

## 7. *Gestalt und Gleichgewicht der Meereswellen;* *von Willy Wien.*

Die folgenden Untersuchungen schliessen sich unmittelbar an die von Helmholtz gegebene Theorie<sup>1)</sup> von Wind und Wellen an. In den dort ausgeführten numerischen Rechnungen hatten sich Fehler gezeigt, so dass Helmholtz mir eine Prüfung dieser Zahlen auftrag. Es ergaben sich hierbei auch in den analytischen Entwicklungen einige Rechenfehler, welche die Ergebnisse in einzelnen Punkten veränderten. Diese Abweichungen von seinen Resultaten erkannte Helmholtz an, als ich ihm die Ergebnisse meiner Rechnungen vorlegte und er beabsichtigte in seinen gesammelten Abhandlungen einen berichtigenden Zusatz aufzunehmen, da der Druck der Abhandlung selbst bereits vollendet war. Diese Aufnahme musste dann unterbleiben, als Helmholtz bald darauf erkrankte und sie nicht mehr selbst besorgen konnte.

Indessen bleibt die wesentliche Folgerung der Helmholtz'schen Untersuchung richtig, dass es Wellen gibt, die bei genügender Windstärke eine grössere Stabilität besitzen als die Strömung bei ebener Grenzfläche, denn wir können in der That Wellenformen finden, die einen geringeren Energievorrath besitzen, als bei ebener Grenzfläche vorhanden sein würde, wenn wir auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen Rücksicht nehmen.

Ausser den Entwicklungen, die zu diesen Schlüssen nothwendig sind, gebe ich noch diejenigen, welche die Abhängigkeit der Wellenformen von den Geschwindigkeiten der Luft und der Wellen und den Einfluss geringer Wassertiefe auf die Ausbildung der Wellen ergeben. Ein Theil dieser Untersuchungen ist bereits früher in etwas anderer Form veröffentlicht.<sup>2)</sup> Nicht nur in der Frage nach den bei den Wasser-

1) Helmholtz, Ueber atmosphärische Bewegungen. Sitzungsber. d. Berl. Akad. p. 761—780. 1889. Ges. Abh. 3. p. 309. Die Energie der Wogen und des Windes. Sitzungsber. d. Berl. Akad. p. 853—872. 1890. Ges. Abh. 3. p. 333.

2) Sitzungsber. d. Berl. Akad. 14. Juni 1894; 4. April 1895.

wellen herrschenden Gesetzen liegt ein wesentliches Ziel dieser Arbeiten, sondern auch in der Anwendung auf die dynamischen Vorgänge der Atmosphäre. Nach der Helmholtz'schen Theorie müssen an der Grenze verschieden erwärmter Luftschichten Wellen entstehen, sobald die Strömungen eine gewisse Grösse erreicht haben und die Wellenberge werden dann oft als Wolkenbildungen sichtbar.

Man kann nun bei sehr niedrigen Wellen eine Beziehung zwischen den Dichtigkeiten der beiden Luftschichten, den Strömungsgeschwindigkeiten in grosser Entfernung von den Wogen und der Wellenlänge ableiten, so dass eine dieser Grössen aus den anderen berechnet werden kann.

Bei höheren Wellen treten bei verschiedener Grösse der Strömungsgeschwindigkeiten merkliche Unterschiede in der Form ein, sodass es nicht aussichtslos erscheint, aus der Beobachtung der Wellenformen auf die Werthe der Strömungen zu schliessen. Sind die Luftwogen nicht zu weit von der Erdoberfläche entfernt, so müssen bei grossen Werthen der Wellenlänge auch in der Nähe des Bodens noch die Einflüsse der Wellenbildung merklich werden und Aenderungen des Luftdruckes bedingen. Auch diese Verhältnisse werden sich durch die Analyse vollständig übersehen lassen.

1.

Die Voraussetzungen der Theorie sind folgende: Es sind zwei Flüssigkeiten von verschiedener Dichte über einander gelagert, beide strömen im unendlichen mit constanten Geschwindigkeiten horizontal. Die Flüssigkeiten sind reibungslos und ohne Wirbel. Die horizontale Strömung der oberen Flüssigkeit bezeichnen wir mit  $a_1$ , die der unteren mit  $-a_2$ . Nehmen wir beide entgegengesetzt gerichtet an, so können wir dem ganzen System eine Geschwindigkeit  $a_2$  beilegen; hierdurch bringen wir die tiefen Schichten des unteren Mediums zur Ruhe, während die absolute Geschwindigkeit des oberen Mediums  $a_1 + a_2$ , die der Wellen  $a_2$  ist. Das Coordinatensystem ist mit den Wellen als fest verbunden und ausserdem sind alle Bewegungen parallel der Ebene der  $xy$  zu denken.

Für die *Wellenformen* ist das Hinzufügen dieser gemeinsamen Geschwindigkeit  $a_2$  von keinem Einfluss, wohl aber für

die Energie des Systems. Die Gestalt der Wellen hängt nur von den Werthen der Geschwindigkeiten  $a_1$  und  $a_2$  ab. Die Bewegungen des Systems sind im übrigen in Bezug auf das Coordinatensystem stationär.

Ausser der Bedingung, dass die Flüssigkeiten im Unendlichen horizontal strömen, ist noch die zu erfüllen, dass die Trennungslinie Strömungslinie für *beide* Flüssigkeiten ist. Diese Forderung muss mathematisch genau erfüllt werden, weil selbst ein geringes Uebereinandergreifen der angrenzenden Stromlinien beider Flüssigkeiten physikalisch die Bedeutung des Hineinpressens der einen in die andere haben würde, wodurch unendliche Druckkräfte entstehen müssten.

Die Bedingung der Gleichheit des Druckes an beiden Seiten der Oberfläche soll dagegen nach dem Vorgange von Helmholtz durch die Herstellung convergenter Reihen erfüllt werden, in denen die Coefficienten der ersten Glieder zum Verschwinden gebracht werden. Es werden demnach alle Grössen als Functionen zweier Variabeln ausgedrückt, von denen die eine in der Oberfläche constant ist. Die verticale Coordinate bezeichnen wir mit  $x$ , die horizontale mit  $y$ , die Beschleunigung durch die Schwere mit  $g$ , das Geschwindigkeitspotential mit  $\varphi$ , mit  $\psi$  die Function, die einer Constanten gleichgesetzt die Strömungslinien angiebt und die wir als Strömungsfuction bezeichnen wollen.

Der Index 1 bezieht sich immer auf die obere, 2 auf die untere Flüssigkeit.

Es werden nun  $x + iy$  und  $\psi + i\varphi$  als eindeutige Functionen von  $\vartheta + i\eta$  dargestellt;  $\eta = h$  ist die Gleichung der Oberfläche. Den hydrodynamischen Gleichungen ist hierdurch genügt und es muss noch an der Oberfläche  $\psi$  constant sein und dort, wo die constante horizontale Strömung stattfinden soll, müssen  $\psi$  und  $x$  constant sein. Die Druckgleichung lautet:

$$\text{const.} = (s_1 - s_2)gx + \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial N}\right)^2 \frac{s_1}{2} - \left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial N}\right)^2 \frac{s_2}{2},$$

wo  $N$  die Normale bezeichnet. Ferner ist:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \frac{\partial \vartheta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \vartheta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}, \quad \left(\frac{\partial \psi}{\partial N}\right)^2 = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2.$$

In der Trennungslinie ist  $\psi = \text{const.}$ ,  $\eta = h$ , also:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = 0.$$

$$\left[ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)^2 \right]_{\eta=h} = \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2}_{(\eta=h)}$$

Der Zusammenhang zwischen den Variablen  $x + iy$  und  $\vartheta + i\eta$  wird durch eine dritte Variable  $\sigma + \tau i$  vermittelt, die durch die Gleichung:

$$e^{n(x + iy)} = \sigma + \tau i$$

definiert ist. Die Beziehung zwischen  $\sigma + \tau i$  und  $\vartheta + \eta i$  ist im allgemeinen nicht durch eine ganze rationale Function darstellbar. Um die Druckgleichung zu erfüllen, muss diese Beziehung auch durch eine Reihenentwicklung dargestellt werden. Diese Reihe convergirt immer stärker als die Reihe:

$$n(x + iy) = \log(\sigma + \tau i) = \log(1 + u) + F(\vartheta + \eta i)$$

$$= F(\vartheta + \eta i) + u - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}u^3 + \dots,$$

wo  $F$  eine lineare Function von  $\vartheta + \eta i$  ist.

Für die Genauigkeit der Rechnung gibt die Convergenz der logarithmischen Reihe den Ausschlag.

Im allgemeinen lässt sich  $nx$  auf die Form bringen:

$$(1) \left\{ \begin{aligned} nx &= \text{const.} + \eta + \mathfrak{A}_1 e^{-\eta} \cos \vartheta + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2\eta} \cos 2\vartheta + \dots, \\ &\quad + \mathfrak{B}_1 e^{\eta} \cos \vartheta + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2\eta} \cos 2\vartheta + \dots, \\ ny &= \text{const.} - \vartheta + \mathfrak{A}_1 e^{-\eta} \sin \vartheta + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2\eta} \sin 2\vartheta + \dots, \\ &\quad - \mathfrak{B}_1 e^{\eta} \sin \vartheta - \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2\eta} \sin 2\vartheta - \dots \end{aligned} \right.$$

Ferner setzen wir in den meisten Fällen:

$$\frac{\psi_a + i\varphi_a}{b_a} = -n(x + iy) + \mathfrak{A}_1 e^{-h} \frac{\cos(\vartheta + \eta i)}{\cos h i} + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2h} \frac{\cos 2(\vartheta + \eta i)}{\cos 2 h i} + \dots,$$

$$+ \text{const.} \quad + \mathfrak{B}_1 e^h \frac{\cos(\vartheta + \eta i)}{\cos h i} + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{-2h} \frac{\cos 2(\vartheta + \eta i)}{\cos 2 h i} + \dots,$$

also:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\psi_2}{b_2} &= -nx + \mathfrak{A}_1 e^{-h} \frac{\cos \vartheta \cos \eta i}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{A}_2}{2} e^{-2h} \frac{\cos 2\vartheta \cos 2\eta i}{\cos 2hi} + \dots, \\ &+ \text{const.} + \mathfrak{B}_1 e^h \frac{\cos \vartheta \cos \eta i}{\cos hi} + \frac{\mathfrak{B}_2}{2} e^{2h} \frac{\cos 2\vartheta \cos 2\eta i}{\cos 2hi} + \dots \end{aligned} \right.$$

