

## ANNALEN DER PHYSIK.

## VIERTE FOLGE. BAND 23.

1. *Die Entropie*  
*von partiell kohärenten Strahlenbündeln;*  
*von M. Laue.*

## Einleitung.

In einer im Vorjahr erschienenen Abhandlung „Zur Thermodynamik der Interferenzerscheinungen“<sup>1)</sup> wurde gezeigt, daß sich bei kohärenten Strahlenbündeln das Additionstheorem der Entropie: „Die Entropie eines Systems ist die Summe der Entropien seiner (räumlich getrennten) Teile“ nicht mit dem Prinzip der Zunahme der Entropie verträgt. Aus dem Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit wurde gefolgert, daß es das Additionstheorem ist, welches man aufgeben muß. Es wurde auch die Formel für die Entropie eines Systems monochromatischer Strahlenbündel gegeben, welche alle durch reguläre Reflexion und Brechung an selbst nicht strahlenden Körpern aus einem einzigen entstanden sind. Dort war demnach nur von vollständig kohärenten Strahlenbündeln die Rede. Entsendet aber einer dieser Körper selbst Strahlung von derselben Schwingungszahl wie das einfallende Licht, so vermischen sich mit dem reflektierten und dem gebrochenen Strahlenbündel zwei zu ihnen inkohärente, so daß die auf diese Weise entstehenden weder untereinander noch mit etwaigen dem einfallenden Licht kohärenten Strahlenbündeln vollkommen kohärent bleiben. Es wäre unmöglich, bei Interferenzerscheinungen zwischen Strahlenbündeln dieser Art absolut dunkle Minimalstellen zu erhalten, wie sie bei der Superposition gleich starker, vollkommen kohärenter Strahlen auftreten; andererseits addieren sich dabei die Energiegrößen nicht, wie bei vollständig in-

---

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906.

kohärenten Strahlen. Vielmehr bilden solche partiell kohärente Strahlenbündel den stetigen Übergang zwischen diesen beiden Extremen. Die Formel für ihre Entropie muß dementsprechend zwischen der sich aus dem Additionstheorem ergebenden, für absolut inkohärente Strahlenbündel und der für vollständig kohärente gültigen den stetigen Übergang vermitteln.

Um sie abzuleiten, bedürfen wir zunächst eines quantitativen Maßes für die Interferenzfähigkeit zweier Strahlenbündel. Dies, die „Kohärenz“, wie wir es nennen wollen, muß eine von den Intensitäten unabhängige, zudem meßbare, d. h. nur durch die zeitlichen Mittelwerte gewisser Energiequanten bestimmte Größe sein. Wir werden sie so wählen, daß sie stets ein positiver echter Bruch ist, dessen Grenzwerte 0 und 1 absolute Inkohärenz und vollständige Kohärenz bedeuten. Es ist jedoch bemerkenswert, daß nicht die Kohärenz selbst, sondern die sie zu 1 ergänzende Größe, die „Inkohärenz“, in den Formeln für die Entropie sowie in den die Kohärenzverhältnisse von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln beherrschenden Relationen auftritt.

Von seiten der Thermodynamik brauchen wir nur den Satz zu Hilfe zu ziehen, daß die Reflexion und Brechung an der Grenze nicht absorbierender Körper ein umkehrbarer Vorgang ist; da sich zwei inkohärente Strahlenbündel, deren Entropie bekannt ist, durch gemeinsame Reflexion und Brechung in zwei partiell kohärente verwandeln lassen, läßt sich auch die Entropie der letzteren berechnen (vgl. § 5). Nun wurde dieser Satz in der früheren Abhandlung zwar sehr wahrscheinlich gemacht, indem das ihm entgegenstehende Additionstheorem der Entropie beseitigt und die Umkehrbarkeit der Reflexion und Brechung an einer planparallelen Platte für monochromatisches Licht und der Wert  $\frac{1}{2}$  des Reflexionsvermögens unmittelbar gezeigt wurde. Doch blieb die Beweiskraft des letzteren Grundes für die Thermodynamik deswegen zweifelhaft, weil es fraglich schien, ob man aus einem kontinuierlichen Spektrum — nur von solchen wissen wir bestimmt, daß sie Entropie besitzen — hinreichend homogene Strahlung spektralanalytisch aussondern und dabei noch merkliche Energiemengen in der Hand behalten könnte — ganz abgesehen von der Beschränkung auf einen bestimmten Wert des Reflexionsver-

mögens. Deshalb wollen wir zuerst die letztere Frage entscheiden (§ 1) und dann die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung sowohl für die planparallele Platte, als die Grenze zweier Medien beweisen.

### Erster Teil.

#### Die Umkehrbarkeit der Reflexion und Brechung.

##### § 1. Die relative Breite der schmalsten aus einem kontinuierlichen Spektrum auszusondernden Bereiche.

Daß sich aus einem kontinuierlichen Spektrum von hoher Temperatur Bereiche isolieren lassen, die nicht wesentlich breiter als manche schmale Spektrallinien sind, zeigt der Rowlandsche Atlas des Sonnenspektrums, in welchem<sup>1)</sup> noch Fraunhofersche Linien getrennt erscheinen, deren Differenz der Wellenlängen  $\Delta\lambda$  zwischen  $\frac{1}{10}$  und  $\frac{1}{100}$  Å.-Einh., d. h. zwischen  $10^{-9}$  und  $10^{-10}$  cm, liegt. Die relative Breite des zwischen zwei solchen Linien befindlichen Spektralbereiches ist  $\Delta\lambda/\lambda$ , also etwa  $10^{-5}$ . Andererseits geht aus den neuerdings von Hrn. Schönrock<sup>2)</sup> übersichtlich zusammengestellten Resultaten Michelsons über die Sichtbarkeit der Interferenzen als Funktion des Gangunterschiedes hervor, daß die relative Breite bei manchen Spektrallinien von derselben Größenordnung ist. Denn mag man an der dort behaupteten Intensitätsverteilung, welche aus der (übrigens nur auf 10 Proz. genau bestimmten) Sichtbarkeitskurve keineswegs eindeutig hervorgeht<sup>3)</sup>, zweifeln, so ist doch diese Größenordnung sichergestellt; eine Änderung an ihr würde den Betrag des größten Gangunterschiedes, bei welchem die Interferenzen gerade noch sichtbar sind, wesentlich verändern. Nun liegt nach den Tabellen der Schönrockschen Arbeit die beobachtete relative Halbweite  $\delta/\lambda_0$  stets zwischen  $10^{-5}$  und  $10^{-6}$ , mit Ausnahme der dort genannten Linien des Quecksilbers ( $\delta/\lambda_0 = 7,8 \cdot 10^{-7}$ ), des Thalliums ( $\delta/\lambda_0 = 5,5 \cdot 10^{-7}$ ) und des Wismuts ( $\delta/\lambda_0 = 7,5 \cdot 10^{-7}$ ). Um zur relativen Breite zu gelangen, hat man aber  $\delta/\lambda_0$  noch mit einem zwischen 4

1) Vgl. H. Kayser, Handbuch der Spektroskopie 1. p. 123.

2) O. Schönrock, Ann. d. Phys. 20. p. 995, 1906.

3) Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5.) 31. p. 407. 1892.

und 5 liegenden Faktor zu multiplizieren<sup>1)</sup>, so daß man dafür stets die Größenordnung  $10^{-5}$  findet.

Natürlich soll hiermit nicht gesagt sein, daß auch das Licht der Spektrallinien Entropie besitzen müßte. Nur daß man in der Strahlungsthermodynamik von fast ebenso homogenem Licht reden darf, wie in den anderen Teilen der Optik, geht aus unserer Betrachtung hervor.

Häufig wird es aber gar nicht nötig sein, die vorausgesetzte Homogenität als so extrem hoch aufzufassen. In den Betrachtungen des dritten Paragraphen wird z. B. ein Prisma die Hauptrolle spielen, dessen Dispersion ohne Einfluß sein soll. Bei einem Flintglasprisma, das die beiden *D*-Linien eben noch trennt, muß<sup>2)</sup> die ausgenutzte Dicke aber mindestens 1 cm betragen. Es wäre nun ein Leichtes, sie wesentlich unter diese Grenze herunterzusetzen. Dann können wir das ganze Intervall zwischen den *D*-Linien als homogen betrachten, obwohl seine relative Breite ziemlich genau gleich  $10^{-3}$  ist.

## § 2. Die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung an einer planparallelen Platte.

Nach § 2 der früheren Arbeit läßt sich die Veränderlichkeit des Reflexionsvermögens  $r$  einer planparallelen Platte durch

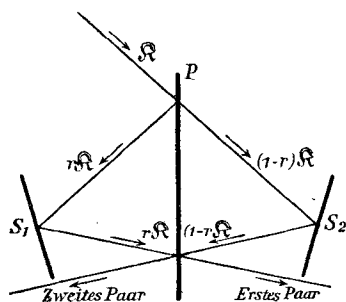


Fig. 1.

Verminderung ihrer Dicke so herabsetzen, daß es selbst für so breite Spektralbereiche, wie der soeben erwähnte, einen konstanten Wert hat. Wird nun ein in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes, hinreichend homogenes Strahlenbündel von der spezifischen Intensität  $\mathfrak{R}$  (vgl. Fig. 1) durch Spiegelung und Brechung an der Platte  $P$  in zwei neue zerlegt, deren Inten-

sitäten  $r\mathfrak{R}$  und  $(1-r)\mathfrak{R}$  sind, und werden diese darauf von den vollkommen reflektierenden, ebenen, zur Platte  $P$  symmetrisch

1) Vgl. § 6 der Schönrock'schen Arbeit.

2) Vgl. P. Drude, Lehrbuch der Optik, II. Aufl., Leipzig, Hirzel, 1906. p. 220.

liegenden Spiegeln  $S_1$  und  $S_2$  so auf die Platte zurückgeworfen, daß sie das zweite Mal unter anderem Einfallswinkel zu ihr gelangen, so entstehen vier Strahlenbündel von den spezifischen Intensitäten  $r(1-r')\mathcal{R}$ ,  $r'(1-r)\mathcal{R}$  und  $rr'\mathcal{R}$ ,  $(1-r)(1-r')\mathcal{R}$ . Von diesen überlagern sich die beiden ersteren sowie die beiden letzteren und interferieren miteinander; der Gangunterschied beträgt beim ersten Paar 0, beim zweiten  $\pi$ , ganz unabhängig von der Größe des Öffnungswinkels (vgl. § 2 der ersten Abhandlung). Wählen wir nun, was stets möglich ist,

$$r' = 1 - r,$$

so werden die Strahlenbündel des letzteren Paares an Intensität einander gleich, heben sich also auf. Die ganze Energie des einfallenden Strahlenbündels muß sich dann in dem aus der Interferenz des ersten Paares hervorgehenden Strahlenbündel wiederfinden; dies hat also, wie man auch auf rechnerischem Wege leicht bestätigt, wieder die volle Intensität  $\mathcal{R}$ . Damit ist die Umkehrung der ersten Reflexion und Brechung vollzogen.

Durch diese Überlegung ist aber die Umkehrbarkeit *jeder* regulären, absorptionsfreien Spiegelung und Brechung bewiesen. Im allgemeinen befinden sich zwar der gespiegelte und gebrochene Strahl in verschiedenen Mitteln; doch ist das unwesentlich, da man ein Strahlenbündel unter Benutzung des Polarisationswinkels ohne Verlust an Energie und Kohärenz aus jedem beliebigen Mittel in jedes andere austreten lassen kann. Auch die Spiegelung und Brechung an der Grenze kristallinischer Körper ist hier einbegriffen; denn die dabei auftretende Zerspaltung eines Strahlenbündels in mehr als zwei läßt sich immer durch eine Reihe von gewöhnlichen Spiegelungen und Brechungen ersetzen. Eine etwaige Krümmung der spiegelnden Flächen ändert hieran nichts.

Trotzdem wollen wir im folgenden Paragraphen die Umkehrbarkeit dieses Vorganges für die Grenze zweier isotropen Medien noch besonders beweisen. Bei der Neuheit des Gegenstandes kann eine doppelte Sicherung der Grundlagen nützlich scheinen.

§ 3. Die Umkehrbarkeit der Spiegelung und Brechung an der Grenze von zwei verschiedenen nicht absorbierenden Körpern.

