1 - \alpha^2) + \alpha^2] + t_2[-v_3 + \alpha\beta(1 - i\theta)] + t_3[v_2 + \alpha\gamma(1 - i\theta)];$$

les valeurs de dv_2 et dv_3 s'en déduiraient par permutation circulaire.

On en déduit aisément (en tenant compte de $\sum \alpha^2 = 1$):

$$(7)\qquad d\theta = \alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3$$

et

$$(8)\qquad \begin{cases} d\alpha = it_1(\beta^2 + \gamma^2) - t_2(\gamma + i\alpha\beta) + t_3(\beta - i\alpha\gamma), \\ d\beta = t_1(\gamma - i\alpha\beta) + it_2(\alpha^2 + \gamma^2) - t_3(\alpha + i\beta\gamma), \\ d\gamma = -t_1(\beta + i\alpha\gamma) + t_2(\alpha - i\beta\gamma) + it_3(\alpha^2 + \beta^2); \end{cases}$$

et on remarquera que les accroissements des cosinus directeurs α, β, γ, produits par une transformation infinitésimale quelconque dépendent uniquement de ces cosinus directeurs eux mêmes et sont indépendants de θ.

De plus on a comme il convient:

$$\alpha d\alpha + \beta d\beta + \gamma d\gamma = 0,$$

puisque $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ doit rester constant et égal à 1. On a d'ailleurs:

$$d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2 = 0.$$

Ce n'est pas tout. Si l'on regarde α, β, γ comme les coordonnées rectangulaires d'un point, on a:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

c'est-à-dire que le point α, β, γ est sur une sphère. Cette sphère, comme toutes les surfaces du 2[d] degré, possède deux systèmes de génératrices rectilignes. Je dis que *les génératrices de l'un des systèmes ne sont pas altérées par les transformations du groupe.* Il suffira de faire la vérification pour l'une de ces génératrices

$$\alpha = 1, \qquad \beta = i\gamma.$$

Je vais vérifier que si l'on a $\alpha = 1$, $\beta = i\gamma$, on aura également

$$d\alpha = 0, \qquad d\beta = i d\gamma.$$

Il vient en effet:

$$(9)\qquad \begin{cases} d\alpha = 0, \\ d\beta = 2\gamma t_1 + it_2(1 + \gamma^2) - t_3(1 - \gamma^2), \\ d\gamma = -2i\gamma t_1 + t_2(1 + \gamma^2) + it_3(1 - \gamma^2) \end{cases}$$

et la vérification est immédiate.

On voit ainsi que *le groupe des Z_i° n'est pas transitif,* puisqu'il ne permet pas de passer d'un système de valeurs des variables à un autre système *quelconque*, mais seulement à un système correspondant à une même génératrice rectiligne de la sphère. Le groupe des Z_i° n'est donc pas semblable à celui des Z_i, et il n'est pas possible de passer d'un groupe à l'autre par un simple changement de variables.

Nous avons vu qu'il y a deux groupes des Z_i°, que l'on obtient en prenant

$\omega_p = i\theta$ ou $\omega_p = -i\theta$, ou bien en prenant $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$. Ces deux groupes correspondent aux deux systèmes de génératrices rectilignes de la sphère.

La dernière des équations (9) montre que les transformations du groupe se réduisent à des transformations *homographiques* sur chacune des génératrices rectilignes de la sphère du 1[er] système. Quels sont les points doubles de ces transformations ?

Si nous considérons par exemple une rotation autour de l'axe des x, c'est-à-dire si nous faisons $t_2 = t_3 = 0$, nous voyons que l'on a:

$$d\alpha = d\beta = d\gamma = 0$$

pour

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -i\gamma \qquad \text{ou} \qquad \alpha = -1, \qquad \beta = i\gamma;$$

c'est-à-dire que le lieu des points doubles se compose des deux génératrices rectilignes du 2[d] système qui rencontrent l'axe de rotation.

Remarquons qu'à $v_1 = v_2 = v_3 = 0$, c'est-à-dire à une rotation nulle, correspondent des valeurs indéterminées des v', puisque la longueur du vecteur v'_1, v'_2, v'_3 est égale à h, mais sa direction indéterminée. Le point v'_1, v'_2, v'_3 est donc un point indéterminé d'une sphère. Une transformation infinitésimale pourra alors transformer un point très voisin d'un point de cette sphère en un point très voisin d'un *autre* point de cette sphère et pouvant être très distant du 1[er] point. Donc les dv_i deviennent infinies.