Für  $\eta = h$  wird  $\psi_2 = 0$ , die eine Bedingung an der Oberfläche ist erfüllt, wenn dort  $\eta = h$  wird. Ferner wird:

$$\frac{1}{b_2} \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = -1 + (\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{B}_1) \frac{\cos \vartheta}{\cos hi} + (\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B}_2) \frac{\cos 2\vartheta}{\cos 2hi} + \dots$$

$h$  hat immer einen positiven Werth. Die  $\mathfrak{B}$  sind daher stets erheblich kleiner als die  $\mathfrak{A}$ . Wird also das Glied mit  $\cos 3\vartheta$  vernachlässigt, so entscheidet die Grösse der Glieder:

$$\frac{2\mathfrak{A}_3}{\cos 3hi} + \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}{\cos hi \cos 2hi},$$

$$2(\mathfrak{A}_3 e^{-3h} - \mathfrak{B}_3 e^{3h}) + (\mathfrak{A}_1 e^{-h} - \mathfrak{B}_1 e^h)(\mathfrak{A}_2 e^{-2h} - \mathfrak{B}_2 e^{2h})$$

im Vergleich zur Einheit über die Genauigkeit der Rechnung. Die Constante  $n$  bestimmt die Wellenlänge, und zwar ist im allgemeinen  $n = 2\pi/\lambda$ , für die Functionen aber, bei denen die Coefficienten der Reihenentwicklung nur gerade Indices enthalten, ist die Periode  $\pi$  daher  $n = \pi/\lambda$ .

Für den Raum der unteren Flüssigkeit ist  $\eta < h$ , deshalb convergirt die Reihe (2) immer. Für  $x = -\infty$  wird:

$$\frac{\psi_2}{b_2} = -nx, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -nb_2 = -a_2.$$

Im Unendlichen strömt die Flüssigkeit mit der constanten Geschwindigkeit  $a_2$ . Wir setzen nun:

$$\mathfrak{P} = \frac{n s_1 a_1^2}{g(s_2 - s_1)}, \quad \mathfrak{Q} = \frac{n s_2 a_2^2}{g(s_2 - s_1)},$$

dann wird die Druckgleichung:

$$C \left( \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right) = x \left[ \left( \frac{\partial x}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial \eta} \right)^2 \right] + \frac{\mathfrak{P}}{2a_1^2} \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{\mathfrak{Q}}{2a_2^2} \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} \right)^2.$$

Die im Werthe von  $x$  vorkommende Constante kann noch zu  $C$  hinzugenommen werden und kommt daher bei der Erfüllung der Druckgleichung nicht in Betracht.

Wenn  $g$  positiv gerechnet wird, wirkt die Schwere in der Richtung der negativen  $x$ , dann muss bei stabilem Gleichgewicht  $s_2 > s_1$  sein. Wir können aber auch die obere Flüssig-

keit als die dichtere annehmen, wenn gleichzeitig  $-g$  für  $g$  gesetzt wird. Beziehen wir dann wieder den Index 2 auf die dichtere Flüssigkeit, so haben wir die Indices zu vertauschen und erhalten dann eine Vertauschung von  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{D}$ .

Die seitliche Begrenzung des betrachteten Raumes wird durch zwei in der Entfernung einer Wellenlänge senkrecht laufende Linien der  $xy$ -Ebene bestimmt. Wegen der Periodicität der Wellenbewegung müssen die Geschwindigkeiten an diesen Linien dieselben Werthe annehmen. Es wird also verlangt, dass:

$$\psi_y = \psi_{y+\lambda}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_y} = \frac{\partial \psi}{\partial x_{y+\lambda}}$$

sind. Diese Gleichungen ersetzen die sonst nöthigen Grenzbedingungen, dass entweder  $\psi$  oder  $\partial\psi/\partial x$  an diesen Grenzlinien vorgeschriebene Werthe besitzen. Die Gleichungen sind erfüllt, wenn  $\psi$ ,  $\partial\psi/\partial\eta$ ,  $\partial x/\partial\eta$ ,  $\partial y/\partial\eta$  periodisch nach der Wellenlänge sind. Wenn die Wellenform gegeben ist, so ist die Bewegung hierdurch vollständig bestimmt; wenn aber die horizontalen Strömungen allein vorgeschrieben sind, so können mehrere Wellenformen auftreten, von denen aber eine die grösste Stabilität besitzt. Hierbei muss aber immer die Eindeutigkeit aller Functionen vorausgesetzt werden.

## 2. Die Energie der Wellen.

Helmholtz hat in seiner Abhandlung über die Energie der Wellen nachgewiesen, dass der Zustand des Gleichgewichtes stationärer Wogen mit der Bedingung verknüpft ist, dass die Gesamtenergie des Systems bei vorgeschriebenen Werthen der Horizontalströmung einen Grenzwert annimmt. Diese Bedingung, die mit der physikalischen Forderung, dass der Druck auf beiden Seiten der Trennungsfläche gleichen Werth besitzt, identisch ist, ergiebt stabiles Gleichgewicht, wenn die Energie ein absolutes Minimum erreicht.

Die Werthe der lebendigen Kräfte der oberen und unteren Flüssigkeit sind

$$L_1 = \frac{s_1}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy,$$

$$L_2 = \frac{s_2}{2} \iint \left[ \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Wir setzen an der Trennungslinie beider Flüssigkeiten  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ , an den horizontalen Grenzlinien  $\psi_1 = p_1$ ,  $\psi_2 = p_2$ . Wir führen nun der Allgemeinheit wegen eine dritte horizontale Geschwindigkeit,  $a_3$  ein, um auch den Fall fortlaufender Wellen bei gleichzeitiger Strömung des dichteren Mediums in den tieferen Schichten mit einzuschliessen.

In Bezug auf das Coordinatensystem hat dann die obere Flüssigkeit die Horizontalströmung  $a_1$ , die untere die Geschwindigkeit  $a_3 - a_2$ . Geben wir dann dem ganzen System die Geschwindigkeit  $a_2$ , so ist die absolute Geschwindigkeit

$$\begin{aligned} &\text{der oberen Flüssigkeit } a_1 + a_2, \\ &\text{der unteren Flüssigkeit } a_3, \\ &\text{der Wellen } a_2. \end{aligned}$$

Da die Geschwindigkeiten nur als Quadrate eingehen, so kann  $a_1$  oder  $a_3 - a_2$  das Zeichen wechseln, ohne die Resultate zu beeinflussen. Wir erhalten dann Wellen, die in entgegengesetzter Richtung laufen wie der Wind.

Bezeichnen wir die Entfernungen der horizontalen Grenzlinien von der  $y$ -Axe mit  $\xi_1$  und  $\xi_2$  und integriren über die Länge einer Welle, so findet sich

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{s_1}{2} \lambda \{v_1 (a_1 + 2 a_2) + a_2^2 \xi_1\}, \\ L_2 &= - \frac{s_2}{2} \lambda \{v_2 (a_3 + a_2) - a_2^2 \xi_2\}. \end{aligned}$$

Wir setzen nun

$$(3) \quad v_1 = a_1 (\xi_1 - r_1), \quad -v_2 = (a_3 - a_2) (\xi_2 - r_2).$$

Dann ist

$$(4) \quad \begin{cases} L_1 = \frac{s_1}{2} \lambda \{ \xi_1 (a_1 + a_2)^2 - (a_1 + 2 a_2) a_1 r_1 \}, \\ L_2 = \frac{s_2}{2} \lambda \{ \xi_2 a_3^2 - (a_3^2 - a_2^2) r_2 \}. \end{cases}$$

Die Glieder, die den Factor  $r$  enthalten, bedingen die Veränderung der lebendigen Kräfte, die von der Wogenbildung herrührt. Hierbei ist die Lage der  $y$ -Axe dadurch festgelegt, dass sie in die ebene Oberfläche des Wassers fällt, wenn

keine Wellen vorhanden sind. Dies wird durch die Gleichung ausgesprochen:

$$(5) \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial y}{\partial \vartheta} x d\vartheta = 0.$$

Hierdurch wird die additive Constante im Werthe von  $x$  bestimmt. Die gesammten, auf der Strecke einer Welle vorhandenen Flüssigkeitsmengen sind dann  $s_1 \lambda \xi_1$  und  $s_2 \lambda \xi_2$ . Man kann die Gleichungen (4) auch aus den Schwerpunktsätzen ableiten. Die Geschwindigkeit des Schwerpunktes der beiden Flüssigkeiten in der Richtung der  $x$  ist Null, in der Richtung der  $y$  gleich  $v/\xi$ , die Gesamtenergie ist

$$v_1 a_1 \frac{s_1}{2} \lambda$$

für die obere Flüssigkeit, also die lebendige Kraft der Bewegung relativ zum Schwerpunkt

$$\frac{s_1}{2} \lambda \left( v_1 a_1 - \xi_1 \left( \frac{v_1}{\xi_1} \right)^2 \right).$$

Geben wir jetzt dem Schwerpunkt die Geschwindigkeit  $a_2$  hinzu, so ist jetzt die lebendige Kraft der fortschreitenden Bewegung

$$\frac{s_1}{2} \lambda \left( \frac{v_1}{\xi_1} + a_2 \right)^2 \xi_1,$$

durch Addiren beider ergibt sich  $L_1$  und ebenso  $L_2$  für  $a_3 = 0$ .

Setzen wir in den Gleichungen (4)  $a_3 = 0$ , so wird

$$L_2 = \frac{s_2 \lambda}{2} a_2^2 r_2.$$

Da  $L_2$  stets positiv sein muss, so darf  $r_2$  nicht negativ werden; dasselbe gilt von  $r_1$ .

Setzen wir nun in (4)  $a_3 = 0$ , so sehen wir unmittelbar, dass die lebendigen Kräfte durch die Wogenbildung stets verringert werden müssen, wenn die Wogen selbst nicht fortschreiten.