Nehmen wir an, daß auf das bei  $A$  (Fig. 2) gelegene Flächenstück  $f$  der ebenen Grenze eines für Strahlung der betrachteten Wellenlänge durchsichtigen Körpers gegen das Vakuum ein hinreichend homogenes, in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisiertes Strahlenbündel aus dem letzteren kommend auffällt. Dann gehen von  $f$  zwei Strahlenbündel aus; das reflektierte schreitet in das Vakuum hinein fort, das

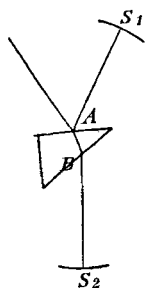


Fig. 2.

gebrochene dringt in den genannten Körper ein. Da nun aber selbst der durchsichtigste ponderabele Stoff die Strahlung auf längeren Strecken durch Absorption und Zerstreuung erheblich schwächt, wollen wir das letztere so gleich wieder in das Vakuum austreten lassen. Dies gelingt ohne nochmalige Zerlegung, wenn wir die Lage der zweiten Grenzfläche so wählen, daß das Strahlenbündel sie unter dem Polarisationswinkel und senkrecht zur Einfallsebene polarisiert erreicht; dies soll in Fig. 2 bei  $B$

der Fall sein. Die Substanz bildet dann ein Prisma, doch liegt der Strahlengang im allgemeinen nicht, wie in der Figur angenommen ist, in einer Ebene.

Das reflektierte Strahlenbündel lassen wir nun auf einen vollkommen spiegelnden Kugelspiegel  $S_1$  auftreffen, welcher einen Punkt  $A$  der Fläche  $f$  zum Mittelpunkt hat; sein Radius sei  $R$ , seine Brennweite  $\varphi$ ; bekanntlich ist

$$\varphi = \frac{R}{2}.$$

Es entwirft ein Bild von der Fläche  $f$ , dessen Lage und Form wir untersuchen wollen.

Beziehen wir die Koordinaten  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  eines Punktes und seines Bildes auf ein Achsenkreuz, dessen  $x$ -Achse mit der Richtung des Strahlenbündels nach der Spiegelung an  $S_1$  zusammenfällt, und dessen Anfang im Brennpunkt des Spiegels liegt, so lauten die Gesetze der geometrischen Optik

$$xx' = \varphi^2, \quad \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = -\frac{\varphi}{x}.$$

Für den Punkt  $A$  ist  $x = x'$ , da er offenbar in sich selbst abgebildet wird; also  $x = x' = \varphi$ . Für die seitliche und die Tiefenvergrößerung, die das ihn umgebende Flächenstück  $f$  bei der Abbildung erfährt, gilt demnach

$$\frac{y'}{y} = \frac{x'}{x} = -1,$$

$$\frac{dx'}{dx} = -\frac{\varphi^2}{x^2} = -1.$$

Ein Punkt  $C$  von  $f$  wird in denjenigen Punkt  $C'$  der Ebene von  $f$  abgebildet, welcher zu ihm in bezug auf  $A$  symmetrisch liegt (Fig. 3). Das Bild von  $f$  liegt in derselben Ebene wie  $f$  und unterscheidet sich von ihm nur durch eine Drehung vom Betrage  $\pi$  um den Punkt  $A$ . Wir fragen nun nach der optischen Weglänge  $W$  von  $C$  über einen Punkt des Spiegels  $S_1$  nach  $C'$ .

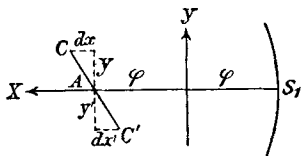


Fig. 3.

Zunächst ist unmittelbar einzusehen, daß  $W$  für alle Punkte von  $S_1$  denselben Betrag hat. Führen wir sodann in der Ebene von  $f$  ein Koordinatensystem  $\xi, \eta$  ein, dessen Anfang in  $A$  liegt, so folgt aus der Reziprozität zwischen Objekt- und Bildpunkt, daß  $W$  sich bei Vertauschung von  $C$  und  $C'$ , d. h. wenn man die Vorzeichen von  $\xi$  und  $\eta$  umkehrt, nicht ändert. Es gilt demnach in erster Näherung die Reihenentwicklung:

$$W = W_0 + \frac{1}{R} (a \xi^2 + b \eta^2 + c \xi \eta).$$

Nun ist  $W$  eine Länge; die einzigen ihm an Dimension gleichen unter seinen Bestimmungsstücken sind  $\xi, \eta$  und  $R$ . Die Koeffizienten  $a, b, c$  sind aber von  $\xi$  und  $\eta$ , daher auch von  $R$  unabhängig. Das Verhältnis der Differenz  $W - W_0$  zur Wellenlänge  $\lambda$ ,

$$\frac{W - W_0}{\lambda} = \frac{1}{R\lambda} (a \xi^2 + b \eta^2 + c \xi \eta),$$

läßt sich also durch Vergrößerung von  $R$  so klein machen, als man nur will, so groß die Dimensionen von  $f$  auch gegen  $\lambda$  sein mögen. Eine gegen die Wellenlänge kleine Strecke darf in der Optik stets gleich Null gesetzt werden. Wir werden daher  $W$  als längs der ganzen Fläche  $f$  konstant betrachten.

Auch das bei  $A$  gebrochene, bei  $B$  das Prisma verlassende

Strahlenbündel soll nun auf einen absolut reflektierenden Hohlspiegel  $S_2$  auftreffen. Im Gegensatz zu  $S_1$  darf dieser aber nicht Kugelform haben, da durch die Brechung bei  $B$  das Strahlenbündel astigmatisch geworden ist; er muß vielmehr so beschaffen sein, daß er jede Brennnlinie des letzteren in sich selbst abbildet. Dann kehrt das von ihm zurückgeworfene Strahlenbündel nach  $B$  zurück, tritt dort wiederum ohne Spiegelung in das Prisma ein, wird gleichzeitig homozentrisch und entwirft bei  $A$  ein Bild von  $f$ . Da die Gesetze der Abbildung unabhängig von der Art sind, wie wir sie verwirklichen, so gilt für die Abbildung durch  $S_2$  alles, was wir für die durch  $S_1$  bewirkte gesagt haben. Wählen wir als den in sich selbst abgebildeten Punkt wiederum  $A$ , so fallen die beiden Bilder von  $f$  genau zusammen und die beiden Strahlenbündel interferieren bei ihrer Rückkehr in jedem Punkt der Bildfläche mit ein- und demselben Phasenunterschied.

Bei  $A$  entstehen durch abermalige Spiegelung und Brechung im allgemeinen zwei neue Strahlenbündel, von denen das eine in die Prismensubstanz eindringt. In ihm superponieren sich zwei Strahlenbündel von gleicher Intensität; denn jedes von ihnen ist durch eine Reflexion und eine Brechung bei  $A$  geschwächt. Wählen wir aber die optischen Weglängen von  $A$  nach  $S_1$  und  $S_2$  einander gleich, so ist ihr Phasenunterschied gleich  $\pi$ ; denn einen Phasensprung von diesem Betrage hat das eine bei der Reflexion in  $A$  erfahren. Sie heben sich also auf. Die ganze Energie des einfallenden Strahlenbündels muß sich demnach in dem zweiten, von  $A$  aus in das Vakuum hinein fortschreitenden Strahlenbündel finden. Dies besitzt daher außer derselben Brennfläche  $f$ , der gleichen Öffnung und dem gleichen Einfallswinkel wie das einfallende auch die gleiche spezifische Intensität. Die erste Reflexion und Brechung bei  $A$  ist damit vollkommen rückgängig gemacht.

#### Zweiter Teil.

##### Die Entropie von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

##### § 4. Das Maß der Interferenzfähigkeit.

Es mögen zwei monochromatische, in den geometrischen Bestimmungsstücken, d. h. in der Größe der Brennfläche und des Öffnungswinkels, sowie in der Neigung gegen die Normale



der Brennfläche, übereinstimmende Strahlenbündel unbekannten Ursprungs gegeben sein. Wir sollen die Frage nach ihrer Interferenzfähigkeit beantworten. Nun ist diese im allgemeinen gerade so, wie die Intensitäten, langsam veränderlich; um die Vorstellung ein wenig zu vereinfachen, wollen wir den beiden Strahlenbündeln die geringste Länge zuschreiben, welche sie haben können, wenn sie in der Thermodynamik überhaupt noch eine selbständige Rolle spielen sollen. Sie müssen dann immer noch so lang sein, daß sie ihre Brennfläche während der kürzesten möglichen Dauer einer optischen Energiemessung beleuchten. Dann hat ihre Kohärenz ebenso wie die Intensitäten einen einzigen, bestimmten Wert.

Um sie zu ermitteln, müssen wir sie, da ihr Ursprung uns nach Voraussetzung unbekannt ist, durch Spiegelungen an vollkommenen Spiegeln so leiten, daß sie sich einmal kreuzen. Aber mangels jeden Urteils über ihren Gangunterschied dürfen wir keineswegs sogleich beim ersten Mal erwarten, die etwa vorhandene Interferenzfähigkeit zu entdecken. Vielmehr wird der Gangunterschied im allgemeinen oberhalb der Grenze liegen, bei welcher infolge der Inhomogenität der Strahlung die Interferenzfähigkeit selbst vollkommen kohärenter Strahlen aufhört. Wir müssen deshalb den Versuch oft wiederholen, indem wir den Gangunterschied jedesmal um einen unterhalb dieser Grenze liegenden Betrag verändern. Dabei muß dann einmal die Kohärenz zutage treten, wenn sie überhaupt vorhanden ist. Freilich wäre die Zahl der notwendigen Wiederholungen meist außerordentlich groß; denn selbst bei den feinsten Spektrallinien liegt die genannte Grenze des Gangunterschiedes unterhalb von  $10^2$  cm, während die Länge unserer Strahlenbündel sehr viel größer ist. Immerhin ist die Zahl der möglichen Wiederholungen eine ganz bestimmte, endliche, so daß mir gegen die prinzipielle Möglichkeit des Verfahrens nichts einzuwenden zu sein scheint.

Dem sich zunächst vielleicht erhebenden Einwurf, daß man die fraglichen Interferenzen wie die Strahlung überhaupt nur wahrnehmen könnte, wenn man sie absorbieren läßt, ist entgegenzuhalten, daß wir im Druck auf vollkommene Spiegel eine von Absorption unabhängige Wirkung der Strahlung auf die Materie kennen.

Haben wir dann das Vorhandensein von Kohärenz nachgewiesen, so müssen wir zur Feststellung ihres Maßes den Gangunterschied innerhalb engerer Grenzen variieren, bis wir die größte mögliche Deutlichkeit der Interferenzen erreichen; dann, wissen wir, ist der Gangunterschied so klein, daß die Inhomogenität der Strahlung keine Rolle mehr spielt. Solche Gangunterschiede wollen wir im folgenden allein in Betracht ziehen.

Der praktisch einzig in Betracht kommende Fall ist natürlich der, daß man Ursprung und Geschichte beider Strahlenbündel kennt; dann läßt sich, wie wir an mehreren Beispielen sehen werden, ihre Kohärenz leicht berechnen. Es mußte nur erst einmal festgestellt werden, daß sie, wie die Intensitäten, eine der Messung wenigstens prinzipiell stets zugängliche Größe ist. Anderenfalls dürfte sie in den Formeln der Thermodynamik nicht auftreten.

Statt von Strahlenbündeln, die aus vielen Wellen bestehen, sprechen wir in diesem Paragraphen nur von einzelnen Wellen; der Übergang zu Strahlenbündeln erfolgt dann so, daß wir zwischen je zwei einander entsprechenden Wellen beider Strahlenbündel dieselben Kohärenzverhältnisse voraussetzen. Dies ist gerechtfertigt; denn erlitten bei den Änderungen, denen das Strahlenbündel unterworfen wird, nicht alle ihm angehörenden Wellen das gleiche Schicksal, so müßten wir das Strahlenbündel in mehrere Teile zerlegt denken, für welche dies zutrifft.

Diese Wellen setzen wir nun als physikalisch homogen, die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ , welche die in ihnen stattfindenden Schwingungen darstellen, also als nahezu periodisch voraus. Nun ist es in der Optik zwar üblich geworden, in solchen Fällen mit einzelnen Sinusfunktionen zu rechnen; doch läßt sich dann der Unterschied zwischen kohärenten und inkohärenten Wellen nur nachträglich und etwas gewaltsam einführen. Wir ziehen deswegen die exaktere Darstellung durch Fouriersche Integrale vor:

$$(1) \quad \begin{cases} f(t) = \int d\nu F_\nu \cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu), \\ g(t) = \int d\nu G_\nu \cos(2\pi\nu t - \gamma_\nu). \end{cases}$$

Die Integrationsbereiche, in welchen  $F_\nu$  und  $G_\nu$  merkliche

Werte besitzen, sind nach Maßgabe der spektralen Reinheit der Schwingungen schmal; doch brauchen wir diese Voraussetzung erst später einzuführen.

Bei der Superposition beider Wellen werden alle Energiegrößen proportional zu dem Mittelwerte

$$\overline{(f+g)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} + 2\overline{fg},$$

der für eine mit der Dauer der kürzesten optischen Messungen vergleichbare Zeit  $\tau$  zu bilden ist. Wir berechnen  $\overline{fg}$ , indem wir die von Hrn. Planck<sup>1)</sup> gegebene Ableitung des Wertes von  $\overline{f^2}$  ein wenig verallgemeinern.