C'est en effet ce qui arrive: Avec le groupe des Z_i, nous rencontrions $\theta \cot g\, \theta$; $\cot g\, \theta$ devenait infini pour $\theta = 0$, mais $\theta \cot g\, \theta$ restait fini. Avec le groupe des W_i, $\theta \cot g\, \theta$ est remplacé par $\theta \cot g\, (\theta + h)$, qui devient infini pour $\theta = -h$.

§ 11.

Extension au cas général.

Je me propose maintenant d'étendre au cas général les résultats obtenus dans le § précédent relativement au groupe des rotations. Considérons donc un groupe paramétrique G quelconque, dérivé des r opérateurs

$$X_1, \quad X_2, \quad \ldots, \quad X_r$$

et la substitution la plus générale e^V de ce groupe. Considérons également son groupe adjoint G_α, et dans ce groupe l'adjointe de e^V. Nous savons que cette adjointe est une substitution linéaire qui transforme les r coefficients u de

$$U = u_1 X_1 + u_2 X_2 + \cdots + u_r X_r$$

dans les r coefficients u' de

$$U' = \sum u'_i X_i,$$

où l'on pose:

$$U' = e^{-V} U e^V.$$

Nous savons également comment les coefficients de cette substitution linéaire dépendent des v. Ce sont des fonctions algébriques des v et d'un certain nombre de transcendantes indépendantes de la forme $e^{-\omega_p}$.

Le nombre des coefficients de l'adjointe est r^2, et ils se trouvent exprimés en fonctions de r variables indépendantes. Il y a donc entre eux au moins $r^2 - r$ relations. Il y en a exactement $r^2 - r$ si le groupe G est de la 1ère catégorie.

Il y en a davantage, s'il est de la 2de catégorie, parce qu'alors le groupe adjoint est d'ordre inférieur à r.

Dans le cas particulier du groupe des rotations, ces $r^2 - r$ relations ne sont autre chose que les relations bien connues qui lient les 9 cosinus directeurs de 3 directions rectangulaires.

Quelle est la nature de ces $r^2 - r$ relations (je me suppose ici placé dans le cas des groupes de 1ère catégorie mais si l'on voulait passer à celui des groupes de 2de catégorie il n'y aurait rien à changer que le nombre des relations)? et d'abord *sont-elles toujours algébriques?*

Ne voulant pas aborder la question dans toute sa généralité, je me bornerai à faire observer qu'il en est ainsi dans un très grand nombre de cas, comme le montre un théorème de CARTAN (loc. cit., p. 133). Ce théorème nous apprend que pour tout groupe linéaire semi-simple, on peut choisir les paramètres de façon que les coefficients des équations finies du groupe soient des fonctions rationnelles de ces paramètres. Les relations entre ces coefficients sont donc algébriques.

Si ces $r^2 - r$ relations sont algébriques, elles ne cesseront pas d'être satisfaites si dans l'expression des coefficients de l'adjointe en fonctions des v, expression où figurent d'une part des fonctions algébriques des v et d'autre part des exponentielles $e^{-\omega}$, on considère ces exponentielles comme des variables indépendantes. Elles ne cesseront donc pas de l'être si on y remplace $e^{-\omega}$ par $\lambda e^{-\omega}$, les λ étant des constantes arbitraires.

Soient alors

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_{r^2}$$

les coefficients de l'adjointe, et écrivons

$$a_i = \varphi_i(v, e^{-\omega}), \tag{1}$$

φ_i étant une fonction algébrique des v et des exponentielles $e^{-\omega}$.

Si nous regardons les a_i comme donnés, ces équations (1) nous donneront les v, et elles seront compatibles, pourvu que les valeurs des a_i satisfassent aux $r^2 - r$ relations algébriques précitées.

Posons maintenant

$$a_i = \varphi_i(v', \lambda e^{-\omega'}). \tag{2}$$

Les λ sont des constantes quelconques, choisies une fois pour toutes; les v' sont des variables nouvelles, les ω' sont formés avec les v' comme les ω l'étaient avec les v.

Ces équations (2) *sont compatibles,* car les relations algébriques entre les a_i obtenues en éliminant les v' entre les équations (2) sont les mêmes que celles que l'on avait obtenues en éliminant les v entre les équations (1), ou bien encore en regardant les v et les $e^{-\omega}$ comme des variables indépendantes et éliminant à la fois toutes ces variables indépendantes entre les équations (1).