Diese Folgerung lässt sich allgemein ziehen, ohne auf die Gestalt der Wellen näher einzugehen. Durch die Wogenbildung wird aber potentielle Energie neu hinzutreten, die bei ebener Grenze nicht vorhanden ist, und die weitere Frage ist



nun, ob unter Umständen die Verminderung der lebendigen Kräfte grösser ist, als die gebildete potentielle Energie.

Der Werth der potentiellen Energie ist

$$(6) \quad F = \frac{(s_2 - s_1)g}{2} \int_0^{2\pi} x^2 \frac{\partial y}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Eine Entscheidung dieser letzten Frage ist ohne näheres Eingehen auf die einzelnen Wellenformen nicht möglich.

### 3. Abbildung durch elliptische Coordinaten.

Wir setzen

$$e^{n(x+yi)} = \sigma + \tau i = 2a [\cos(\vartheta + \eta i) - \cos \varepsilon],$$

wo  $a$  und  $\varepsilon$  reelle Constanten sind. In der  $\sigma\tau$ -Ebene sind die Linien  $\eta = \text{const.}$  Ellipsen,  $\vartheta = \text{const.}$  Hyperbeln. Der Anfangspunkt der Coordinaten liegt in der Entfernung  $\cos \varepsilon$  vom Mittelpunkt der Kegelschnitte.  $\eta = h$  ist die Trennungslinie beider Flüssigkeiten,  $e^h + e^{-h}$  und  $e^h - e^{-h}$  sind die Axen dieser Ellipse in der  $\sigma\tau$ -Ebene.

Für die obere Flüssigkeit sei nun

$$\psi_1 + i\varphi_1 = -b_1 h - i b_1 (\vartheta + \eta i),$$

wo  $b_1$  eine Constante bezeichnet. Für  $\eta = h$  wird  $\psi_1 = 0$ , für  $\eta = \infty$  wird

$$-\log a + nx = \eta = \frac{\psi_1}{b_1} + h, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = n b_1 = a_1$$

der Horizontalströmung der oberen Flüssigkeit. Für  $\vartheta = \varepsilon$ ,  $\eta = 0$  wird

$$nx = \log 2a + \log(\vartheta - \varepsilon) + \log \sin \varepsilon.$$

Durch Bildung der logarithmischen Reihe ergibt sich

$$n(x + yi) = \log a + \eta - i\vartheta - 2 \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{e^{a(\vartheta + \eta i)}}{a} \cos a\varepsilon.$$

Berücksichtigt man die Gleichung (2) und vernachlässigt alle Glieder höherer Ordnung als  $e^{-2h}$ , so kann man die Druckgleichung auf die Form bringen

$$a_0 + a_1 \cos \vartheta + a_2 \cos 2\vartheta = 0.$$

Durch Nullsetzen der Coefficienten erhält man die Gleichungen, aus denen noch die Constante  $C$  zu eliminiren ist. Setzen wir noch  $(1/\cos hi) = \zeta$ , so erhalten wir als Resultat die beiden Gleichungen

$$(7) \quad \begin{cases} 1 - \zeta^2 \cos^2 \varepsilon - \mathfrak{B} - \mathfrak{D} (1 - \frac{1}{2} \zeta^2) = 0, \\ 2 \cos^2 \varepsilon + 1 - \mathfrak{D} (4 \cos^2 \varepsilon - \zeta^2) = 0. \end{cases}$$

Die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \log \left( \frac{1 + \zeta \cos \varepsilon}{1 - \zeta \cos \varepsilon} \right).$$

Will man Wellen gleicher Höhe vergleichen, so muss für sie

$$\cos^2 \varepsilon \zeta^2 = \frac{1 + \mathfrak{D} \zeta^2}{4 \mathfrak{D} - 2} \zeta^2$$

denselben Werth haben.

Aus der Bedingung (5) ergibt sich

$$\log a + h = 2 e^{-2h} \cos^2 \varepsilon + e^{-4h} \cos^2 2\varepsilon + \dots$$

Für

$$\eta = x = \infty$$

wird

$$p_1 = a_1 \left( \mathfrak{D}_1 - \frac{\lambda}{2\pi} (\log a + h) \right),$$

also ist

$$(8) \quad r_1 = \frac{\lambda}{2\pi} \{ 2 e^{-2h} \cos^2 \varepsilon + e^{-4h} \cos^2 2\varepsilon + \dots \}.$$

Aus (2) folgt

$$(9) \quad r_2 = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ 2 \cos^2 \varepsilon \left( \frac{e^{-h}}{\cos hi} - e^{-2h} \right) + \cos^2 2\varepsilon \left( \frac{e^{-2h}}{\cos 2hi} - e^{-4h} \right) \dots \right\}.$$

Der Werth der potentiellen Energie wird

$$F = \frac{\lambda^3 g (s_2 - s_1)}{4 \pi^2} \left\{ e^{-2h} \cos^2 \varepsilon + e^{-4h} (3 \cos^4 \varepsilon - 3 \cos^2 \varepsilon + \frac{1}{4}) \dots \right\}.$$

Der Unterschied im Energievorrath bei ebener Grenzfläche von dem bei ruhenden Wellen wird durch die Grösse bestimmt

$$(10) \quad \frac{s_1 \lambda a_1^2 r_1}{2} + \frac{s_2 \lambda a_2^2 r_2}{2} - F = D.$$

Ist  $D$  positiv, so ist der Energievorrath bei ebener Grenze grösser. Wir können in unserem Falle  $D$  schreiben

$$(10a) \quad \left\{ \begin{aligned} D &= \frac{\lambda^2 (s_2 - s_1) g}{4 \pi} \left\{ r_1 \mathfrak{B} + r_2 \mathfrak{D} - \frac{\lambda}{\pi} \{ e^{-2h} \cos^2 \varepsilon \right. \\ &\quad \left. + e^{-4h} [3 (\cos^4 \varepsilon - \cos^2 \varepsilon) + \frac{1}{4}] \right\} \\ &= \frac{g \lambda^3 (s_2 - s_1) e^{-4h}}{4 \pi^2} \{ \cos^2 \varepsilon + 4 \cos^4 \varepsilon - 20 \cos^6 \varepsilon \}. \end{aligned} \right.$$

$D$  ist positiv, wenn  $\cos \varepsilon < 0,5875$ , sonst negativ.

Nun ist aber nach (7)

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cos^2 \varepsilon} - \zeta^2 \left( \cos^2 \varepsilon - \frac{1}{4} + \frac{1}{16 \cos^4 \varepsilon} \right) - \frac{\zeta^4}{16 \cos^2 \varepsilon} \left( 1 + \frac{1}{2 \cos^2 \varepsilon} \right).$$

Da  $\mathfrak{B}$  nicht negativ werden darf, so muss, weil auch  $\zeta^2$  eine kleine Grösse ist,  $\cos^2 \varepsilon > \frac{1}{2}$ , also  $\cos \varepsilon > 0,7071$  sein. Es ist also  $D$  bei den nach diesem System möglichen Wellen immer negativ; diese Wellen besitzen einen grösseren Energievorrath, als die Strömung bei ebener Grenze. Der Unterschied tritt indessen erst bei Berücksichtigung der Glieder von der Ordnung von  $e^{-2h}$  in der Druckgleichung auf, bei ganz niedrigen Wellen fällt er fort.

#### 4. Lemniscatische Abbildung.

Es sei

$$\sigma + \tau i = Z = \sqrt{w + 1}.$$

Die Riemann'sche Fläche der complexen Variablen  $w$  ist zweiblättrig mit einem Verzweigungspunkte  $w = -1$  und einem  $w = \infty$ . Den Kreisen in der  $w$ -Ebene entsprechen Lemniscaten in der  $Z$ -Ebene. Dem unteren Blatte entsprechen die negativen Theile der  $Z$ -Ebene, dem oberen die positiven. Da  $Z$  eine einwerthige Function von  $w$  sein muss, so wird es weiter so abgebildet, dass den beiden Blättchen ein Blatt entspricht, ohne dass die Beziehung zwischen Lemniscaten und Kreisen zu gelten aufhört. Durch die Abbildung

$$\zeta = \frac{w + 1}{w + a^4}$$

wird zunächst der erste Verzweigungspunkt in den Mittelpunkt

$\zeta = 0$  des Kreises der  $\zeta$ -Ebene gelegt, da den Kreisen der  $w$ -Ebene wieder Kreise der  $\zeta$ -Ebene entsprechen. Setzen wir dann

$$\mathfrak{z} = \sqrt{\zeta},$$

so entspricht den beiden Blättern der  $\zeta$ -Ebene ein Blatt der  $\mathfrak{z}$ -Ebene. Den Kreisen der  $\zeta$ -Ebene entsprechen wieder Kreise der  $\mathfrak{z}$ -Ebene. Durch die Gleichung  $\mathfrak{z} = e^{i(\vartheta+i\eta)}$  wird erreicht, dass der Geraden  $\eta = \text{const.}$  ein unendlich oft wiederholter Umlauf des Kreises in der  $\zeta$ -Ebene entspricht.

Die Abbildung gilt aber nicht für das äussere, sondern nur für das innere Gebiet der Kreise und Lemniscaten, die nicht über ein bestimmtes Gebiet hinausgehen. Es entspricht nämlich das Blatt der  $Z$ -Ebene und das der  $\mathfrak{z}$ -Ebene demselben Doppelblatt der  $w$ -Ebene mit dem Verzweigungspunkt  $-1$ . Aber der zweite Verzweigungspunkt liegt für  $\mathfrak{z}$  bei  $w = -a^4$ , für  $Z$  bei  $w = \infty$ . Also sind die Blätter der  $w$ -Ebene ausserhalb des Kreises  $w = -a^4$  nicht mehr für  $\mathfrak{z}$  und  $Z$  identisch und es kann demnach auch nicht  $Z$  auf  $\mathfrak{z}$  hierdurch abgebildet werden.

Wir begrenzen somit das abzubildende Gebiet auf das Innere des Kreises der  $w$ -Ebene, dessen Radius  $a^2$  ist, und wählen für die Abbildung des äusseren Gebietes die Beziehungen

$$w = Z^2 - 1, \quad \mathfrak{z} = \frac{1}{a^2} \sqrt{w}.$$

Kreisen der  $w$ -Ebene entsprechen Kreise der  $\mathfrak{z}$ -Ebene. Der innere Verzweigungspunkt liegt für  $Z$  bei  $w = -1$ , für  $\mathfrak{z}$  bei  $w = 0$ , also sind die Blätter innen nicht identisch.