Aus (1) folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} dt \iint d\nu d\nu' F_\nu G_{\nu'} \cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu) \cos(2\pi\nu' t - \varphi_{\nu'}) \\ &= \frac{1}{2\tau} \int_t^{t+\tau} dt \iint d\nu d\nu' F_\nu G_{\nu'} \left\{ \cos(2\pi(\nu' - \nu)t - (\varphi_{\nu'} - \varphi_\nu)) \right. \\ &\quad \left. + \cos(2\pi(\nu' + \nu)t - (\varphi_{\nu'} + \varphi_\nu)) \right\}. \end{aligned}$$

Führen wir die Integration nach der Zeit aus, so folgt hieraus:

$$\begin{aligned} \overline{fg} &= \frac{1}{2} \iint d\nu d\nu' F_\nu G_{\nu'} \left\{ \frac{\sin \pi(\nu' - \nu)\tau}{\pi(\nu' - \nu)\tau} \cos(\pi(\nu' - \nu)(2t + \tau) - (\varphi_{\nu'} - \varphi_\nu)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin \pi(\nu' + \nu)\tau}{\pi(\nu' + \nu)\tau} \cos(\pi(\nu' + \nu)(2t + \tau) - (\varphi_{\nu'} + \varphi_\nu)) \right\}. \end{aligned}$$

Soll ein von der Zeit  $\tau$  unabhängiger Mittelwert  $\overline{fg}$  existieren, was erfahrungsgemäß der Fall ist, so muß die zweite,  $\nu' + \nu$  enthaltende Hälfte dieses Integrals verschwindend klein sein; denn da  $\tau$  gegen die Lichtperiode  $1/\nu$  sehr groß ist, ist  $(\nu + \nu')\tau$  eine große Zahl, der in Rede stehende Teil also sicher Funktion von  $\tau$ . Das gleiche gilt für die erste Hälfte in den Bereichen des Integrationsintervalls, in welchen nicht  $\nu' - \nu$  klein gegen  $\nu$  und  $\nu'$  ist; auch diese Bereiche dürfen nicht in Betracht kommen. Führen wir

$$\lambda = \frac{1}{2}(\nu' + \nu),$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\nu' - \nu)$$

---

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 1. p. 69. 1900 oder M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 190. J. A. Barth, Leipzig 1906.

als neue Integrationsvariable ein, so können wir dies dahin ausdrücken, daß nur ein schmaler Streifen in der Umgebung der Gerade  $\mu = 0$  für die Integration in Betracht kommen darf. Da in ihm

$$\frac{\sin 2\pi\mu\tau}{2\pi\mu\tau} = 1,$$

so finden wir die Gleichung:

$$(2) \quad \overline{fg} = \frac{1}{4} \iint d\lambda d\mu F_{\lambda-\mu} G_{\lambda+\mu} \cos(4\pi\mu t - (\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu})).$$

Alle diese Annahmen sind in der Hypothese der natürlichen Strahlung enthalten.

Schließen sich die Spektralbereiche der Schwingungen  $f$  und  $g$ , d. h. die Integrationsintervalle in den Gleichungen (1) gegenseitig aus, so folgte hieraus

$$\overline{fg} = 0$$

als Ersatz für die sonst häufig angewandte Formel:

$$\overline{\cos(2\pi\nu t - \varphi_\nu) \cos(2\pi\nu' t + \varphi_{\nu'})} = 0,$$

wenn  $\nu$  und  $\nu'$  voneinander verschieden sind. Ebenso ist  $\overline{fg} = 0$  bei inkohärenten Schwingungen, auch wenn sie dem gleichen Spektralbereich angehören. Die Differenz der Phasen,

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu},$$

schwankt dann ebenso schnell und unregelmäßig hin und her, wie jede dieser Phasenfunktionen selbst, so daß sich die in unregelmäßigster Weise bald positiven, bald negativen Werte der in (2) zu integrierenden Funktion bei der Integration gegenseitig aufheben.

Anders aber, wenn es sich um vollständig kohärente, homogene Wellen von gleicher Schwingungszahl handelt. Da die betrachteten Gangunterschiede nach Voraussetzung so klein sind, daß die Inhomogenität ohne Einfluß ist, besteht zwischen ihnen eine Beziehung

$$(3) \quad \gamma_\nu - \varphi_\nu = a,$$

wo  $a$  als Konstante betrachtet werden darf. Ebenso ist, wenn  $\varrho$  eine andere Konstante ist,  $G_\nu$  mit  $F_\nu$  durch eine Relation

$$(3a) \quad G_\nu = \varrho F_\nu$$

verbunden; denn wäre  $\varrho$  noch innerhalb so schmaler Inte-

grationsbereiche, wie sie in (1) homogener Strahlung entsprechen, veränderlich, so könnte man im Widerspruch zur Erfahrung aus der Geschichte der Strahlenbündel nicht auf ihre relative Stärke schließen; man müßte vielmehr noch die Funktionen  $F_\nu$  und  $G_\nu$  selbst kennen. Definiert man nun die Funktion  $f^*(t)$  dahin, daß sie aus  $f(t)$  hervorgeht, wenn man in (1) statt der Kosinusfunktion den Sinus setzt, also:

$$(4) \quad f^*(t) = \int d\nu F_\nu \sin(2\pi\nu t - \varphi_\nu),$$

so lassen sich die Gleichungen (3) und (3a) zusammenfassen in die Beziehung

$$(5) \quad g = \varrho (f \cos a + f^* \sin a),$$

so daß

$$(6) \quad \overline{fg} = \varrho (\overline{f^2} \cos a + \overline{ff^*} \sin a)$$

wird.

Setzen wir jetzt in (2)  $g = f^*$ , d. h.

$$\varrho = 1, \quad a = \gamma_\nu - \varphi_\nu = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu} = \frac{\pi}{2} + (\varphi_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu}),$$

so finden wir:

$$\overline{ff^*} = \frac{1}{4} \iint d\lambda d\mu F_{\lambda+\mu} F_{\lambda-\mu} \sin(4\pi\mu t - (\varphi_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu})).$$

Hier wechselt die zu integrierende Funktion mit  $\mu$  ihr Zeichen. Der Integrationsbereich ist aber zur Geraden  $\mu=0$  symmetrisch. Also ist

$$(7) \quad \overline{ff^*} = 0;$$

diese Gleichung ist das Analogon zu

$$\overline{\cos 2\pi\nu t \sin 2\pi\nu t} = 0.$$

Bevor wir (7) anwenden, leiten wir noch einige Rechnungsregeln ab. Der Übergang von  $f$  zu  $f^*$  setzt  $\varphi_\nu + \pi/2$  an die Stelle von  $\varphi_\nu$ ; die Wiederholung dieser Operation an  $f^*$  macht daraus  $\varphi_\nu + \pi$ , so daß in (1) alle Kosinusfunktionen ihr Zeichen wechseln; daraus folgt

$$(7a) \quad (f^*)^* = -f.$$

Ist ferner

$$f(t) + g(t) = k(t) = \int d\nu K_\nu \cos(2\pi\nu t - \kappa_\nu),$$

so bestimmen sich nach (1)  $K_\nu$  und  $\kappa_\nu$  aus der komplexen Gleichung

$$K_\nu e^{-i\kappa_\nu} = F_\nu e^{-i\varphi_\nu} + G_\nu e^{-i\gamma_\nu}.$$

Aus ihr schließen wir, daß

$$\begin{aligned} \int d\nu K_\nu \sin(2\pi\nu t - \kappa_\nu) &= \int d\nu F_\nu \sin(2\pi\nu t - \varphi_\nu) \\ &+ \int d\nu G_\nu \sin(2\pi\nu t - \gamma_\nu), \end{aligned}$$

$$(7b) \quad (f + g)^* = f^* + g^*$$

ist.

Aus (6) und (7) folgt unmittelbar

$$(8) \quad \overline{f'g} = \rho \cos a \overline{f'^2},$$

und aus (5), (7a) und (7b) geht hervor

$$g^* = \rho(-f \sin a + f^* \cos a),$$

$$(9) \quad \overline{fg^*} = -\rho \sin a \overline{f^2}.$$

Der gleichzeitige Übergang von  $f$  zu  $f^*$  und von  $g$  zu  $g^*$ , welcher sowohl  $\gamma_\nu$  als  $\varphi_\nu$  um  $\pi/2$  vergrößert, läßt aber die Phasendifferenz

$$\gamma_{\lambda+\mu} - \varphi_{\lambda-\mu}$$

in (2) ungeändert; es ist deshalb

$$(10) \quad \overline{f^*g^*} = \overline{f'g},$$

speziell

$$(11) \quad \overline{f'^*{}^2} = \overline{f'^2}.$$

Aus (5) und (9) können wir daher schließen:

$$(12) \quad \overline{f^*g} = -\overline{f'g^*}.$$

In den Gleichungen (8), (9) und (12) waren  $f$  und  $g$  als vollkommen kohärent gedacht. Jetzt soll sich aber dem zu  $f$  vollständig kohärenten Anteil

$$(13) \quad g_f = \rho(f \cos a + f^* \sin a)$$

an  $g$  die dazu vollkommen inkohärente Schwingung  $g_f'$  gemäß der Gleichung

$$(14) \quad g = g_f + g_f'$$

überlagern, so daß

$$(15) \quad \overline{g^2} = \overline{g_f^2} + \overline{g_f'^2}$$

wird. Dann sind  $f$  und  $g$  nur noch partiell kohärent. Trotzdem bleiben die Gleichungen (8), (9) und (12) in Kraft, weil man

nach (13) in ihnen überall  $g_f$  an die Stelle von  $g$  setzen kann. Wir machen jetzt von den folgenden Gleichungen Gebrauch:

$$\overline{g_f^2} = \varrho^2 \overline{f^2} \quad (\text{vgl. (13), (7) und (11)}),$$

$$(16) \quad \overline{f g^2} = \varrho^2 \cos^2 a \overline{f^{*2}} = \cos^2 a \overline{f^2} \cdot \overline{g_f^2} \quad (\text{vgl. (8)}),$$

$$(17) \quad \overline{f^{*2} g^2} = \overline{f g^{*2}} = \varrho^2 \sin^2 a \overline{f^{*2}} = \sin^2 a \overline{f^2} \cdot \overline{g_f^2} \quad (\text{vgl. (9) u. (12)}).$$

Durch Addition der beiden letzteren folgt:

$$(18) \quad \frac{\overline{f g^2} + \overline{f g^{*2}}}{\overline{f^2} \cdot \overline{g^2}} = \frac{\overline{g_f^2}}{\overline{g^2}}.$$

Dies Verhältnis der Intensität des zu  $f$  kohärenten Anteiles an  $g$  zur Gesamtintensität nennen wir die Kohärenz  $i_{fg}$ . Die Reihenfolge der Indizes ist gleichgültig, denn eine Vertauschung von  $f$  und  $g$  läßt nach (17) die linke Seite von (18) unberührt, so daß der Reziprozitätssatz

$$(19) \quad \frac{\overline{g_f^2}}{\overline{g^2}} = \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}}$$

besteht. Auch macht es nichts aus, wenn man  $f$  durch eine lineare Kombination  $\alpha f + \beta f^*$  ersetzt; nach (7), (10), (11) und (12) ist nämlich

$$\overline{(\alpha f + \beta f^*) g^2} = \alpha^2 \overline{f g^2} + 2 \alpha \beta \overline{f g} \cdot \overline{f^* g} + \beta^2 \overline{f^* g^2},$$

$$\overline{(\alpha f + \beta f^*) g^{*2}} = \beta^2 \overline{f g^2} - 2 \alpha \beta \overline{f g} \cdot \overline{f^* g} + \alpha^2 \overline{f^* g^2},$$

$$\overline{(\alpha f + \beta f^*)^2} = (\alpha^2 + \beta^2) \overline{f^2},$$

so daß man dabei den alten Wert wiederfindet. Hierin drückt sich die Unabhängigkeit der Kohärenz von der Intensität und der Phasendifferenz aus. Experimentell kann man sie ermitteln, indem man bei in dem angegebenen Sinn kleinen Gangunterschieden die Helligkeit an zwei Stellen eines Interferenzstreifens mißt, die um  $\frac{1}{4}$  Streifenbreite voneinander ab- stehen. Ist ihr Betrag an der einen Stelle

$$I_1 = \overline{(f + g)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} + 2 \overline{f g},$$

so ist er an der anderen (vgl. (11))

$$I_2 = \overline{(f \pm g^*)^2} = \overline{f^2} + \overline{g^2} \pm 2 \overline{f g^*},$$

so daß sich die Kohärenz nach der Formel

$$i_{fg} = \frac{\overline{fg}^2 + \overline{fg^{*2}}}{\overline{f^2} \cdot \overline{g^2}} = \frac{1}{4 \overline{f^2} \cdot \overline{g^2}} \left\{ (J_1 - (\overline{f^2} + \overline{g^2}))^2 + (J_2 - (\overline{f^2} + \overline{g^2}))^2 \right\}$$

berechnet. Wegen (15) ist

$$(20) \quad i_{fg} = \frac{\overline{g_f'^2}}{\overline{g^2}}$$

stets ein positiver echter Bruch. Die Grenzfälle  $i=0$  und  $i=1$  bedeuten absolute Inkohärenz und vollständige Kohärenz.