Nous pouvons donc écrire:

$$\varphi_i(v, e^{-\omega}) = \varphi_i(v', \lambda e^{-\omega'}), \tag{3}$$

ce qui définit les relations entre les anciennes variables v et les nouvelles variables v'.

Considérons maintenant une autre transformation du groupe paramétrique :

$$e^V e^{\varepsilon X_k} = e^{V+dV} \qquad (\varepsilon \text{ étant très petit}).$$

Nous aurons, comme nous le savons :

$$(4) \qquad dv_i = \varepsilon \theta_i(v, e^{-\omega}),$$

les θ_i étant des fonctions algébriques des v et des exponentielles $e^{-\omega}$. Ce sont là les équations différentielles du groupe paramétrique engendré par les X_i.

Pour obtenir ces équations (4) nous aurions pu opérer de la façon suivante :

Les deux transformations

$$e^V, \quad e^{V+dV}$$

ont respectivement pour adjointes les substitutions linéaires A' et A'' qui changent U en

$$U' = e^{-V} U e^V, \qquad U'' = e^{-\varepsilon X_k} e^{-V} U e^V e^{\varepsilon X_k} = e^{-\varepsilon X_k} U' e^{\varepsilon X_k}.$$

Soient : a_α l'un des coefficients de l'adjointe A' ; $a_\alpha + d a_\alpha$ le coefficient correspon dant de l'adjointe A''. On aura :

$$a_\alpha = \varphi_\alpha(v, e^{-\omega})$$

et

$$d a_\alpha = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i,$$

puisque φ_α dépend des diverses variables v_i, d'une part directement et d'autre part par l'intermédiaire des diverses exponentielles $e^{-\omega}$.

D'autre part, on passe de U' à U'' par une substitution linéaire infinitésimale, celle qui change U' en

$$e^{-\varepsilon X_k} U' e^{\varepsilon X_k}.$$

Cela veut dire que $d a_\alpha$ est une fonction linéaire à coefficients constants des a_β, ce que j'écrirai :

$$\frac{d a_\alpha}{\varepsilon} = \sum C_{\alpha\beta} a_\beta.$$

Cela nous conduit aux relations :

$$(5) \qquad \varepsilon \sum C_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v, e^{-\omega}) = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i.$$

De ces relations, on pourrait tirer les $\dfrac{dv_i}{\varepsilon}$ et on devrait retrouver les équations (4).

Changeons de variables en passant aux variables v'. Observons pour cela que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v, e^{-\omega})$ par rapport à v_i est :

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} - \sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i}$$

et de même que la dérivée totale de $\varphi_\alpha(v', \lambda e^{-\omega'})$ par rapport à v'_i est :

$$\frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} - \sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i}.$$

En différentiant les équations (3) nous trouverons donc:

$$(6)\quad \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv_i} dv_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{de^{-\omega}} e^{-\omega} \frac{d\omega}{dv_i} dv_i = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i.$$

Et alors, en tenant compte des équations (3) et (6), les équations (5) deviennent:

$$(7)\qquad \varepsilon \sum c_{\alpha\beta} \varphi_\beta(v', \lambda e^{-\omega'}) = \sum \frac{d\varphi_\alpha}{dv'_i} dv'_i - \sum\sum \frac{d\varphi_\alpha}{d\lambda e^{-\omega'}} \lambda e^{-\omega'} \frac{d\omega'}{dv'_i} dv'_i.$$

Si nous comparons les équations (5) et (7), nous voyons que les 2 membres de (5) sont algébriques par rapport aux v et aux exponentielles $e^{-\omega}$. Pour passer de (5) à (7) il suffit de changer dv_i en dv'_i, v_i en dehors des signes exponentiels en v'_i, et $e^{-\omega}$ en $\lambda e^{-\omega'}$.

La résolution des équations (5) nous ayant donné:

$$(4)\qquad dv_i = \varepsilon \theta_i(v, e^{-\omega}),$$

celle des équations (7) nous donnera donc:

$$(8)\qquad dv'_i = \varepsilon \theta_i(v', \lambda e^{-\omega'}).$$

On reconnaît les équations différentielles du groupe des W_i défini au § 9.

Ainsi, au moins dans les cas très généraux où le théorème cité de Cartan s'applique, on obtiendra ce groupe des W_i par le changement de variables (3).

C'est là la généralisation du résultat obtenu au § précédent.

Paris, 3 octobre 1907.

H. Poincaré.