Dagegen liegt der äussere Verzweigungspunkt für beide bei  $w = \infty$ . Im Folgenden soll sich immer der Index 2 auf den inneren, 1 auf den äusseren Raum beziehen. Wir haben dann zu setzen

$$Z_2 = \sigma_2 + \tau_2 i = e^{i(\vartheta+\eta)} \sqrt{\frac{\alpha^4 - 1}{1 - e^{2i(\vartheta+\eta)}}} = (X_2 + Y_2 i) \sqrt{\frac{\alpha^4 - 1}{1 - (X_2 + Y_2) i}}.$$

Hieraus ergibt sich folgende Gleichung

$$(X_2^2 + Y_2^2)^2 = \frac{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2}{(\sigma_2^2 + \tau_2^2)^2 + 2(\alpha^4 - 1)(\sigma_2^2 - \tau_2^2) + (\alpha^4 - 1)^2}.$$

Ferner

$$\sigma_1 + \tau_1 i = \sqrt{a^4 e^{2i(\vartheta + \eta i)} + 1} = \sqrt{a^4 (X_1 + Y_1 i)^2 + 1}$$

$$(\sigma_1^2 + \tau_1^2)^2 - 2(\sigma_1^2 - \tau_1^2) + 1 = a^8 (X_1^2 + Y_1^2)^2.$$

Für

$$X_1^2 + Y_1^2 = X_2^2 + Y_2^2 = \frac{1}{a^2}$$

gehen beide Gleichungen über in

$$(\sigma^2 + \tau^2)^2 - 2(\sigma^2 - \tau^2) + 1 - a^4 = 0,$$

die Gleichung der Lemniscate, der Grenzcurve beider Abbildungen. Da  $X + Xi = e^{i(\vartheta + \eta i)}$  ist, so folgt  $X^2 + Y^2 = e^{-2\eta}$ , und für die Grenze  $e^{-2h} = 1/a^2$ , also  $a = e^h$ .

Wir verschieben nun in der  $\sigma\tau$ -Ebene das Coordinatensystem in der  $\sigma$ -Axe um die Winkel  $e^{-l}$ . Wir haben dann

$$n(x_2 + y_2 i) = \text{const.} + \log \left[ e^{i(\vartheta + \eta i)} - \frac{e^{-l} \sqrt{1 - e^{2i(\vartheta + \eta i)}}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} \right]$$

$$- \frac{1}{2} \log(1 - e^{2i(\vartheta + \eta i)}).$$

Das innere Gebiet der Lemniscate liegt zwischen den Werthen  $\eta = \infty$  und  $\eta = h$ .

Wir entwickeln nun

$$n(x_2 + y_2 i) = \text{const.} + i\vartheta - \eta - \frac{e^{-i\vartheta + \eta - l}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} - \frac{1}{2} \frac{e^{-2i\vartheta + 2\eta - 2l}}{e^{4h} - 1}$$

$$- \frac{1}{3} \frac{e^{-3i\vartheta + 3\eta - 3l}}{(\sqrt{e^{4h} - 1})^3} \dots + \frac{1}{2} \frac{e^{i\vartheta - \eta - l}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} \dots + \frac{1}{2} e^{2i(\vartheta + \eta i)} \dots$$

Die Reihe convergirt für positive  $l$  und  $\eta = h$ .

Weiter setzen wir

$$\frac{\psi_2 + i\varphi_2}{b_2} = \text{const.} + n(x_2 + y_2 i) + \frac{e^{i\vartheta - \eta - l + 2h}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} + \frac{1}{2} e^{2i\vartheta - 2\eta - 2l + 4h}$$

$$+ \frac{1}{3} \frac{e^{3i\vartheta - 3\eta - 3l + 6h}}{(\sqrt{e^{4h} - 1})^3} \dots - \frac{1}{2} \frac{e^{i\vartheta - \eta - l}}{\sqrt{e^{4h} - 1}} \dots - \frac{1}{2} e^{2i(\vartheta + \eta i)}.$$

Für  $\eta = h$  wird  $\psi_2$  constant. Für  $x_2 = -\infty$  wird

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial x} = n b_2 = a_2.$$

Für den äusseren Raum haben wir zu setzen

$$\begin{aligned} n(x_1 + y_1 i) &= \log [\sqrt{e^{4h+2i\vartheta-2\eta} + 1} - e^{-l}] \\ &= \text{const.} + i\vartheta - \eta + \log \{ \sqrt{1 + e^{-2i\vartheta+2\eta-4h}} - e^{-l-i\vartheta+\eta-2h} \} \\ &= \text{const.} + i\vartheta - \eta + \frac{1}{2} e^{-2i\vartheta+2\eta-4h} \dots + \frac{1}{2} e^{-3i\vartheta-l+3\eta-6h} \dots \\ &\quad - e^{-i\vartheta+\eta-l-2h} - \frac{1}{2} e^{-2i\vartheta+2\eta-2h-4h} \dots \end{aligned}$$

Die Reihe convergirt für positive  $l$  und  $\eta = h > 0$ .

Für  $\eta = -\infty$  wird

$$n(x_1 + i y_1) = \text{const.} + \log(e^{i\vartheta-\eta}) = \text{const.} + i\vartheta - \eta.$$

Wir setzen

$$- \frac{\psi_1 + i \varphi_1}{b_1} = \text{const.} + i\vartheta - \eta,$$

also

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -n b_1 = -a_1 \text{ für } x_1 = \infty.$$

Da für  $\eta = h$  auch  $\psi_1$  constant wird, sind hiermit alle Grenzbedingungen ausser der Druckgleichung erfüllt. Diese wird in derselben Weise wie vorher mit Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung  $e^{-3h}$  erfüllt und ergiebt, wenn wir zur Abkürzung  $e^{-2h} = \alpha$ ,  $e^{-2l} = \beta$  setzen, die beiden Gleichungen

$$(11) \quad \begin{cases} 4\alpha\beta - 1 + (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})(1 - 2\alpha\beta) = 0 \\ 2\beta - 1 - \mathfrak{P}(\beta - 2) - \mathfrak{Q}(3\beta - 2) = 0 \end{cases}$$

oder

$$\mathfrak{Q} = \frac{1 - 6\alpha\beta + \beta}{2\beta(1 - 2\alpha\beta)},$$

die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} \log \frac{\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}} + 1}{\sqrt{\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta}} - 1}$$

Wenn die Wellenhöhe für verschiedene Wellenformen dieselbe sein soll, so muss

$$\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{2(2 - (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q}))}{1 - (\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})} + \frac{2 - \mathfrak{P} - 3\mathfrak{Q}}{1 - 2(\mathfrak{P} + \mathfrak{Q})}$$

Die benutzten Reihenentwicklungen divergiren für  $h \leq 0$ . Sie werden aber schon für kleine Werthe von  $h$  unbrauchbar, weil die vernachlässigten Glieder den ersten an Grösse nahe kommen.

Wird die Einschnürung der Lemniscate so gross, dass der Radiusvector die Curve zweimal schneidet, so schneidet auch an den entsprechenden Stellen der Welle die  $x$ -Coordinate die Wellenlinie zweimal. Die Form der Welle ist dann eine überhängende, die nothwendig im labilen Gleichgewicht ist und zum Branden führen muss, während die Wellenhöhe endlich bleibt.

Für negative Werthe von  $h$  besteht die Lemniscate aus zwei gesonderten, symmetrisch liegenden und geschlossenen Zweigen. Auch dann kann die Curve noch zur Darstellung von Wellen benutzt werden, wenn als innerer Raum der von einem Zweige umschlossene betrachtet und der äussere mit Hinzunahme des vom zweiten Zweige begrenzten Stückes abgebildet wird. So lange die beiden Zweige getrennt sind, erhält man dann regelmässige Wellen, sobald sie aber in einander übergehen, entstehen Discontinuitäten, die in Wirklichkeit als Brandung auftreten.

## 5.

Die beiden betrachteten Abbildungen können wir für die Untersuchung der Einflüsse, die die Gestalt der Wellen bestimmen, so verwerthen, dass wir entweder  $\mathfrak{P}$  oder  $\mathfrak{Q}$  in beiden als gleich vorschreiben und ausserdem die Höhe der Wellen festsetzen. Dann erhalten wir  $\mathfrak{Q}$  oder  $\mathfrak{P}$  in beiden verschieden und wir haben, da die sonstigen Bedingungen dieselben sind, die sich ergebende Verschiedenheit der Wellenform der Verschiedenheit der Werthe des  $\mathfrak{P}$  allein oder des  $\mathfrak{Q}$  allein zuzuschreiben.

Wenn die Wellenlänge gegeben ist, so werden Unterschiede im Werthe des  $\mathfrak{P}$  nur durch die Verschiedenheit der Geschwindigkeit bedingt, mit der die Luft den Wellen vorausseilt, während  $\mathfrak{Q}$  dann nur von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen abhängt.

Einige Wellenformen, die einen solchen Unterschied erkennen lassen, sind in den folgenden Figuren gezeichnet.  $a_1$  und  $a_2$  sind die horizontalen Strömungen, wenn als obere Flüssigkeit Luft, als untere Wasser angenommen wird. Dann ist  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 773,4$ ,  $\lambda = 1$  m gesetzt.

$a_1^1$  und  $a_2^1$  sind dieselben Geschwindigkeiten, wenn die beiden Flüssigkeiten Luft von der Temperatur  $10^0$  und  $0^0$  sind.

Hier ist  $s_2/s_1 = 283/273$ ,  $\lambda = 100$  m angenommen.

Zwei Wellen bei gleicher relativer Geschwindigkeit und verschiedener Wellengeschwindigkeit sind in Fig. 1 gezeichnet.

Die zugehörigen Werthe sind nebeneinandergestellt.

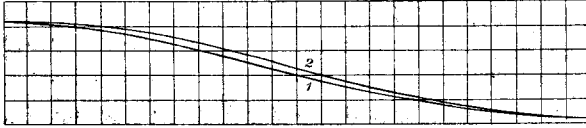


Fig. 1.