In den späteren Formeln wird übrigens statt der Kohärenz  $i_{fg}$  meist die „Inkohärenz“

$$(21) \quad j_{fg} = 1 - i_{fg} = \frac{\overline{g_f'^2}}{\overline{g^2}} = \frac{\overline{f_g'^2}}{\overline{f^2}} = 1 - \frac{\overline{fg^2} + \overline{fg^{*2}}}{\overline{f^2} \cdot \overline{g^2}}$$

auftreten.

Um ein Beispiel für die Verwendung des quantitativen Kohärenzbegriffes zu geben, denken wir uns von zwei vollständig kohärenten Strahlenbündeln das eine zweimal an selbst emittierenden Körpern gespiegelt. Wir fragen nach der Kohärenz des dann entstehenden Strahlenbündels zu dem nicht gespiegelten.

Bei der ersten Reflexion geht die Schwingung  $f$  in die ihr partiell kohärente

$$g = g_f + g_f'$$

über, diese wiederum bei der zweiten Reflexion in

$$h = h_g + h_g'$$

$f$  und  $h_g'$  sind in dem betrachteten Fall absolut inkohärent, darum auch  $h_g'$  und  $f_g'$ , wenn man

$$f = f_g + f_g'$$

setzt. Aus den beiden letzten Gleichungen und (7 b) folgt aber:

$$\begin{aligned} \overline{f h} &= \overline{f_g h_g}, \\ \overline{f h^*} &= \overline{f_g h_g^*}, \\ i_{fh} &= \frac{\overline{f h^2} + \overline{f h^{*2}}}{\overline{f^2} \cdot \overline{h^2}} = \frac{\overline{f_g h_g^2} + \overline{f_g h_g^{*2}}}{\overline{f_g^2} \cdot \overline{h_g^2}} \cdot \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g^2}}{\overline{h^2}}. \end{aligned}$$

Der erste dieser drei Brüche ist die Kohärenz der vollständig kohärenten Wellen  $f_g$  und  $h_g$ , also 1, so daß (vgl. (20))

$$i_{fh} = i_{fg} \cdot i_{gh}$$

folgt.



Haben die spiegelnden Körper und die auffallenden Strahlenbündel gleiche Temperatur (isotherme Reflexion), so wird die Intensität bei der Reflexion nicht geändert; es ist vielmehr

$$\overline{f^2} = \overline{g^2} = \overline{h^2}.$$

Sind andererseits  $r_1$  und  $r_2$  die Reflexionsvermögen, so ist

$$\overline{g_f^2} = r_1 \overline{f^2},$$

$$\overline{h_g^2} = r_2 \overline{g^2},$$

so daß

$$i_{fg} = r_1, \quad i_{gh} = r_2, \quad i_{fh} = r_1 r_2$$

folgt.

Man sieht ohne weiteres, nach welchem Gesetz die Kohärenz zu dem anderen Strahlenbündel bei weiteren isothermen Spiegelungen abnimmt. Erleiden zwei partiell kohärente Strahlenbündel beide isotherme Spiegelungen mit den Reflexionsvermögen  $r_1, r_2, \dots, r_n$  und  $\varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_m$ , so wird ihre Kohärenz dadurch auf den Bruchteil des Anfangswertes herabgesetzt, welcher durch das Produkt  $r_1 r_2 \dots r_n \varrho_1 \varrho_2 \dots \varrho_m$  gegeben ist.

#### § 5. Die Entropie von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

Wir sprechen im folgenden von linear polarisierten Strahlenbündeln, welche sich im allgemeinen zwar in verschiedenen Medien befinden, aber so beschaffen sind, daß man sie durch reguläre Spiegelungen und Brechungen in dasselbe Mittel und in ihm zur Deckung miteinander bringen kann. Nach dem Sinussatz der geometrischen Optik müssen dann ihre Brennflächen  $f$ , ihre Öffnungswinkel  $\omega$  und ihre Neigungswinkel  $\vartheta$  zur Normalen der Brennfläche mit dem Brechungsindex  $n$  des Mittels in der Beziehung stehen, daß der Ausdruck

$$n^2 f \omega \cos \vartheta$$

für alle einen und denselben Wert hat. Ihre Längen  $l$  müssen sich außerdem wie die Lichtgeschwindigkeiten  $q$  verhalten. Ferner sollen sie dieselbe Schwingungszahl  $\nu$  und dieselbe spektrale Breite  $d\nu$  besitzen. Wir setzen

$$(22) \quad n^2 f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} d\nu = \sigma,$$

und haben dann  $\sigma$  als für alle Strahlenbündel gleich zu betrachten.

Die Energie eines Strahlenbündels von der spezifischen Intensität  $\mathfrak{R}$  beträgt

$$f \omega \cos \vartheta \frac{l}{q} \mathfrak{R} d\nu = \sigma \frac{\mathfrak{R}}{n^2}.$$

Bequemer aber als mit der spezifischen Intensität rechnet es sich mit der „reduzierten spezifischen Intensität“

$$\kappa = \frac{\mathfrak{R}}{n^2};$$

denn es wird dabei nicht nur der Ausdruck für die Energie einfacher, sondern es enthalten auch die Temperatur- und die Entropieformel  $\mathfrak{R}$  stets in der Verbindung  $\mathfrak{R}/n^2$ . Die letztere Formel lautet, waren  $h$  und  $h$  die Konstanten des Planckschen Energieverteilungsgesetzes,  $c$  die Lichtgeschwindigkeit und  $\nu$  die Schwingungszahl bedeutet:

$$(23) \quad \begin{cases} E = \sigma L(\kappa), \\ L(\kappa) = \frac{k\nu^2}{c^3} \left[ \left(1 + \frac{c^2 \kappa}{h\nu^3}\right) \log \left(1 + \frac{c^2 \kappa}{h\nu^3}\right) - \frac{c^2 \kappa}{h\nu^3} \log \left(\frac{c^2 \kappa}{h\nu^3}\right) \right]. \end{cases} \quad 1)$$

Jetzt sollen zwei derartige, in oder senkrecht zur Einfallsebene polarisierte, partiell kohärente Strahlenbündel gleichzeitig an der ebenen Grenze zweier diathermanen Medien so gespiegelt und gebrochen werden, daß die vier dabei entstehenden Strahlenbündel sich paarweise genau überdecken. Sie müssen dann von verschiedenen Seiten auf die Grenze auftreffen und die Sinus ihrer Einfallswinkel müssen sich umgekehrt wie die Brechungsindizes verhalten (vgl. Fig. 4).

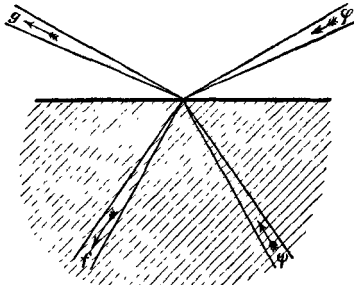


Fig. 4.

Energieprinzip verlangt die Konstanz der Gesamtenergie  $\sigma(\kappa_1 + \kappa_2)$ , in Verbindung mit dem Sinussatz also, daß

$$(24) \quad \kappa_1 + \kappa_2 = I'.$$

bei dem Vorgang invariant bleibt.

1) M. Planck, Ann. d. Phys. 4. p. 553; 6. p. 818. 1901, sowie M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 156, Gleichung (229). Leipzig, J. A. Barth 1906.

Nun ist der betrachtete Vorgang umkehrbar; das Entropieprinzip fordert daher, daß auch die Entropie eine solche Invariante ist. Sie hängt im allgemeinen nicht von der Gesamtenergie allein ab, wie wir am Beispiel zweier inkohärenten Strahlenbündel sehen. Daher muß der Vorgang noch eine zweite, von  $I$  unabhängige Invariante  $I''$  besitzen, aber auch nicht mehr. Dann existierte noch eine dritte, so müßten alle drei Bestimmungsstücke des betrachteten Systems, nämlich die beiden reduzierten spezifischen Intensitäten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , sowie die Inkohärenz  $j$ , unverändert bleiben, während wir doch offenbar in der Wahl des Reflexionsvermögens einen Freiheitsgrad besitzen. Die Entropie hängt also sicherlich außer von  $\sigma$  nur von zwei Invarianten  $I$  und  $I''$  ab. Wir behaupten, daß

$$(25) \quad j \kappa_1 \kappa_2 = I''$$

diese zweite Invariante ist.

Um dies zu beweisen, gehen wir auf die Schwingungsvorgänge in entsprechenden Wellen der vier Strahlenbündel ein. Als Lichtvektor betrachten wir aber keine der beiden Feldstärken, sondern eine ihnen proportionale Größe, deren Quadrat im zeitlichen Mittelwert unmittelbar der Intensität  $\kappa$  gleich ist. In den beiden einfallenden Strahlenbündeln sollen die Funktionen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$  die Schwingung unmittelbar an der Grenze darstellen, in den beiden neu entstehenden die Funktionen  $f(t)$  und  $g(t)$ . Wäre  $\psi = 0$ , so wäre (vgl. Fig. 4)

$$f = \delta \varphi, \quad g = -\varrho \varphi;$$

da

$$\bar{f}^2 + \bar{g}^2 = \bar{\varphi}^2$$

sein muß, ist

$$(26) \quad \delta^2 + \varrho^2 = 1.$$

Wäre  $\varphi = 0$ , so gälte aber

$$f = \varrho \psi, \quad g = \delta \psi.$$

Die Größe  $\varrho$ , deren Quadrat das Reflexionsvermögen mißt, muß hier das entgegengesetzte Vorzeichen erhalten, wie das erste Mal, weil mit der einen dieser Spiegelungen der Phasensprung  $\pi$  verknüpft ist. Im allgemeinen ist daher

$$(27) \quad \begin{cases} f = \delta \varphi + \varrho \psi, \\ g = -\varrho \varphi + \delta \psi. \end{cases}$$

Da nun

$$j \kappa_1 \kappa_2 = (1 - i) \kappa_1 \kappa_2 = \bar{f}^2 \cdot \bar{g}^2 - (\bar{f} \bar{g}^2 + \bar{f} \bar{g}^{*2})$$

ist, so ist zu zeigen, daß

$$\bar{f}^2 \cdot \bar{g}^2 - (\bar{f} \bar{g}^2 + \bar{f} \bar{g}^{*2}) = \bar{\varphi}^2 \cdot \bar{\psi}^2 - (\bar{\varphi} \bar{\psi}^2 + \bar{\varphi} \bar{\psi}^{*2})$$

ist.

Nach (27), (26), (7) und (7b) ist

$$\bar{f}^2 = \delta^2 \bar{\varphi}^2 + \varrho^2 \bar{\psi}^2 + 2 \delta \varrho \bar{\varphi} \bar{\psi},$$

$$\bar{g}^2 = \varrho^2 \bar{\varphi}^2 + \delta^2 \bar{\psi}^2 - 2 \delta \varrho \bar{\varphi} \bar{\psi},$$

$$\bar{f} \bar{g} = (\delta^2 - \varrho^2) \bar{\varphi} \bar{\psi} + \delta \varrho (\bar{\psi}^2 - \bar{\varphi}^2),$$

$$\bar{f} \bar{g}^* = (\delta^2 + \varrho^2) \bar{\varphi} \bar{\psi}^* = \bar{\varphi} \bar{\psi}^*.$$

Daraus schließen wir unter wiederholter Berücksichtigung von (26):

$$\begin{aligned} \bar{f}^2 \cdot \bar{g}^2 - (\bar{f} \bar{g}^2 + \bar{f} \bar{g}^{*2}) &= (\delta^2 \bar{\varphi}^2 + \varrho^2 \bar{\psi}^2) (\varrho^2 \bar{\varphi}^2 + \delta^2 \bar{\psi}^2) \\ &\quad + 2 \delta \varrho (\delta^2 - \varrho^2) \bar{\varphi} \bar{\psi} (\bar{\psi}^2 - \bar{\varphi}^2) - 4 \delta^2 \varrho^2 \bar{\varphi} \bar{\psi}^2 \\ &\quad - (\delta^2 - \varrho^2)^2 \bar{\varphi} \bar{\psi}^2 - \delta^2 \varrho^2 (\bar{\psi}^2 - \bar{\varphi}^2)^2 \\ &\quad - 2 \delta \varrho (\delta^2 - \varrho^2) \bar{\varphi} \bar{\psi} (\bar{\psi}^2 - \bar{\varphi}^2) - \bar{\varphi} \bar{\psi}^{*2} \\ &= \bar{\varphi}^2 \cdot \bar{\psi}^2 - (\bar{\varphi} \bar{\psi}^2 + \bar{\varphi} \bar{\psi}^{*2}), \end{aligned}$$

was zu beweisen war.