1	2.
$\zeta = 0,2502$	$\zeta = \frac{1}{6^{\frac{1}{4}}}$
$\cos \varepsilon = 0,9926$	$\beta = 4$
$H = \frac{\lambda}{2\pi} 0,5067$	$H = \frac{\lambda}{2\pi} 0,5067$
$\Omega = 0,7660$	$\Omega = 0,6607$
$\mathfrak{P} = 0,1964$	$\mathfrak{P} = 0,1964$

$a_1 = 15,39$ m/sec	$a_1^1 = 1,060$ m/sec	$a_1 = 15,39$ m/sec	$a_1^1 = 1,060$ m/sec
$a_2 = 1,194$ m/sec	$a_2^1 = 2,246$ m/sec	$a_2 = 1,015$ m/sec	$a_2^1 = 1,909$ m/sec

Die Curve 3 (Fig. 2) gehört zu zwei verschiedenen Werthsystemen mit gleicher Wellengeschwindigkeit, aber verschiedener relativer Geschwindigkeit. Sie ist mit der Curve 1 (Fig. 1) identisch, passt aber auch zum Werthsystem 3, da die Unterschiede hier zu klein sind, um durch die Zeichnung noch deutlich hervortreten. 4 hat die relative Geschwindigkeit Null und grosse Wellengeschwindigkeit; wir haben hier eine verhältnissmässig grosse Verschiedenheit in der Form, wie denn auch diese Welle die grösste Einbuchtung von allen hier betrachteten zeigt. Die Curve 3a zeigt eine zu 3 gehörende Stromlinie der Luft.

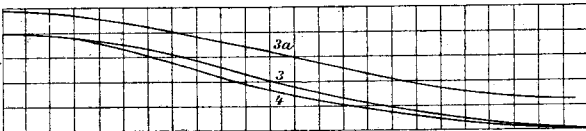


Fig. 2.

3.	4.
$\alpha = 0,03482$	$\zeta = 0,3328$
$\beta = 1,833$	$\cos \varepsilon = 0,7513$
$H = \frac{\lambda}{2\pi} 0,5067$	$H = \frac{\lambda}{2\pi} 0,5067$
$\Omega = 0,7660$	$\Omega = 0,9915$
$\mathfrak{P} = 0,0877$	$\mathfrak{P} = 0$



$$a_1 = 10,285 \text{ m/sec} \quad a_1^1 = 0,708 \text{ m/sec} \quad a_1 = a_2^1 = 0$$

$$a_2 = 1,194 \text{ m/sec} \quad a_2^1 = 2,246 \text{ m/sec} \quad a_2 = 1,243 \text{ m/sec} \quad a_2^1 = 2,338 \text{ m/sec}$$

Endlich haben wir in Fig. 3 zwei Wellen von gleicher Wellengeschwindigkeit, von denen eine die relative Geschwindigkeit Null hat. Hier zeigt sich ein nur durch den Einfluss des Windes bedingter Unterschied der Wellenform.

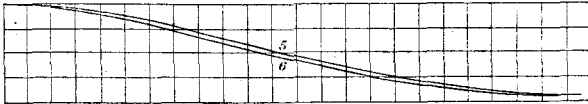


Fig. 3.

5.	6.
$\cos \varepsilon = 0,884$	$\cos \varepsilon = 0,8421$
$\zeta = 0,288$	$\zeta = 0,1281$
$\mathfrak{P} = 0,856$	$\mathfrak{P} = 1,300$
$\mathfrak{Q} = 2,156 \text{ m/sec}$	$\mathfrak{Q} = 0,8421$
$a_1 = 12,43 \text{ m/sec}$	$a_1 = 0,05245$
$a_2 = 1,146 \text{ m/sec}$	$a_2 = 1,300$
$a_1^1 = 0,856$	$a_1^1 = 0$
$a_2^1 = 2,156 \text{ m/sec}$	$a_2^1 = 2,156 \text{ m/sec}$

$$H = \frac{\lambda}{2\pi} 0,517.$$

Wir sehen hieraus, dass die relative Geschwindigkeit beider Medien und die Geschwindigkeit der Wellen bei ruhenden tief liegenden Schichten des dichteren Mediums gesondert auf die Wellenform einwirken. Dabei ist ihr Einfluss ein entgegengesetzter; *der stärkere Wind bei geringerer Wellengeschwindigkeit bedingt Wellen mit runderen Köpfen, während die Wellen bei schwachem Winde und grösserer Wellengeschwindigkeit spitzer werden.*

Diesen Einfluss kann man auch dadurch feststellen, dass man die obere und untere Flüssigkeit vertauscht, wobei auch  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  vertauscht werden, und erhält nun da, wo vorher starker Wind und geringe Wellengeschwindigkeit war, jetzt schwachen Wind und grosse Wellengeschwindigkeit und umgekehrt, während die Figuren umzudrehen sind.

Bei Luft und Wasserwogen kommen dieselben Formen vor, nur sind die zugehörigen Strömungen verschieden. Besonders gross ist der Unterschied in der relativen Geschwindigkeit beider Medien, die bei Wasserwellen, gleiche Wellenform vorausgesetzt, sehr viel grösser ist als bei Luftwellen. Es ist nämlich

$$a_1^1 = 0,06417 a_1, \quad a_2^1 = 1,881 a_2,$$

wenn die Wellenlänge der Luftwellen hundert mal so gross ist, als die der Wasserwellen.

Ausser den Wellenformen ergeben sich aus den durchgeführten Rechnungen die sehr beträchtlichen Unterschiede der Luft von Wellenberg und Wellenthal. Bezeichnen wir diese mit  $V_1$  und  $v_1$  für die Luft, mit  $V_2$  und  $v_2$  für das Wasser, so erhalten wir aus den oben dargestellten Rechnungen

$$\left. \begin{aligned} V_1 \\ v_1 \end{aligned} \right\} = \frac{a_1}{1 \mp 2 (e^{-h} \cos \varepsilon \mp e^{-2h} \cos 2\varepsilon)}$$

$$\left. \begin{aligned} V_2 \\ v_2 \end{aligned} \right\} = - \frac{a_2 (1 \mp \frac{2 \cos \varepsilon}{\cos h i} + \frac{2 \cos 2\varepsilon}{\cos 2h i})}{1 \mp 2 (e^{-h} \cos \varepsilon \mp e^{-2h} \cos 2\varepsilon)}.$$

Die Geschwindigkeiten an den entsprechenden Stellen im Innern der Luftmasse erhält man einfach aus den Ausdrücken für  $V_1$  und  $v_1$ , wenn man anstatt  $h$  das entsprechende  $\eta$  einsetzt. Im Innern der Wassermasse erhält man für  $V_2$  und  $v_2$

$$\left. \begin{aligned} V_2 \\ v_2 \end{aligned} \right\} = a_2 \left( -1 + \frac{2 \left( e^{-\eta} + e^{\eta} \pm 2 \cos \varepsilon \right) \times \left( \pm e^{-h} \cos \varepsilon \frac{e^{\eta} - e^{-\eta}}{e^h + e^{-h}} - e^{2h} \cos 2\varepsilon \frac{e^{2\eta} - e^{-2\eta}}{e^{2h} + e^{-2h}} \right)}{e^{\eta} - e^{-\eta}} \right).$$

So ergeben sich für die Welle 1 und 3

$$\begin{aligned} V_1 &= 1,283 a_1 & v_1 &= 0,779 a_1 \\ V_2 &= -0,726 a_2 & v_2 &= -1,214 a_2. \end{aligned}$$

Die in Fig. 2 gezeichnete Stromlinie liegt in der Höhe  $\lambda / 2\pi 0,106$  über dem Wellenberg. Die Geschwindigkeiten am Wellenthal und Wellenberg dieser Stromlinie sind

$$v_1 = 0,804 a_1 \quad V_1 = 1,245 a_2.$$

Diese absolute Geschwindigkeit des Wassers bei ruhendem Tiefwasser ist  $V_2 + a_2$  und  $v_2 + a_2$ . Es strömt an den Wellenthälern in entgegengesetzter Richtung wie an den Wellenbergen. Identische Wassertheilchen beschreiben geschlossene Curven. Die absolute Geschwindigkeit ist unter dem Wellenthal in einer Tiefe

$$\begin{aligned} \lambda / 2\pi 0,151 & \quad - 0,181 a_2 \\ \lambda / 2\pi 2,458 & \quad - 0,017 a_2. \end{aligned}$$

## 6. Abbildung durch elliptische Functionen.

Die folgenden Abbildungen stützen sich auf gewisse Eigenschaften der elliptischen Functionen, die ich voranschicken will.

Wir bezeichnen mit

$K$  das vollständige elliptische Integral erster Gattung in Bezug auf den Modul  $k$ ,

$K'$  dasselbe Integral in Bezug auf den Modul  $\sqrt{1-k^2} = k'$ ,

$q$  die Grösse  $e^{-\pi \frac{K'}{K}}$ .

Wir setzen nun

$$X + Yi = \log \sin \operatorname{am} \left\{ \frac{2K}{\pi} [\vartheta + (\eta - h)i] + \frac{iK'}{2} \right\},$$

ferner zur Abkürzung

$$\frac{2K}{\pi} \vartheta = u, \quad \frac{2K}{\pi} (\eta - h) - \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4} = v, \quad \sin \operatorname{am} u = z,$$

so folgt

$$X = \frac{1}{2} \log \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \cos^2 \operatorname{am} iv \Delta^2 \operatorname{am} iv - \sin^2 \operatorname{am} iv \cos^2 \operatorname{am} u \Delta^2 \operatorname{am} u}{[1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} iv]^2}.$$

Für  $\eta = h$  wird  $v = K'/2$ ,  $\sin \operatorname{am} iv = i/\sqrt{k}$ ,  $\cos \operatorname{am} iv \Delta \operatorname{am} iv = (1+k)/\sqrt{k}$  und

$$(12) \quad X = \frac{1}{2} \log \frac{x^2(1+k)^2 + (1-x^2)(1-k'^2x^2)}{k(1+kx^2)^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1}{k}.$$

Ferner wird die Function

$$\log \sin \operatorname{am} \left[ \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i) + iK' \right] = \log \frac{1}{k \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i)}.$$

Für  $\vartheta = \eta = 0$  unendlich wie

$$(13) \quad \log \frac{1}{k} + \log \frac{1}{\frac{2K}{\pi}} + \log \frac{1}{\vartheta + \eta i},$$

wie aus der bekannten Potenzreihe folgt. Also wird der reelle Theil gleich

$$\log \frac{1}{k} + \log \frac{1}{\frac{2K}{\pi}} + \log \frac{1}{\sqrt{\vartheta^2 + \eta^2}}.$$

Endlich wird die Function

$$\log \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i)$$

für  $\vartheta = \eta = 0$  negativ unendlich wie

$$(14) \quad \log \frac{2K}{\pi} + \log (\vartheta + \eta i).$$

Wir setzen nun zunächst

$$n(x + yi) = \log (\sigma + \tau i) = \log \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i) + \log c_0$$

$$\frac{\psi_1 + i\varphi_1}{b_1} = \log \sin \operatorname{am} \left[ \frac{2K_1}{\pi} (\vartheta + (\eta - h)i) + \frac{iK'_1}{2} \right] - \frac{1}{2} \log \frac{1}{k_1}$$

$$\frac{\psi_2 + i\varphi_2}{b_2} = \log \sin \operatorname{am} \left[ \frac{2K_2}{\pi} (\vartheta + (\eta - h)i) + \frac{iK'_2}{2} \right] - \frac{1}{2} \log \frac{1}{k_2}.$$

Dann ist für  $\eta = h$  nach (12)  $\psi_1 = \psi_2 = 0$ .

Setzen wir nun

$$\frac{K_1 K'}{K} - \frac{2}{\pi} K_1 h + \frac{K'_1}{2} = K'_1, \quad \text{d. h. } q e^{-2h} = \sqrt{q_1},$$

so wird nach (13) für

$$\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{2}, \quad \vartheta = 0.$$

$$nx = -\log k - \log \frac{2K}{\pi} - \log \sqrt{\vartheta^2 + (\eta - K')^2} + \log c_0$$

$$\frac{\psi_1}{b_1} = -\frac{1}{2} \log k_1 - \log \frac{2K_1}{\pi} - \log \sqrt{\vartheta^2 + (\eta - K'_1)^2}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = nb_1 = a_1 \quad \text{für } \vartheta = 0, \quad \eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{2}, \quad x = \infty.$$

Wir setzen weiter

$$\frac{2K_2}{\pi} h = \frac{K'_2}{2}, \quad \text{also } q_2 = e^{-4h}.$$

Dann ist nach (14) für  $\vartheta = \eta = 0$

$$nx = \log \frac{2K}{\pi} + \log \sqrt{\vartheta^2 + \eta^2} + \log c_0$$

$$\frac{\psi_2}{b_2} = \log \frac{2K_2}{\pi} + \log \sqrt{\vartheta^2 + \eta^2} - \frac{1}{2} \log \frac{1}{k_2}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = b_2 n = -a_2 \quad \text{für } \vartheta = \eta = 0, x = -\infty.$$

Aus der Druckgleichung folgen dann unter Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung von

$$e^{-6h}, qe^{-2h}, q^3e^{6h}, q^2e^{2h}$$

die beiden Gleichungen

$$(15) \quad \begin{cases} 1 - 4e^{-4h} + 12q^2e^{4h} - qe^{4h} + 4q^3e^{8h} - 12q \\ - (2\mathfrak{P} + 2\mathfrak{D})(1 - qe^{4h} - 8q + 8q^2e^{4h}) = 0 \\ (\frac{3}{4} - 2\mathfrak{P})qe^{4h} + (\frac{3}{4} - 2\mathfrak{D}) = 0. \end{cases}$$

Diese Gleichungen bleiben auch für negative  $q$  gültig. Setzen wir

$$\mathfrak{R} = k'K, \quad \mathfrak{R}' = k'(K - iK'), \quad q = e^{-\pi \frac{\mathfrak{R}'}{\mathfrak{R}}} = -q,$$

so ist der zu  $\mathfrak{R}$  gehörende Modul  $ik/k'$ . Nun ist

$$\sin \operatorname{am} \left( v, \frac{ik}{k'} \right) = \frac{k' \sin \operatorname{am} \left( \frac{v}{k'}, k \right)}{A \operatorname{am} \left( \frac{v}{k'}, k \right)} = \cos \operatorname{am} \left[ \frac{v}{k'} - K, k \right],$$

also

$$\sin \operatorname{am} \frac{2\mathfrak{R}}{\pi} (\vartheta + \eta i) = \cos \operatorname{am} \left[ \frac{2K}{\pi} (\vartheta + \eta i) - K \right].$$

Negative  $q$  ergeben also die durch die Function  $\cos \operatorname{am}$  bedingten Wellenformen. Dabei bleiben  $q_1$  und  $q_2$  unverändert. Die Wellenhöhe ist

$$H = \frac{\lambda}{\pi} \log \frac{\cos \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} ih A \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} ih}{\frac{1}{i} \sin \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} ih \left( 1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{2K}{\pi} ih \right)}.$$

Für die Berechnung der Energie ergibt sich

$$v_1 = a_1 \mathfrak{S}_1 - \left[ \log \frac{\sqrt{k_1} K_1}{k K} + \log c_0 \right] b_1$$

$$\log c_0 = -h - \log \sqrt[4]{\frac{q}{k}} + (e^{-4h} - q^2 e^{4h}) + \frac{1}{2} (e^{-8h} - q^4 e^{8h})$$

$$-v_2 = -a_2 \mathfrak{S}_2 - \left[ \log \left[ \frac{K_2 \sqrt{k_2}}{K} \right] - \log c_0 \right] b_2.$$

Also

$$(16) \quad \begin{cases} r_1 = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \log \frac{\sqrt{k_1} K_1}{k K} + \log c_0 \right\} \\ r_2 = \frac{\lambda}{\pi} \left\{ \log \frac{\sqrt{k_2} K_2}{K} - \log c_0 \right\}. \end{cases}$$

Nun ist

$$K = \frac{\pi}{2} \{1 + 2q + 2q^4 + \dots\}^2$$

$$k^2 = 16q - 128q^2 + 704q^3 \dots$$

Vernachlässigt man die höheren Glieder, so ist

$$\frac{k^2}{q} = 16 - 128q + 704q^2, \quad \log \frac{k^2}{q} = 4 \log 2 - 8q + 12q^2$$

und

$$(17) \quad \begin{cases} r_1 = \frac{\lambda}{\pi} \left( (e^{-2h} - qe^{2h})^2 + \frac{1}{2} (e^{-8h} - 3q^4 e^{8h} + 2q^2) \right) \\ r_2 = \frac{\lambda}{\pi} \left( (e^{-2h} - qe^{2h})^2 + \frac{1}{2} (q^4 e^{8h} - 3e^{-8h} + 2q^2) \right). \end{cases}$$

Die potentielle Energie ist

$$(18) \quad \begin{cases} F = \frac{g(s_2 - s_1)\lambda^3}{4\pi^2} \left\{ (e^{-2h} - qe^{2h})^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{4} (e^{-4h} - q^2 e^{4h})^2 - 2q(e^{-2h} - qe^{2h})^2 \right\}. \end{cases}$$

Die durch Gleichung (10) definirte Grösse  $D$ , der Unterschied zwischen ebener Oberfläche und Wogenbildung, ist, wenn wir noch  $qe^{4h} = \varepsilon$  setzen

$$(10b) \quad D = \frac{\lambda^3 g(s_2 - s_1) e^{-8h}}{16\pi^2} \left( \frac{-21(1 - \varepsilon^5) + 14(\varepsilon^2 - \varepsilon^3) + 25(\varepsilon - \varepsilon^4)}{1 - \varepsilon - 8e^{-4h}(\varepsilon - \varepsilon^2)} \right).$$

Aus (15) folgt in erster Annäherung

$$2\mathfrak{P} + 2\mathfrak{D} = 1, \quad 2\mathfrak{P} = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon}{\varepsilon - 1}.$$

Da weder  $\mathfrak{P}$  noch  $\mathfrak{D}$  negativ werden dürfen, so kann  $\varepsilon$  nicht in die Nähe des Werthes 1 gelangen, während  $\varepsilon = 1$  der glatten Oberfläche entspricht, wobei  $q = q_1 = q_2$  und  $\psi_1/b_1 = \psi_2/b_2 = nx + \text{const}$ , werden.

Ist  $\varepsilon$  klein, wo wird  $D$  negativ, ist  $\varepsilon$  gross gegen 1, so wird der Zähler positiv, der Nenner negativ, sodass sich keine mit (15) verträglichen Werthe von  $\varepsilon$  finden lassen, die  $D$  positiv machen.

Auch hier fällt der Unterschied zwischen den Energien wogender Flüssigkeiten und ebener Oberfläche in erster Annäherung fort und erst bei Berücksichtigung der zweiten Glieder bekommt  $D$  einen von Null verschiedenen Werth.

### 7. Gleichgewicht der Wellen.

Aus den gewonnenen Werthen für die Energie der Wellen können wir ersehen, dass der Energievorrath ganz niedriger Wellen gleich dem bei ebener Grenzfläche ist, wenn man nur die erste Annäherung berücksichtigt, dass aber die weiteren Glieder zeigen, dass der Energievorrath der Wellen einen etwas grösseren Werth besitzt. Hieraus ist zu schliessen, dass die ebene Grenze der Zustand stabilen Gleichgewichtes ist, wenn beide Flüssigkeiten strömen, gegenüber ruhenden Wellen. Dies Verhältniss kann sich aber umkehren, wenn wir fortschreitende Wellen betrachten. Nehmen wir an, das Tiefwasser sei in Ruhe. Dann haben wir in den Gleichungen (4)  $a_3 = 0$  zu setzen. Es sei nun  $D$  der Unterschied der Energie bei ebener Grenzfläche von dem bei ruhenden Wellen,  $D'$  der Unterschied bei ruhendem Tiefwasser, so erhalten wir aus (4), indem wir einmal  $a_2 = 0$ ,  $a_3 = a_2$ , dann  $a_3 = 0$  setzen:

$$(19) \quad D - D' = a_2 \lambda (s_2 a_2 r_2 - s_1 a_1 r_1).$$

$D$  war nun in den von uns betrachteten Fällen eine negative Grösse, die von den Gliedern zweiter Ordnung gebildet wurde. Wenn wir nun die Wellenhöhe sehr klein annehmen, so können wir die Grösse  $D$  ebenfalls beliebig klein gegenüber den Gliedern erster Ordnung machen.