Die Entropie ist also Funktion von  $\sigma$ , von

$$I' = \kappa_1 + \kappa_2$$

und

$$I'' = j \kappa_1 \kappa_2.$$

Um sie zu bestimmen, denken wir uns die Strahlenbündel inkohärent; dann ist

$$E = \sigma (L(\kappa_1) + L(\kappa_2)),$$

und wegen  $j = 1$

$$\kappa_1 + \kappa_2 = I'$$

$$\kappa_1 \kappa_2 = I'',$$

also

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} (I' + \sqrt{I'^2 - 4 I''}),$$

$$\kappa_2 = \frac{1}{2} (I' - \sqrt{I'^2 - 4 I''}),$$

oder umgekehrt. Daher ist die Entropie

$$E = \sigma \left[ L \left( \frac{1}{2} (I' + \sqrt{I'^2 - 4 I''}) \right) + L \left( \frac{1}{2} (I' - \sqrt{I'^2 - 4 I''}) \right) \right]$$

Bei beliebigem Werte der Inkohärenz  $j$  geht diese Gleichung über in

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \sigma \left\{ L \left( \frac{1}{2} [(\kappa_1 + \kappa_2) + \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 4j\kappa_1\kappa_2}] \right) \right. \\ &\quad \left. + L \left( \frac{1}{2} [(\kappa_1 + \kappa_2) - \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 4j\kappa_1\kappa_2}] \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Diese Formel stellt die Entropie als Funktion der beiden reduzierten spezifischen Intensitäten und der Inkohärenz  $j$  dar.

Da nach (21)

$$(\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 4j\kappa_1\kappa_2 = (\kappa_1 - \kappa_2)^2 + 4i\kappa_1\kappa_2,$$

sind die Argumente der beiden  $L$ -Funktionen stets reell und positiv. Für vollständig kohärente Wellen ( $j=0$ ) geht (28), da nach (23)  $L(0)=0$  ist, in

$$E = \sigma L(\kappa_1 + \kappa_2)$$

über, was mit dem in § 4 der ersten Abhandlung<sup>1)</sup> Gesagten übereinstimmt.

Wir wollen dies Resultat graphisch diskutieren. Zu diesem Zweck setzen wir

$$\frac{c^2 \kappa_1}{h \nu^3} = a + x, \quad \frac{c^2 \kappa_2}{h \nu^3} = a - x.$$

$E$  wird dann nach (28) und (23) proportional zu der Funktion

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(x, i) &= f(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}) \\ &\quad - f(a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}), \end{aligned} \right.$$

wenn

$$f(x) = (1+x) \log(1+x) - x \log x$$

ist. Um eine anschaulichere Figur zu erhalten, haben wir statt  $j$  die Kohärenz  $i$  eingeführt; die Größe

$$a = \frac{c^2 (\kappa_1 + \kappa_2)}{2 h \nu^3}$$

bleibt bei der gemeinsamen Spiegelung und Brechung unverändert, wir betrachten sie als Konstante und fragen nach der Fläche, welche durch (29) bestimmt ist, wenn man

$$x = \frac{c^2 (\kappa_1 - \kappa_2)}{2 h \nu^3}, \quad i \text{ und } \Phi(x, i)$$

als rechtwinklige Koordinaten im Raum betrachtet. Da in (29)  $x$  nur im Quadrat auftritt, ist sie zur Ebene  $x=0$  symmetrisch.

1) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906.

Eine physikalische Bedeutung kommt ihm aber nur in dem durch die Ungleichungen

$$0 \leq i \leq 1, \\ -a \leq x \leq a$$

abgegrenzten Bereich zu. Für  $i=0$  wird

$$\Phi = f(a+x) + f(a-x).$$

Den Verlauf dieser Kurve haben wir schon in § 1 der früheren Arbeit diskutiert;  $\Phi$  nimmt für  $x = \pm a$  den Wert  $f(2a)$  an und steigt mit abnehmendem Absolutwert von  $x$  bis zu dem für  $x=0$ , d. h. für zwei gleich starke Strahlenbündel erreichten Betrage  $2f(a)$ . Sie ist in der oberen Hälfte von Fig. 5 zu

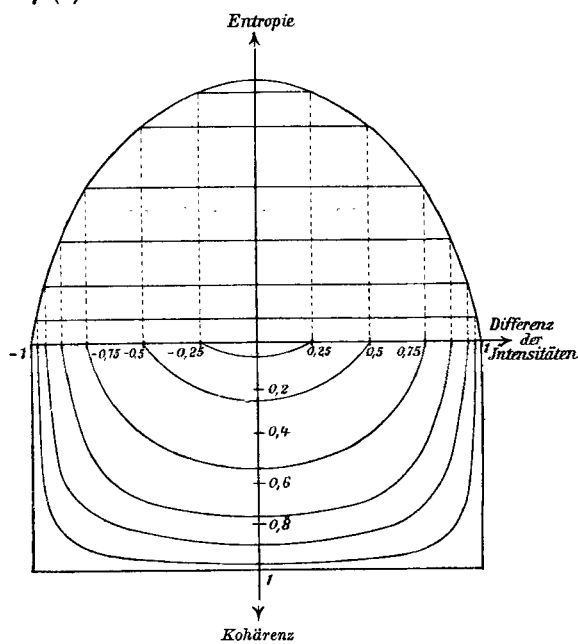


Fig. 5.

sehen, wo nach oben die Größe  $\Phi - f(2a)$  in einem willkürlichen Maßstabe, und als Abszisse nach rechts die Größe  $x$  aufgetragen ist ( $a$  ist gleich 1 gesetzt). Für  $i=1$ , sowie für

$x = \pm a$  wird  $\Phi = f(2a)$ . In den Rahmen dieser drei Geraden und der genannten Kurven ist die Entropiefläche eingespannt. Da

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = \left\{ f' \left( a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)} \right) - f' \left( a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)} \right) \right\} \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}}$$

ist, und

$$f'(x) = \log \left( 1 + \frac{1}{x} \right)$$

mit wachsendem  $x$  abnimmt, ist in dem ganzen physikalisch bedeutsamen Bereich der Klammerausdruck negativ, dagegen sein Multiplikator positiv, demnach:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} < 0;$$

dies gilt auch im Punkt  $x = 0$ ,  $i = 0$ , wo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial i} = \lim_{i=0} \frac{f'(a(1 + \sqrt{i})) - f'(a(1 - \sqrt{i}))}{\sqrt{i}} = 2 a f''(a) = - \frac{2}{1+a}$$

wird. Mit wachsender Kohärenz nimmt die Entropie bei konstanten Intensitäten ab. Nur längs der Grenzlinsen  $x = \pm a$  wird  $\partial \Phi / \partial i = 0$ , weil hier, wo  $\kappa_1$  oder  $\kappa_2$  Null ist, der Kohärenzbegriff keine Bedeutung mehr hat. Für  $i = 1$  wird  $\partial \Phi / \partial i$  zugleich mit  $-f'(a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)})$  negativ unendlich; desgleichen

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left\{ f' \left( a + \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)} \right) - f' \left( a - \sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)} \right) \right\} \frac{x(1-i)}{\sqrt{a^2 - (1-i)(a^2 - x^2)}}$$

für  $x = \pm a$ . Die Entropiefläche fällt also zu den drei sie begrenzenden Geraden senkrecht ab.

Die beste Übersicht über die Form der Fläche gewährt aber die Betrachtung der Kurven gleicher Entropie, deren Gleichung nach (29)

$$(1-i)(a^2 - x^2) = (a^2 - x_0^2)$$

ausgeht;  $x_0^2$  ist der Parameter der Schar. Fig. 5 zeigt in ihrer unteren Hälfte einige dieser Kurven; als Ganzes gibt sie eine Darstellung der Entropiefläche nach Art der darstellenden Geometrie. Denkt man sie längs der  $x$ -Achse um  $90^\circ$  geknickt und jede der Niveaulinien bis zur Höhe der ihr ent-

sprechenden Geraden gehoben, so gelangt sie dabei auf die Entropiefläche.

Da die Differentialgleichung dieser Schar

$$\frac{di}{dx} = - \frac{2x(1-i)}{a^2 - x^2}$$

lautet, sind die Punkte  $x = \pm a$ ,  $i = 1$ , in welchen  $di/dx$  unbestimmt wird, singuläre Punkte. In der Tat setzt sich die durch sie führende Kurve, für welche  $x_0^2 = a^2$  wird, aus den Geraden  $x = \pm a$  und  $i = 1$  zusammen. Diese drei Begrenzungsgeraden der Entropiefläche bilden die tiefste Niveaulinie. Die höchste hier auftretende Niveaulinie ist dagegen durch  $x_0^2 = 0$  definiert, sie liegt aber nur mit dem Punkt  $x = 0$ ,  $i = 0$  in dem physikalisch bedeutsamen Bereich. Von allen Strahlenpaaren gleicher Gesamtenergie haben also zwei inkohärente, gleich starke Strahlenbündel die größte Entropie. Auf den anderen Niveaulinien erreicht  $i$  seinen Maximalwert  $x^2/a^2$  für  $a = 0$ , während  $x$  seinen größten im genannten Bereich liegenden Absolutwert  $|x_0|$  für  $i = 0$  annimmt.

Diese Kurven gleicher Entropie geben nun unmittelbar an, wie sich die Kohärenz eines Strahlenpaares bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung ändert. Alle Zustände, welche durch Punkte derselben Kurve dargestellt sind, lassen sich dabei durch passende Wahl des Reflexionsvermögens ineinander überführen. Zwei inkohärente Strahlen lassen sich z. B. in zwei partiell kohärente verwandeln, wenn man ihre Intensitäten ganz oder teilweise ausgleicht. Die maximale Kohärenz wird bei vollständigem Ausgleich erreicht; waren die Intensitäten der inkohärenten Strahlen  $\kappa_1'$  und  $\kappa_2'$ , so beträgt sie

$$i_{\max.} = \frac{x_0^2}{a^2} = \left( \frac{\kappa_1' - \kappa_2'}{\kappa_1' + \kappa_2'} \right)^2.$$

Umgekehrt läßt sich jedes Paar partiell kohärenter Strahlenbündel durch gemeinsame Reflexion und Brechung in ein vollkommen inkohärentes Paar verwandeln, wenn man die Differenz der Intensitäten möglichst vergrößert. Ausgenommen sind nur vollständig kohärente Strahlenbündel, die wegen

$$I'' = j \kappa_1 \kappa_2 = 0$$

stets wieder in zwei vollkommen kohärente übergehen, und



zwei vollständig inkohärente Strahlenbündel von gleicher Intensität, die stets unverändert bleiben.

### § 6. Partiiell polarisierte Strahlung.

Eine partiell polarisierte Welle läßt sich in den verschiedensten Arten als Superposition zweier senkrecht zueinander polarisierten Wellen auffassen. Herrschen in einem Paar von aufeinander senkrechten Richtungen die Schwingungen  $\varphi(t)$  und  $\psi(t)$ , so herrschen in einem anderen Paar die Schwingungen

$$\begin{aligned} f &= \cos \omega \cdot \varphi + \sin \omega \cdot \psi, \\ g &= -\sin \omega \cdot \varphi + \cos \omega \cdot \psi, \end{aligned}$$

wo  $\omega$  der Winkel zwischen entsprechenden Richtungen beider Paare ist. Diese Gleichungen unterscheiden sich aber von (27) wegen (26) nur in der Bezeichnungsweise; wir können ohne weiteres

$$\delta = \cos \omega, \quad \varrho = \sin \omega$$

setzen. Daher sind die Ausdrücke

$$\begin{aligned} I' &= x_1 + x_2, \\ I'' &= j x_1 x_2 \end{aligned}$$

von der Wahl der Schwingungsrichtungen unabhängig. Wir können der Berechnung der Entropie eines polarisierten Strahlenbündels

$$\begin{aligned} E &= \sigma \left\{ L \left[ \frac{1}{2} (x_1 + x_2) + \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4j x_1 x_2} \right] \right. \\ &\quad \left. + L \left[ \frac{1}{2} (x_1 + x_2) - \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4j x_1 x_2} \right] \right\}, \end{aligned}$$

jedes beliebige Paar zueinander senkrechter Richtungen zugrunde legen. Ein partiell polarisiertes Strahlenbündel läßt sich auch thermodynamisch als Superposition zweier senkrecht zueinander polarisierten, partiell kohärenten Strahlenbündeln auffassen; daß diese in der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen, macht nichts aus.