Die in  $r_1$  und  $r_2$  enthaltenen Glieder erster Ordnung können dann bewirken, dass  $D'$  einen positiven Werth erhält. Wie unsere Rechnungen zeigten ist für ganz niedrige Wellen, bei Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung  $r_1 = r_2$  und die Gleichungen (7), (11), (15) ergeben alle die eine Gleichung:

$$(20) \quad s_1 a_1^2 + s_2 a_2^2 = \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2 \pi}.$$

$D'$  kann einen negativen Werth erhalten, wenn  $a_1$  gross gegen  $a_2$  wird. Und zwar muss mindestens:

$$a_1 = \frac{a_2 s_2}{s_1}$$

sein. Hieraus folgt in Verbindung mit (12):

$$a_2^2 = \frac{g \lambda (s_2 - s_1) s_1}{2\pi (s_2 + s_1) s_2}.$$

Nehmen wir  $\lambda = 1$  m,  $s_2 = 773,4$ ,  $s_1 = 1$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} a_2 &= 0,04488 \text{ m/sec}, & a_1 &= 34,71 \text{ m/sec}, \\ a_2 + a_1 &= w = 34,755 \text{ m/sec}. \end{aligned}$$

*Mindestens in dieser Stärke muss der Wind über eine ebene Wasseroberfläche hinfahren, wenn er augenblicklich Wellen von annähernd 1 m Länge erregen soll.*

Für schwächeren Wind nimmt die Länge der Wellen, die er erregen kann, sehr schnell ab, weil die Quadrate der Geschwindigkeiten maassgebend sind. Ein Wind von der Stärke 3,475 m/sec würde nur Wellen von nahe 1 cm erregen können.

Diese den Zustand des stabilsten Gleichgewichtes bildenden Wellen sind indessen von sehr geringer Höhe. Das folgende Beispiel zeigt, wie bei einer Wellenhöhe von ungefähr  $(\lambda/\pi)0,07$  bereits wieder grösserer Energievorrath der fortschreitenden Wellen eintritt, weil die Glieder zweiter Ordnung den Werth der Energie erhöhen.

Es ist nach den Formeln des § 6:

$$\begin{aligned} 2\mathfrak{P} &= 0,9327 & r_1 &= 0,005313 & \varepsilon &= 4 & e^{-2h} &= 0,02462 \\ 2\mathfrak{Q} &= 0,001 & r_2 &= 0,005500 & qe^{2h} &= 0,09847 & q &= 0,0002424 \\ a_1 &= 33,62 \text{ m/sec} & a_2 &= 0,03949 \text{ m/sec} & \lambda &= 1 \text{ m} \\ D &= -0,08694 \text{ m}^4/\text{sec}^2 & D' - D &= -0,0001337 \text{ m}^4/\text{sec}^2. \end{aligned}$$

$D'$  hat bereits wieder erheblichen negativen Werth. Also nur Wellen von ganz geringer Höhe kann ein vollkommen gleichmässiger Wind erregen, die dann, einmal in Bewegung, durch Interferenz mit anderen Systemen Wellen von grösserer Höhe und Fortpflanzungsgeschwindigkeit bilden können, wie dies von Helmholtz ausführlich auseinandergesetzt ist.

#### 8. Wellen unter Wind auf flachem Wasser.

Wenn wir in der Abbildung des § 6 für  $\psi_1 + i\varphi_1$  setzen:

$$\frac{\psi_1 + i\varphi_1}{b_1} = -h - i(\mathcal{F} + i\eta),$$



so ist für  $\eta = h$ ,  $\psi_1 = 0$ . Nach (12) wird für

$$\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4}, \quad nx = \frac{1}{2} \log \frac{1}{k} + \log c_0 = \frac{L\pi}{\lambda}.$$

In dieser Entfernung  $L$  von der Niveaubene strömt die obere Flüssigkeit horizontal. Ihre Geschwindigkeit ist aber nicht constant. Es ist nämlich

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \eta}}{\left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}.$$

Für

$$\eta = \frac{K'}{K} \frac{\pi}{4}$$

wird

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = 0, \quad n \frac{\partial x}{\partial \eta} = 1 + 4\sqrt{q} \cos 2\vartheta + 4q \cos 4\vartheta + \dots,$$

also

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \frac{nb_1}{1 + 4\sqrt{q} \cos 2\vartheta + 4q \cos 4\vartheta + \dots}.$$

$nb_1 = a_1$  ist die mittlere Geschwindigkeit der horizontalen Strömung. (In meiner letzten Arbeit ist ein anderer Werth dieser Geschwindigkeit mit  $a_1$  bezeichnet.) Wenn wir die Ausdrücke für  $L_1$  bilden und integriren über eine ganze Wellenlänge, so fallen die periodischen Glieder fort und wir erhalten dasselbe Ergebniss wie oben.

Für  $L$  findet sich

$$\frac{\pi L}{\lambda} = \frac{1}{4} \log \frac{1}{\varepsilon} + e^{-4h} - q^2 e^{4h} + \frac{1}{2} (e^{-8h} - q^4 e^{8h}).$$

Wir haben auch hier zu setzen:

$$(22) \quad 2\mathfrak{D} = \frac{2\pi \alpha_2^2 s_2}{g\lambda(s_2 - s_1)}, \quad 2\mathfrak{P} = \frac{2\pi b_1^2 n^2 s_1}{g\lambda(s_2 - s_1)}.$$

Aus der Druckgleichung ergeben sich die Gleichungen, wenn die Näherung ebenso weit getrieben wird wie früher

$$(23) \quad \begin{cases} 2\mathfrak{D} = \frac{3}{4}(1 + \varepsilon) \\ 2\mathfrak{P} = \frac{1 - \varepsilon - 4e^{-4h}(1 - \varepsilon^3 - 3(\varepsilon^2 - \varepsilon)) - 2\mathfrak{D}(1 - \varepsilon - 8e^{-4h}\varepsilon(1 - \varepsilon))}{1 + \varepsilon}. \end{cases}$$

Unter Benutzung der Entwicklungen des § 6 folgt ferner :

$$r_1 = \frac{\lambda}{\pi} e^{-4h} \left( 1 - \epsilon^2 + \frac{1}{2} e^{-4h} (1 - \epsilon^4) \right)$$

$$r_2 = \frac{\lambda}{\pi} e^{-4h} \left( (1 - \epsilon)^2 + \frac{1}{2} e^{-4h} (\epsilon^4 - 3 + 2\epsilon^2) \right).$$

Die potentielle Energie und  $\log c_0$  haben dieselben Werthe wie oben. Deshalb ergibt sich

$$(24) \quad D = \frac{e^{-8h} \lambda^3 g (s_2 - s_1)}{16 \pi^2} \left( \frac{-21 - 28\epsilon + 58\epsilon^2 + 16\epsilon^3 + 12\epsilon^5 - 37\epsilon^4}{1 + \epsilon} \right).$$

Für kleine Werthe von  $\epsilon$  ist  $D$  negativ;  $\epsilon$  darf nicht grösser als 1 werden, weil sonst die horizontale Strömungslinie die Wellenlinie schneidet. Für Werthe von  $\epsilon$ , die näher an der Einheit liegen, ist  $D$  auch negativ, wie man sieht, wenn man  $1 - \delta = \epsilon$  setzt und noch die quadratischen Glieder berücksichtigt. Es folgt

$$D = \frac{e^{-8h} \lambda^3 g (s_2 - s_1)}{16 \pi^2} \left\{ \frac{-48\delta + 4\delta^2}{2 - \delta} \right\}.$$

Man überzeugt sich so, dass  $D$  stets negativ bleibt.

Negative Werthe von  $\epsilon$  sind ebenfalls ausgeschlossen. Labile Zustände der Strömungen bei ebener Grenzfläche gegenüber der Wogenbildung können auch hier erst bei Berücksichtigung fortschreitender Wellen entsprechend Gleichung (19) eintreten. Da wir die Höhe der Wellen beliebig klein annehmen können, so brauchen wir auch hier nur die erste Näherung zu berücksichtigen. Wir erhalten dann den Minimalwerth von  $a_1$ , der Wellen vorgeschriebener Länge erzeugen kann aus der Gleichung

$$(25) \quad a_1 r_1 s_1 = a_2 r_2 s_2$$

in Verbindung mit

$$2 \mathfrak{P} \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} + 2 \mathfrak{Q} = 1.$$

Wie wir oben gesehen haben, können wir die obere und die untere Flüssigkeit vertauschen, wenn wir  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$  vertauschen. Wir haben dann die Grösse  $\mathfrak{P}$  auf das Wasser,  $\mathfrak{Q}$  auf die Luft zu beziehen. In unserem Falle erhalten wir dann eine Wassermasse, die in endlicher Entfernung von den Wellen durch festen Boden horizontal begrenzt wird, während die Luftmasse sich ins Unendliche ausdehnt. Dann ist  $a_1$  die

Geschwindigkeit der Wellen bei ruhendem Tiefwasser,  $a_2$  die Luftgeschwindigkeit relativ zu den Wellen. Wir erhalten aus (25) und (23) in erster Näherung

$$2\mathfrak{P} \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + 2\mathfrak{D} = 1, \quad \mathfrak{D} = \frac{\pi a_1^2 s_1}{g \lambda (s_2 - s_1)}, \quad \mathfrak{P} = \frac{\pi a_2^2 s_2}{g \lambda (s_2 - s_1)},$$

$$2\mathfrak{P} = \frac{1}{1 + \frac{s_1}{s_2} \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}.$$

Nun ist in erster Näherung die Wassertiefe

$$L = \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{4} \log \frac{1}{\varepsilon},$$

also

$$2\mathfrak{D} = \frac{1}{1 + \frac{s_1}{s_2} \frac{1 - e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 + e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}}}},$$

$$2\mathfrak{P} = \frac{1 - e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 + e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}} \frac{1 + e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 - e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}}}}.$$

Man sieht aus diesem Ausdruck, dass der Einfluss der Wassertiefe auf den Grenzwert der Wellenlänge, der von einer bestimmten Windstärke unmittelbar erreicht werden kann, sehr gering ist, da schon  $s_1/s_2$  eine kleine Grösse ist. Stationärer Wind wird daher sowohl auf tiefem wie auf flachem Wasser mit ganz ebener Oberfläche Wellen von annähernd derselben Wellenlänge erregen, auf flachem Wasser etwas kürzere.

Dagegen hat die Wassertiefe bei höheren Wellen, bei denen in der Druckgleichung noch die Glieder zweiter Ordnung von Einfluss sind, Bedeutung für die Stabilität.

Aus (23) folgt

$$2\mathfrak{D} = \frac{3}{4} \left( 1 + e^{-\frac{4\pi L}{\lambda}} \right).$$

Sobald die Wassertiefe klein gegen  $\lambda$  wird, ist  $e^{-(4\pi L/\lambda)}$  nicht

mehr gegen 1 zu vernachlässigen und zu vorgeschriebenen Werthen der Wellenlänge und der Wassertiefe gehören verschiedene Werthe der Luftströmung. Wenn aber die letztere gegeben ist, so müssen die Wellenlängen geändert werden. Bei geringer Wassertiefe ist  $\mathfrak{D}$  grösser als bei grösserer, soll also  $a_1$  ungeändert bleiben, so muss  $\lambda$  kleiner werden. Eine Folge hiervon ist die Brandung langer Wellen an den Untiefen, über denen immer noch Systeme kürzerer Wellen hinziehen können.

In Fig. 4 sind zwei Wellenformen gezeichnet, von denen die eine 7 in endlicher Tiefe horizontale Strömungen besitzt, während die andere zu den früheren betrachteten Systemen gehört. Die berechneten Werthe sind folgende:

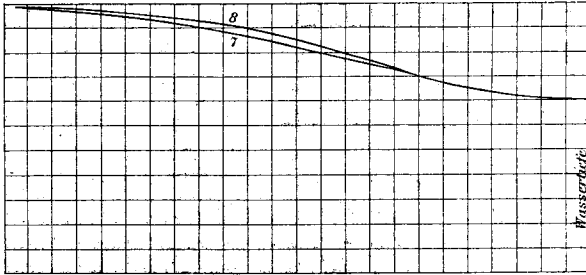


Fig. 4.

$q = 0,002$	$k = 0,1774$	$\zeta = 0,292$	8. $\cos \varepsilon = 0,8578$
$e^{4h} = 50$	$k' = 0,9842$	$\mathfrak{P} = 0,1096$	$\mathfrak{D} = 0,8647$
$q' = 0,2044$	$h = 0,9780$	$a_1 = 32,30 \text{ m/sec}$	$a_2 = 0,413 \text{ m/sec}$
$\mathfrak{D} = 0,0339$	$H = \frac{\lambda}{\pi} 0,2559$		
$\mathfrak{P} = 0,4125$	$L = \frac{\lambda}{\pi} 0,5956$		
$a_1 = 31,54 \text{ m/sec}$			
$a_2 = 0,325$			

$\lambda = 1 \text{ m.}$

9. Einfluss des Windes auf die Geschwindigkeit niedriger Wellen.

Die Entwicklungen des vorigen Abschnittes setzen uns in den Stand, die Abhängigkeit der Wellengeschwindigkeit vom Winde bei beliebiger Wassertiefe zu bestimmen, wenn die

Wellen niedrig genug sind, dass die Verschiedenheiten in der Form fortfallen. Setzen wir  $(1 + \varepsilon/1 - \varepsilon) = \gamma$ , so haben wir

$$(26) \quad a_2^2 s_2 \gamma + a_1^2 s_1 = \frac{(s_2 - s_1) g \lambda}{2 \pi}.$$

Nun ist die absolute Windstärke  $w = a_1 \mp a_2$ , je nachdem die Wellen entgegen oder mit dem Winde fortschreiten. Hier-nach ergibt sich

$$a_2 = \frac{w \frac{s_1}{s_2} \mp \sqrt{\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right) \frac{g \lambda}{2 \pi} \left(\frac{s_1}{s_2} + \gamma\right) - w^2 \gamma \frac{s_1}{s_2}}{\frac{s_1}{s_2} + \gamma}.$$

Ist  $w = 0$ , d. h. wenn die Luft absolut ruht, so ist

$$a_2 = \sqrt{\frac{\left(\frac{s_2}{s_1} - 1\right) \frac{g \lambda}{2 \pi}}{\left(1 + \gamma \frac{s_2}{s_1}\right)}}.$$

Es wird also

$$a_2 = \frac{w \frac{s_1}{s_2}}{\frac{s_1}{s_2} + \gamma} \mp \sqrt{a_2^2 - \frac{w^2 \gamma \frac{s_1}{s_2}}{\left(\frac{s_1}{s_2} + \gamma\right)^2}}.$$

Dieser Ausdruck geht für  $\gamma = 1$ , also unendliche Wassertiefe, in den von Lord Kelvin<sup>1)</sup> gegebenen über. Wenn der Wind den Wellen entgegen strömt, so verringert er ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit.  $w$  darf nicht grösser sein als

$$\frac{a_2 \left(\frac{s_1}{s_2} + \gamma\right)}{\sqrt{\gamma \frac{s_1}{s_2}}},$$

wenn die Wellen noch stabil sein sollen.

Ist  $w = 2a_2$ , so ist  $a_2 = a_2$ , wenn Wind und Wellen gleiche Richtung haben, d. h. es ist von gleichem Einfluss ob die Wellen mit der Geschwindigkeit  $a_2$  der Luft voraus eilen oder um ebenso viel zurückbleiben.

Ist  $w$  grösser als dieser Werth, so ist die Geschwindigkeit der Wellen kleiner, im entgegengesetzten Fall grösser als bei ruhender Luft.

1) Lord Kelvin, Phil. Mag. (4) 42. p. 369. 1871.

Ist

$$w > a_2 \sqrt{1 + \gamma \frac{s_2}{s_1}},$$

so kann  $a_2$  nicht mehr negativ werden und es existiren keine Wellen von der vorgeschriebenen Wellenlänge, die gegen den Wind laufen.

Ist die Wassertiefe klein gegen die Wellenlänge, so ist  $\gamma = \infty$ .

$$a_2 = \mp \sqrt{a_2^2 - \frac{w^2 s_1}{\gamma s_2}} = \mp \sqrt{Lg \left(1 - \frac{s_1}{s_2} \left(1 + w^2 \frac{2\pi}{\lambda g}\right)\right)}.$$

Die Wellengeschwindigkeit ist dieselbe, ob der Wind gegen die Wellen oder mit ihnen läuft; sie wird in beiden Fällen durch den Wind verringert. Hier muss

$$w < \sqrt{\frac{\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right) \frac{\lambda g}{2\pi}}{\frac{s_1}{s_2}}}$$

sein.

Setzen wir die Dichtigkeit der Luft  $s_1 = 0$ , so wird

$$a_2 = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi\gamma}}.$$

Dieser Ausdruck stimmt, wenn man für  $\gamma$  seinen Werth

$$\frac{\frac{2\pi L}{\lambda} + e^{-\frac{2\pi L}{\lambda}}}{\frac{2\pi L}{\lambda} - e^{-\frac{2\pi L}{\lambda}}}$$

setzt, mit dem aus der gewöhnlichen Theorie unendlich kleiner Schwingungen abgeleiteten überein <sup>1)</sup>, wo von dem Einflusse der Luft abgesehen wird.

Ist  $L$  klein gegen  $\lambda$ , so wird

$$a_2 = \sqrt{gL},$$

wenn  $s_1 = 0$ . Dagegen

$$a_2 = a_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right) Lg},$$

wenn  $s_1$  von Null verschieden und  $w = 0$  ist. Also bewegen sich niedrige Wellen auf ganz flachem Wasser etwas langsamer in ruhender Luft als wenn die Luft nicht vorhanden wäre.

1) Kirchhoff, Mechanik. 25. Vorles. p. 358.

Endlich erlaubt die Gleichung (26) noch Anwendung auf meteorologische Verhältnisse. Wenn sich an der Grenze von verschiedenen dichten Luftschichten stationäre niedrige Wellen ausgebildet haben, so kann diese Gleichung dazu dienen, eine der Grössen aus den übrigen zu berechnen. Die Länge dieser Wellen ist oft sehr bedeutend und die Entfernung der Niveaubene vom Erdboden kann unter Umständen nur von derselben Grössenordnung sein. Ihr Einfluss kann nach unseren Ergebnissen berücksichtigt werden.

Sind dagegen diese Luftwogen sehr hoch im Vergleich zur Wellenlänge, so haben wir die einfachere Gleichung

$$a_1^2 s_1 + a_2^2 s_2 = \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2\pi}.$$

Ist dann z. B. gegeben

$$\lambda = 800 \text{ m}, \quad a_2 = 5 \text{ m/sec}, \quad \frac{s_1}{s_2} = \frac{273}{283},$$

so ergibt sich  $a_1 = 4,45 \text{ m/sec}$ .

Werden  $s_1/s_2$  und  $a_2$  constant gehalten, so erhält  $\lambda$  seinen kleinsten Werth, wenn  $a_1 = 0$ , wenn keine relative Bewegung zwischen beiden Schichten vorhanden ist.

Kleinere Werthe der Wellenlänge können wir erhalten, wenn die untere Luftschicht nicht ruht, sondern mit der horizontalen Geschwindigkeit  $a_3$  strömt. Alsdann ergibt sich

$$s_2 \gamma (a_3 - a_2)^2 + a_1^2 s_1 = \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2\pi}$$

Ist  $a_3 = a_2$ , d. h. ziehen die Wellen mit derselben Geschwindigkeit wie die ganze untere Luftmasse dahin, so wird einfach

$$a_1^2 s_1 = \frac{g \lambda (s_2 - s_1)}{2\pi}.$$

In diesem Falle kommt nun die relative Geschwindigkeit beider Luftschichten zur Geltung, der Einfluss der Entfernung vom Erdboden fällt fort, und wir können aus der Wellenlänge und der relativen Geschwindigkeit den Unterschied der Dichtigkeit der beiden Luftschichten berechnen.