Hieraus fließt eine Bestätigung unserer Theorie, welche sich wohl auch zu einem zweiten Beweise ausgestalten ließe. Diese logische Zerlegung in zwei partiell kohärente, senkrecht zueinander polarisierte Schwingungen läßt sich nämlich ohne Verlust an Kohärenz oder Intensität verwirklichen, wenn man das

Strahlenbündel durch eine doppelbrechende Substanz hindurchgehen läßt. Die Reflexion beim Ein- und Austritt kann man dadurch beliebig herabgesetzt denken, daß man die Brechungsindizes des Kristalles als nur wenig von dem der Umgebung verschieden annimmt. Freilich ist dann auch die Doppelbrechung gering, doch läßt sich trotzdem auf hinreichend langen Strecken die vollständige Trennung der beiden Strahlenbündel erzielen. Da der Vorgang umkehrbar ist, lassen sich zwei inkohärente, linear polarisierte Strahlenbündel auch auf dem Wege ohne Entropiezunahme in zwei partiell kohärente verwandeln, daß man sie zunächst durch Doppelbrechung zu einem partiell polarisierten Strahlenbündel zusammensetzt und dann dies nach zwei anderen Richtungen durch Doppelbrechung zerlegt.

Die Niveaukurven in Fig. 5 zeigen die Kohärenzverhältnisse in einem partiell polarisierten Strahl. Die Kohärenz ist Null für die beiden Hauptrichtungen, da die entsprechenden Intensitäten, die Hauptintensitäten  $\kappa_1'$  und  $\kappa_2'$ , den größtmöglichen Unterschied besitzen. Da die Intensitäten für zwei andere, aufeinander senkrechte Schwingungen sich nach Gleichungen

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \kappa_1' \cos^2 \omega + \kappa_2' \sin^2 \omega, \\ \kappa_2 &= \kappa_1' \sin^2 \omega + \kappa_2' \cos^2 \omega\end{aligned}$$

aus dem Azimut  $\omega$  gegen die Hauptrichtungen berechnen, und

$$j \kappa_1 \kappa_2 = \kappa_1' \kappa_2'$$

sein muß, ist ihre Kohärenz

$$i = 1 - j = 1 - \frac{\kappa_1' \kappa_2'}{\kappa_1 \kappa_2} = \frac{(\kappa_1' - \kappa_2')^2 \cos^2 \omega \sin^2 \omega}{(\kappa_1' \cos^2 \omega + \kappa_2' \sin^2 \omega)(\kappa_1' \sin^2 \omega + \kappa_2' \cos^2 \omega)}.$$

Ihren Maximalwert

$$i_{\max.} = \left( \frac{\kappa_1' - \kappa_2'}{\kappa_1' + \kappa_2'} \right)^2$$

erreicht sie nach § 4, wenn  $\kappa_1 = \kappa_2$ , also  $\omega = \pm \pi/4$  wird.

Es liegt nahe,  $i_{\max.}$  zur Messung des Polarisationsgrades zu verwenden und die „Polarisation“

$$p = \sqrt{i_{\max.}} = \left| \frac{\kappa_1' - \kappa_2'}{\kappa_1' + \kappa_2'} \right|$$

zu setzen.<sup>1)</sup> Durch Angabe der Gesamtintensität

$$\kappa = \kappa_1' + \kappa_2'$$

1) Dies Maß hat schon Chr. Jensen (Beiträge zur Photometrie des Himmels, Diss. Kiel 1898; Metereol. Zeitschr. 36. p. 545. 1901) benutzt.

und der Polarisation ist dann ein Strahlenbündel vollkommen definiert. Seine Entropie beträgt

$$(31) \quad E = \sigma \left\{ L \left( \kappa \frac{1+p}{2} \right) + L \left( \kappa \frac{1-p}{2} \right) \right\},$$

da

$$\kappa_1' = \kappa \frac{1+p}{2}, \quad \kappa_2' = \kappa \frac{1-p}{2}$$

oder umgekehrt ist.

Eine Ausnahmestellung nimmt elliptisch polarisiertes Licht ein, welches stets vollkommen polarisiert ist, so daß es sich in keine zwei inkohärente Hauptschwingungen zerlegen läßt; ihm ist der Wert  $p = 1$  zuzuschreiben, welcher sich aus (30) für vollkommene lineare Polarisation ergibt. Seine Entropie berechnet sich dann richtig nach (31) zu

$$E = \sigma L(\kappa).$$

Dritter Teil.

#### Die Entropie von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

##### § 7. Die Kohärenzbeziehungen zwischen drei partiell kohärenten Strahlenbündeln.

Am Ende von § 4 lernten wir ein Beispiel kennen, in welchem zwischen den Kohärenzen  $i_{fg}$ ,  $i_{gh}$  und  $i_{hf}$  eine Gleichung bestand; dies war aber nur durch die Annahme vollkommener Inkohärenz zwischen den Schwingungen  $f_g'$  und  $h_g'$  bedingt. Jetzt wollen wir die Frage nach dem Zusammenhang dieser drei Kohärenzen in voller Allgemeinheit lösen.

Wir gehen zu diesem Zweck wiederum von den Gleichungen

$$(32) \quad \begin{cases} f = f_g + f_g' \\ h = h_g + h_g' \end{cases}$$

aus, in denen die Schwingungen  $f_g'$  und  $h_g'$  zu  $g$  vollständig inkohärent, dagegen  $f_g$  und  $h_g$  zu  $g$  vollkommen kohärent sein sollen. Die letzteren sind daher auch zueinander vollkommen kohärent, d. h. es besteht eine Gleichung

$$(33) \quad h_g = \lambda(f_g \cos a + f_g^* \sin a),$$

während die Schwingungen  $f_g'$  und  $h_g'$  untereinander noch alle Grade der Kohärenz, von 0 bis 1, haben können. Wir werden im allgemeinen

$$(34) \quad h_g' = (h_g')_{f_g'} + (h_g')_{f_g'^*}$$

zu setzen haben, wo

$$(35) \quad (h_g)_{f_g'} = \mu(f_g' \cos b + f_g'^* \sin b)$$

zu  $f_g'$  vollkommen kohärent, während  $(h_g)_{f_g'}$  zu  $f_g'$  absolut inkohärent ist.

Aus den Gleichungen (32) folgt aber

$$(36) \quad \begin{cases} \overline{f h} = \overline{f_g h_g} + \overline{f_g'^* h_g'} \\ \overline{f^* h} = \overline{f_g^* h_g} + \overline{f_g'^* h_g'} \end{cases}$$

und aus (33), (34), (35):

$$\begin{aligned} \overline{f_g h_g} &= \lambda \cos a \overline{f_g^2} = \cos a \sqrt{\overline{f_g^2} \cdot \overline{h_g^2}}, \\ \overline{f_g^* h_g} &= \lambda \sin a \overline{f_g^2} = \sin a \sqrt{\overline{f_g^2} \cdot \overline{h_g^2}}, \\ \overline{f_g' h_g'} &= \mu \cos b \overline{f_g'^2} = \cos b \sqrt{\overline{f_g'^2} \cdot (\overline{h_g'})_{f_g'}^2}, \\ \overline{f_g'^* h_g'} &= \mu \sin b \overline{f_g'^2} = \sin b \sqrt{\overline{f_g'^2} \cdot (\overline{h_g'})_{f_g'}^2}. \end{aligned}$$

Nach Einsetzung dieser Werte in (36) ergibt sich im Hinblick auf (20) und (21)

$$\begin{aligned} i_{fh} &= \frac{\overline{f h^2} + \overline{f^* h^2}}{\overline{f^2} \cdot \overline{h^2}} = \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g^2}}{\overline{h^2}} + \frac{(\overline{h_g'})_{f_g'}^2}{\overline{h_g'^2}} \cdot \frac{\overline{f_g'^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g'^2}}{\overline{h^2}} \\ &\quad + 2 \cos(a - b) \sqrt{\frac{(\overline{h_g'})_{f_g'}^2}{\overline{h_g'^2}} \cdot \frac{\overline{f_g^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g^2}}{\overline{h^2}} \cdot \frac{\overline{f_g'^2}}{\overline{f^2}} \cdot \frac{\overline{h_g'^2}}{\overline{h^2}}}. \end{aligned}$$

$$(37) \quad i_{fh} = i_{fg} i_{gh} + i_{f_g' h_g'} j_{fg} j_{gh} + 2 \cos(a - b) \sqrt{i_{f_g' h_g'} i_{fg} i_{gh} j_{fg} j_{gh}}.$$

Zwischen den drei Kohärenzen  $i_{fh}$ ,  $i_{fg}$  und  $i_{gh}$  besteht also im allgemeinen keine Gleichung, sondern nur eine Ungleichung; da nämlich sowohl  $i_{f_g' h_g'}$  als  $\cos(a - b)$  höchstens gleich 1 sind, so ist

$$(38) \quad i_{fh} \leq (\sqrt{i_{fg} i_{gh}} + \sqrt{j_{fg} j_{gh}})^2.$$

Man überzeugt sich leicht, daß der rechtsstehende Ausdruck höchstens den Wert 1 erreichen kann, indem man  $i_{fg} = \cos^2 \alpha$ ,  $i_{gh} = \cos^2 \beta$  setzt; diese Ungleichung beschränkt  $i_{fh}$  also stets auf einen Teil des ihm an sich zur Verfügung stehenden Bereiches von 0 bis 1.

Nach (37) kann man offenbar, abgesehen von der Einschränkung durch (38), die vier Kohärenzen  $i_{fh}$ ,  $i_{fg}$ ,  $i_{gh}$  und  $i_{f_g' h_g'}$  willkürlich bestimmen. Es könnte zunächst scheinen,

als wären die Kohärenzbeziehungen zwischen drei Schwingungen sogar erst durch sechs Größen, außer den genannten nämlich durch  $i_{f', h, g', h}$  und  $i_{g', h, f'}$ , vollständig festgelegt. Doch bestehen zwischen diesen Größen zwei stets identisch erfüllte Gleichungen, so daß nun vier von ihnen unabhängig sind.

Betrachten wir nämlich die schon in (32) und (34) angewandte Zerlegung:

$$\begin{aligned} h &= h_g + h_{g'}, \\ h_g &= (h_g)_{f_g'} + (h_g)_{f_g'^*}. \end{aligned}$$

Die Summe

$$h_g + (h_g)_{f_g'}$$

läßt sich hier nach (34) und (35) als homogene lineare Funktion von  $g$ ,  $g^*$ ,  $f_g'$  und  $f_g'^*$  darstellen; oder wenn man vermöge der Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= f_g + f_g', \\ f^* &= f_g^* + f_g'^*, \end{aligned}$$

$f_g'$  und  $f_g'^*$  eliminiert, als Funktion von  $f$ ,  $f^*$ ,  $g$  und  $g^*$ , oder, was wiederum dasselbe sagt, als homogene lineare Funktion von  $f$ ,  $f^*$ ,  $g_f'$  und  $g_f'^*$ . Im Gegensatz hierzu ist  $(h_g)_{f_g'}$  nach Definition inkohärent zu  $f_g'$ , aber als Differenz den zu  $g$  inkohärenten Schwingungen  $h_g$  und  $(h_g)_{f_g'^*}$  auch inkohärent zu  $g$ ; daher auch inkohärent zu  $f_g$  und zu  $f$ , und ebenso zu  $g_f'$  und  $g_f'^*$ , der Differenz von  $g$  und  $g_f'$ .

Wir haben demnach eine Zerlegung

$$h = \alpha_1 g_f' + \beta_1 g_f'^* + \gamma_1 f + \delta_1 f^* + h_1$$

gefunden, wo  $h_1$  zu  $g_f'$  und  $f$  inkohärent ist. Es kann nur eine solche Zerlegung geben. Setzen wir nämlich noch eine andere Zerlegung

$$h = \alpha_2 g_f' + \beta_2 g_f'^* + \gamma_2 f + \delta_2 f^* + h_2$$

an, wo  $h_2$  wiederum zu  $g_f'$  und  $f$  inkohärent ist, so wäre durch die Relation

$0 = (\alpha_1 - \alpha_2) g_f' + (\beta_1 - \beta_2) g_f'^* + (\gamma_1 - \gamma_2) f + (\delta_1 - \delta_2) f^* + (h_1 - h_2)$  die Differenz  $h_1 - h_2$  durch  $g_f'$  und  $f$  ausgedrückt, während sie doch zu beiden inkohärent sein muß. Dieser Widerspruch zwingt zu dem Schluß, daß die Koeffizienten der letzten Gleichung identisch Null sind, daß also  $\alpha_1 = \alpha_2$  etc. und  $h_1 = h_2$  ist.

Dennoch finden wir eine zweite solche Zerlegung, wenn wir von den Gleichungen

$$h = h_f + h_{f'}$$

$$h_{f'} = (h_f)_{g_{f'}} + (h_{f'})_{g_{f'}}$$

ausgehen. Denn hier ist

$$h_f + (h_{f'})_{g_{f'}}$$

eine homogene lineare Funktion von  $f, f^*, g_{f'}$  und  $g_{f'}^*$ , dagegen  $(h_{f'})_{g_{f'}}$  nach Definition zu  $g_{f'}$  und als Differenz von  $h_{f'}$  und  $(h_f)_{g_{f'}}$  zu  $f$  inkohärent. Daher muß

$$h_g + (h_g)_{f_g'} = h_f + (h_{f'})_{g_{f'}}$$

$$(h_g)_{f_g'} = (h_{f'})_{g_{f'}}$$

sein. Und da nach (21)

$$(39a) \quad \overline{(h_g)_{f_g'}^2} = j_{f_g' h_g'} \overline{h_g'^2} = j_{f_g' h_g'} j_{g_h} \overline{h^2}$$

ist, folgt aus der letzteren Beziehung die Gleichung

$$j_{f_g' h_g'} j_{g_h} = j_{g_{f'} h_{f'}} j_{h_f},$$

welche sich wegen der Gleichberechtigung der Schwingungen  $f, g, h$  unmittelbar zu der Doppelgleichung

$$(39) \quad \frac{j_{h' g_{h'}}}{j_{f_g}} = \frac{j_{g_{f'} h_{f'}}}{j_{g_h}} = \frac{j_{h_g' f_g'}}{j_{h_f}}$$

erweitern läßt. Der Symmetrie halber führen wir als vierte unabhängige Variable zur Charakterisierung der Kohärenzverhältnisse neben den drei Inkohärenzen „zweiter Ordnung“  $j_{fg}, j_{gh}, j_{hf}$  die „Inkohärenz dritter Ordnung“

$$(40) \quad J = j_{fg} j_{gh} j_{h_g' f_g'} = j_{fg} j_{g_{f'} h_{f'}} j_{h_f} = j_{h_g' f_g'} j_{g_h} j_{h_f}$$

ein. Sie ist ein positiver echter Bruch, welcher Null wird, wenn auch nur zwei der Schwingungen vollkommen kohärent sind, und welcher für drei vollständig inkohärente Schwingungen den Wert 1 annimmt. Denn setzt man in (37)

$$i_{fg} = i_{gh} = i_{hf} = 0,$$

so folgt

$$i_{f_g' h_g'} = 0, \quad j_{f_g' h_g'} = 1$$

und aus (40)

$$J = 1.$$

Ohne der Frage nach der einfachsten Art,  $J$  zu bestimmen, näher zu treten, wollen wir wenigstens zeigen, daß es



Brechung von zwei Strahlenbündeln an einer planparallelen Platte z. B. wäre

$$(f^2 + g^2) - (\varphi^2 + \psi^2)$$

proportional zur Abnahme der in der Platte befindlichen Energie, also nur im zeitlichen Mittel gleich Null. Nach (41), sowie nach (7), (10), (11) und (12) ist aber

$$\overline{f^2} + \overline{g^2} + \overline{h^2} = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) \overline{\varphi^2} + \dots$$

$$+ 2 (a_1 b_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) + a_2 b_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) + a_3 b_3 \cos(\alpha_3 - \beta_3)) \overline{\varphi \psi} + \dots$$

$$+ 2 (a_1 b_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) + a_2 b_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) + a_3 b_3 \sin(\alpha_3 - \beta_3)) \overline{\varphi \psi^*} + \dots$$

Gleichung (42) fordert daher die Gültigkeit der folgenden neun Identitäten:

$$(43) \left\{ \begin{array}{l} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1, \\ a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1, \\ a_1 b_1 \cos(\alpha_1 - \beta_1) + a_2 b_2 \cos(\alpha_2 - \beta_2) + a_3 b_3 \cos(\alpha_3 - \beta_3) = 0, \\ b_1 c_1 \cos(\beta_1 - \gamma_1) + b_2 c_2 \cos(\beta_2 - \gamma_2) + b_3 c_3 \cos(\beta_3 - \gamma_3) = 0, \\ c_1 a_1 \cos(\gamma_1 - \alpha_1) + c_2 a_2 \cos(\gamma_2 - \alpha_2) + c_3 a_3 \cos(\gamma_3 - \alpha_3) = 0, \\ a_1 b_1 \sin(\alpha_1 - \beta_1) + a_2 b_2 \sin(\alpha_2 - \beta_2) + a_3 b_3 \sin(\alpha_3 - \beta_3) = 0, \\ b_1 c_1 \sin(\beta_1 - \gamma_1) + b_2 c_2 \sin(\beta_2 - \gamma_2) + b_3 c_3 \sin(\beta_3 - \gamma_3) = 0, \\ c_1 a_1 \sin(\gamma_1 - \alpha_1) + c_2 a_2 \sin(\gamma_2 - \alpha_2) + c_3 a_3 \sin(\gamma_3 - \alpha_3) = 0. \end{array} \right.$$

Von den 18 Parametern  $a_1, a_2 \dots \alpha_1, \alpha_2 \dots$  in (41) sind demnach neun willkürlich zu wählen. Doch entspricht nicht jedem von diesen ein Freiheitsgrad zur Veränderung der Intensitäten und Kohärenzgrößen. Vielmehr kann man aus den Gleichungen (41) auch drei Beziehungen zwischen den Funktionen

$$F = f \cos \lambda + f^* \sin \lambda, \quad \Phi = \varphi \cos \lambda' + \varphi^* \sin \lambda',$$

$$G = g \cos \mu + g^* \sin \mu, \quad \Psi = \psi \cos \mu' + \psi^* \sin \mu',$$

$$H = h \cos \nu + h^* \sin \nu, \quad X = \chi \cos \nu' + \chi^* \sin \nu'$$

ableiten, welche lauten:

$$\begin{aligned} F &= a_1 [\Phi \cos(\alpha_1 + \lambda - \lambda') + \Phi^* \sin(\alpha_1 + \lambda - \lambda')] \\ &\quad + b_1 [\Psi \cos(\beta_1 + \lambda - \mu') + \Psi^* \sin(\beta_1 + \lambda - \mu')] \\ &\quad + c_1 [X \cos(\gamma_1 + \lambda - \nu') + X^* \sin(\gamma_1 + \lambda - \nu')] \text{ etc.} \end{aligned}$$

Hier treten die Differenzen der sechs Phasenverschiebungen  $\lambda, \mu, \nu, \lambda', \mu', \nu'$  auf, von denen fünf voneinander unabhängig



sind; um die Gleichungen (41) zu vereinfachen, können wir beispielsweise

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \lambda - \lambda' &= 0, & \beta_1 + \lambda - \mu' &= 0, \\ \beta_2 + \mu - \mu' &= 0, & \gamma_2 + \mu - \nu' &= 0, \\ \gamma_3 + \nu - \nu' &= 0\end{aligned}$$

setzen. Die Anzahl der Gleichungen (43) bleibt davon unberührt, wie man leicht sieht. Nun haben aber die Schwingungen  $F, G, H, \Phi, \Psi, X$  dieselben Intensitäten wie  $f, g, h, \varphi, \psi, \chi$ ; sie stehen auch in denselben Kohärenzbeziehungen zueinander, wie die letzteren. Zur Änderung der Intensitäten und Kohärenzbeziehungen stehen uns also nur vier Freiheitsgrade zur Verfügung.

Dieselbe Überlegung für  $n$  Strahlenbündel ergibt  $2n^2$  Parameter in den  $n$  zu (41) analogen Gleichungen, dagegen  $n^2$  Beziehungen, welche den Identitäten (43) entsprechen; für bloße Phasenveränderungen werden dabei  $2n-1$  Freiheitsgrade verbraucht. Zur Veränderung der Intensitäten und Kohärenzbeziehungen bleiben demnach

$$2n^2 - n^2 - (2n-1) = (n-1)^2$$

Freiheitsgrade übrig; für  $n=2$  nur einer, in Übereinstimmung mit § 5, welcher uns für die drei Variablen  $\kappa_1, \kappa_2, j_{12}$  zwei Invarianten kennen lehrte.

Dies Ergebnis hat aber nur dann für uns Bedeutung, wenn ein Vorgang von der betrachteten Art in der Natur möglich ist, und wenn wir sicher sind, daß er umkehrbar verläuft. Denken wir uns nun ein System von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln nacheinander drei gemeinsamen Spiegelungen und Brechungen von je zwei Strahlenbündeln unterworfen, welche durch die Gleichungen (vgl. (26) und (27))

$$(44) \quad \left\{ \begin{aligned} \varphi_1 &= \delta \varphi + \varrho \psi, & \chi_1 &= \chi, \\ \psi_1 &= -\varrho \varphi + \delta \psi, \\ \psi_2 &= \varepsilon \psi_1 + \sigma \chi_1, & \varphi_2 &= \varphi_1, \\ \chi_2 &= -\sigma \psi_1 + \varepsilon \chi_1, \\ f &= \zeta \chi_2 + \tau \varphi_2, & h &= \psi_2, \\ g &= -\tau \chi_2 + \zeta \varphi_2, \\ \delta^2 + \varrho^2 &= \varepsilon^2 + \sigma^2 = \zeta^2 + \tau^2 = 1 \end{aligned} \right.$$

dargestellt sind. Deuten wir  $\varphi, \psi, \chi; \varphi_1, \psi_1, \chi_1; \varphi_2, \psi_2, \chi_2; f, g, h$  als rechtwinklige Koordinaten im Raum, so stellt jeder dieser drei Vorgänge die Drehung des Koordinatenkreuzes um eine seiner Achsen dar. Bekanntlich läßt sich jede Drehung um den Anfangspunkt durch drei solche Drehungen ersetzen, während eine vierte zu keinem Ergebnis führt, das nicht auch schon mit dreien zu erhalten wäre. Der durch (44) dargestellte Vorgang gibt uns also drei Freiheitsgrade in die Hand.

Offenbar erhalten wir aber einen vierten, wenn z. B. nicht  $\varphi_2 = \varphi_1$ , sondern

$$\varphi_2 = \varphi_1 \cos \alpha + \varphi_1^* \sin \alpha$$

ist. Daher läßt sich jeder absorptionslose, mit dem Sinussatz verträgliche Vorgang, welcher ein System von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln in ein anderes umwandelt, durch drei gemeinsame Spiegelungen und Brechungen von je zwei Strahlenbündeln ersetzen. Dieser Satz ist auch auf mehr als drei Strahlenbündel zu übertragen (nur ist dann die Zahl der Spiegelungen und Brechungen größer) und beweist, daß Absorptionslosigkeit und Gültigkeit des Sinussatzes hinreichende Bedingungen für die Umkehrbarkeit eines optischen Vorganges sind.

### § 9. Die Entropie.

Nach § 7 haben wir sieben unabhängige Variabele, nach § 8 vier Freiheitsgrade. Es muß also drei Invarianten geben, welche die einzigen Kombinationen darstellen, in denen  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, j_{12}, j_{23}, j_{31}$  und  $J$  in der Formel für die Entropie auftreten können. Da wir jede mögliche Umwandlung unseres Systems durch eine Reihe gemeinsamer Spiegelungen und Brechungen von zwei Strahlenbündeln ersetzen können, und die drei Invarianten naturgemäß bezüglich der Indizes 1, 2, 3 symmetrisch sind, genügt für jede Invariante der Nachweis der Unveränderlichkeit bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung der Strahlenbündel 1 und 2.

Bei diesem Vorgang sind aber nach § 5 unveränderlich die Größen

$$(45) \quad \kappa_1 + \kappa_2$$

und

$$(46) \quad j_{12} \kappa_1 \kappa_2;$$

ferner die Intensität  $\kappa_3$  des unverändert bleibenden Strahlenbündels 3, sowie die Größe

$$(47) \quad j_{13}' j_{23} \kappa_3 \cdot^1)$$

Setzen wir nämlich wieder

$$\kappa_1 = \overline{f^2}, \quad \kappa_2 = \overline{g^2}, \quad \kappa_3 = \overline{h^2},$$

so ist nach (39a)

$$j_{13}' j_{23} \kappa_3 = j_{f_g' h_g'} j_{g h} h^2 = \overline{(h_g')_{f_g'}^2};$$

und  $(h_g')_{f_g'}$  ist nach § 7 der zu  $f$  und  $g$  inkohärente Anteil an  $h$ , während

$$h - (h_g')_{f_g'} = h_g + (h_g)_{f_g'}$$

eine lineare Kombination von  $f$  und  $g$  darstellt; also auch eine lineare Kombination der Schwingungen, in welche  $f$  und  $g$  bei der Spiegelung und Brechung übergehen, während  $(h_g')_{f_g'}$  auch zu den letzteren inkohärent ist. Eine derartige Zerlegung ist aber (ebenfalls nach § 7) eindeutig; daher bleibt  $(h_g')_{f_g'}$  bei Spiegelung und Brechung unverändert, und ebenso der Ausdruck

$$j_{13}' j_{12} \kappa_3.$$

Schließlich behält dabei noch der Ausdruck

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} j_{23} \kappa_2 \kappa_3 + j_{31} \kappa_3 \kappa_1 &= \overline{g^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{g h^2} + \overline{g h^*}^2) \\ &\quad + \overline{f^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{f h^2} + \overline{f h^*}^2) \end{aligned} \right.$$

seinen Wert. Denn setzt man nach (26) und (27)

$$\begin{aligned} f &= \delta \varphi + \varrho \psi, & h &= \chi, \\ g &= -\varrho \varphi + \delta \psi, \\ \delta^2 + \varrho^2 &= 1, \end{aligned}$$

so erhält man:

$$\begin{aligned} \overline{f^2} &= \delta^2 \overline{\varphi^2} + \varrho^2 \overline{\psi^2} + 2\delta\varrho \overline{\varphi\psi}, & \overline{g^2} &= \varrho^2 \overline{\varphi^2} + \delta^2 \overline{\psi^2} - 2\delta\varrho \overline{\varphi\psi}, \\ \overline{f h} &= \delta \overline{\varphi\chi} + \varrho \overline{\psi\chi}, & \overline{g h} &= -\varrho \overline{\varphi\chi} + \delta \overline{\psi\chi}, \\ \overline{f h^*} &= \delta \overline{\psi\chi^*} + \varrho \overline{\varphi\chi^*}, & \overline{g h^*} &= -\varrho \overline{\varphi\chi^*} + \delta \overline{\psi\chi^*}, \\ \overline{f^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{f h^2} + \overline{f h^*}^2) &= \delta^2 [\overline{\varphi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi\chi^2} + \overline{\varphi\chi^*}^2)] \\ &\quad + \varrho^2 [\overline{\psi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\psi\chi^2} + \overline{\psi\chi^*}^2)] \\ &\quad + 2\delta\varrho [\overline{\varphi\psi} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi\chi} \cdot \overline{\psi\chi} + \overline{\varphi\chi^*} \cdot \overline{\psi\chi^*})], \end{aligned}$$

1)  $j_{13}'$  soll die früher als  $j_{f_g' h_g'}$  bezeichnete Größe sein.

$$\begin{aligned} \overline{g^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{g h^2} + \overline{g h^{*2}}) &= \varrho^2 [\overline{\varphi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi \chi^2} + \overline{\varphi \chi^{*2}})] \\ &+ \delta^2 [\overline{\psi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\psi \chi^2} + \overline{\psi \chi^{*2}})] \\ &- 2 \delta \varrho [\overline{\varphi \psi} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi \chi} \cdot \overline{\psi \chi} + \overline{\varphi \chi^*} \cdot \overline{\psi \chi^*})]. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addition die zu beweisende Gleichung:

$$\begin{aligned} \overline{g^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{g h^2} + \overline{g h^{*2}}) + \overline{f^2} \cdot \overline{h^2} - (\overline{f h^2} + \overline{f h^{*2}}) \\ = \overline{\psi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\psi \chi^2} + \overline{\psi \chi^{*2}}) + \overline{\varphi^2} \cdot \overline{\chi^2} - (\overline{\varphi \chi^2} + \overline{\varphi \chi^{*2}}). \end{aligned}$$

Gelingt es uns jetzt, aus den Ausdrücken (45), (46), (47), (48) und  $\kappa_3$  drei Kombinationen zu bilden, die sich durch Vertauschung der Indizes 1, 2, 3 nicht ändern, so sind dies die gesuchten Invarianten. Addieren wir nun zu (45)  $\kappa_3$ , so erhalten wir die erste Größe

$$I' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3,$$

auf welche dies Kriterium zutrifft; addieren wir ferner (46) und (48), so finden wir die zweite dieser Art, nämlich

$$I'' = j_{12} \kappa_1 \kappa_2 + j_{23} \kappa_2 \kappa_3 + j_{31} \kappa_3 \kappa_1;$$

und multiplizieren wir schließlich (46) und (47), so finden wir in Rücksicht auf Gleichung (40), nach welcher

$$J = j_{12} j_{23} j'_{13}$$

in den Indizes 1, 2, 3 symmetrisch ist, als dritte Invariante

$$I''' = J \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3.$$

Für drei inkohärente Strahlenbündel ist nun nach §§ 4 und 7

$$j_{12} = j_{23} = j_{31} = J = 1.$$

Läßt sich unser System auf umkehrbarem Wege auf solche zurückführen, so bestimmen sich ihre Intensitäten  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$  aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 + K_3 &= I', \\ K_1 K_2 + K_2 K_3 + K_3 K_1 &= I'', \\ K_1 K_2 K_3 &= I'''. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

*Die Entropie eines Systems von drei partiell kohärenten Strahlenbündeln beträgt:*

$$(49) \quad E = \sigma [L(K_1) + L(K_2) + L(K_3)],$$

wobei  $K_1, K_2, K_3$  die Wurzeln der kubischen Gleichung

$$(50) \quad K^3 - I' K^2 + I'' K - I''' = 0$$

sind, und die Koeffizienten  $I', I'', I'''$  die Werte

$$(51) \quad \begin{cases} I' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3, \\ I'' = j_{12} \kappa_1 \kappa_2 + j_{23} \kappa_2 \kappa_3 + j_{31} \kappa_3 \kappa_1, \\ I''' = J \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \end{cases}$$

haben. Dabei sind, um es zu wiederholen, die  $\kappa$  die reduzierten spezifischen Intensitäten der Strahlenbündel, die  $j$  die in § 4 definierten Inkohärenzen zweiter und  $J$  die Inkohärenz dritter Ordnung.

Ist  $\kappa_3 = 0$ , so verschwindet  $I'''$ , also auch eine von den drei Wurzeln von (50); da sich zugleich  $I''$  auf  $j_{12} \kappa_1 \kappa_2$  reduziert, findet man unmittelbar die Formel (28) für die Entropie zweier partiell kohärenter Strahlen wieder. Ist  $J = 0$ , so verschwindet ebenfalls  $I'''$  und eine der Wurzeln. Das System läßt sich dann auf zwei inkohärente Strahlenbündel zurückführen. Hierher gehört auch der Fall, daß von den drei Strahlenbündeln zwei vollkommen kohärent sind. Dann ist eine der Größen  $j$ , etwa  $j_{12}$ , gleich Null, nach (40) also auch  $J$ , während aus (37), indem man die Indizes  $f, g, h$  mit 1, 2, 3 vertauscht,  $j_{13} = j_{23}$  folgt, so daß

$$I'' = j_{13} (\kappa_1 + \kappa_2) \kappa_3$$

wird. Man sieht hieraus, daß zwei vollkommen kohärente Strahlenbündel einem einzigen thermodynamisch äquivalent sind, dessen spezifische Intensität die Summe ihrer spezifischen Intensitäten ist; denn  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  treten dann nur noch in der Verbindung  $\kappa_1 + \kappa_2$  auf. Sind endlich alle drei Strahlenbündel vollkommen kohärent, so verschwinden alle Inkohärenzen, mit ihnen die Invarianten  $I''$  und  $I'''$  und zwei der Wurzeln von Gleichung (50), während die dritte gleich  $I'$  wird. Die Entropie eines solchen Systems ist also nach (49) und (51)

$$E = \sigma L (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3).$$

Schon an diesen Beispielen und ebenso an dem trivialen Fall dreier inkohärenter Strahlenbündel, in welchem  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  selbst die Wurzeln der Gleichung (50) sind, sieht man, daß diese reelle positive Wurzeln haben kann. Negative reelle

Wurzeln sind auch schon allein dadurch ausgeschlossen, daß ihre Koeffizienten abwechselnd positiv und negativ sind. Dagegen ist mir der Beweis nicht gelungen, daß komplexe Wurzeln unmöglich sind. Träten solche einmal auf, so ließe sich das gegebene System auf keinem umkehrbaren Wege in drei vollkommen inkohärente Strahlenbündel verwandeln, und der Beweis von Formel (49) würde insofern hinfällig, als die Art der Abhängigkeit der Entropie von den Invarianten  $I'$ ,  $I''$ ,  $I'''$  unbestimmt bliebe, obwohl diese Formel auch dann noch einen reellen Wert lieferte.

Ebenso lassen wir es zweifelhaft, wie sich unser Ergebnis auf mehr als drei Strahlenbündel überträgt. Die erste Invariante hat dann natürlich den Wert

$$I' = \sum_l \kappa_l,$$

und die zweite

$$I'' = \frac{1}{2!} \sum_l \sum_m I_{lm} \kappa_l \kappa_m. \quad l \pm m.$$

Die Doppelsumme hier setzt sich nämlich zusammen aus dem Glied

$$j_{12} \kappa_1 \kappa_2,$$

ferner aus Termen, die wie

$$j_{34} \kappa_3 \kappa_4$$

die Indizes 1 und 2 nicht enthalten, und aus Ausdrücken von der Form

$$j_{1l} \kappa_1 \kappa_l + j_{2l} \kappa_2 \kappa_l;$$

alle diese Summanden bleiben aber bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung der Strahlenbündel 1 und 2 unverändert. Der Faktor  $\frac{1}{2!}$  ist hinzugesetzt, weil jeder Summand  $j_{lm} \kappa_l \kappa_m$  auch noch in der Form  $j_{ml} \kappa_m \kappa_l$  auftritt.

Man kann vermuten, und die Betrachtung am Schluß der nächsten Paragraphen stützt diese Annahme, daß

$$I''' = \frac{1}{3!} \sum_l \sum_m \sum_n J_{lmn} \kappa_l \kappa_m \kappa_n,$$

$$I'''' = \frac{1}{4!} \sum_l \sum_m \sum_n \sum_o J_{lmno} \kappa_l \kappa_m \kappa_n \kappa_o \text{ etc.}$$

wird, wo  $J_{lmno}$  eine „Inkohärenz vierter Ordnung“ ist; bei

allen diesen Summenbildungen sind nur voneinander verschiedene Werte der Indizes  $l, m, n, o$  zuzulassen. Die Entropie wäre dann

$$E = \sigma \sum_l L(K_l),$$

wo die  $K_l$  die  $n$  Wurzeln der Gleichung

$$K^n - I' K^{n-1} + I'' K^{n-2} - \dots \pm I^{(n)} = 0$$

bedeuteten. Doch scheinen mir auf diesem Gebiete noch manche Schwierigkeiten zu liegen.

#### Allgemeine Folgerungen.

In § 4 wurde gezeigt, daß die isotherme Spiegelung, d. h. die Reflexion eines Strahlenbündels an einem Körper von gleicher Temperatur, die Kohärenz des ersteren zu einem anderen Strahlenbündel herabsetzt; und in § 5 wurde abgeleitet, daß mit abnehmender Kohärenz die Entropie zunimmt. Demnach ist die isotherme Spiegelung, welche als umkehrbar zu bezeichnen ist, wenn es sich nur um den reflektierenden Körper und das gespiegelte Strahlenbündel handelt, irreversibel, sobald man noch ein ihm partiell kohärentes Strahlenbündel mit in Betracht zieht. Der eigentliche Grund dafür liegt aber nicht in dem Vorgang an der Grenzfläche, sondern allein in der Absorption und Zerstreuung des in den Körper eindringenden Strahlenbündels; denn dies büßt dabei zwar nicht seine Intensität, wohl aber die Kohärenz zu dem genannten ein.

Ferner ist in einem von vollkommen spiegelnden Wänden eingeschlossenen, absorbierende und diathermane Körper enthaltenden Hohlraum Gleichheit der Temperatur aller Körper und Strahlenbündel noch nicht hinreichende Bedingung für den Zustand maximaler Entropie. Vielmehr ist es denkbar, daß trotz des vollzogenen Temperatúrausgleiches noch partielle Kohärenz zwischen einigen Strahlenbündeln besteht. Bei jeder Absorption und Zerstreuung wird diese aber herabgesetzt, während neue Kohärenzen nicht geschaffen werden; denn gleichtemperierte, inkohärente Strahlen liefern nach § 5 auch bei gemeinsamer Spiegelung und Brechung stets wieder inkohärente Strahlen. Daher nähert sich der Zustand mit der Zeit sicher dem durch absolute Inkohärenz gekennzeichneten Entropie-

maximum. Die Theorie ist also vollkommen im Recht, wenn sie auf Gleichgewichtszustände das Additionstheorem anwendet. Nur falls der Hohlraum gar keine absorbierenden Substanzen enthält, können sich in ihm — wie auch andere instabile Strahlungszustände<sup>1)</sup> — Kohärenzen dauernd halten.

Eine andere Folgerung betrifft die Fortpflanzung der Strahlung in dispergierenden Körpern. Bei fehlender Absorption lassen sich dabei drei Stadien unterscheiden<sup>2)</sup>: Im ersten schreitet die Welle mit Gruppengeschwindigkeit fort und erleidet periodische Formänderungen, indem an die Stelle der Schwingung  $f$

$$f \cos \alpha + f^* \sin \alpha$$

tritt, wobei  $\alpha$  zur zurückgelegten Strecke proportional ist; Kohärenzverhältnisse werden dadurch nicht berührt. Im zweiten bewirkt die Dispersion der Gruppengeschwindigkeit eine stärker und stärker werdende Formänderung, welche die Kohärenz natürlich immer mehr herabsetzt. Im dritten Stadium endlich ist die Welle in einen langen Zug angenäherter Sinusschwingungen aufgelöst, deren Periode sich nur langsam ändert. Sinusschwingungen gleicher Periode sind aber stets interferenzfähig, ganz unabhängig von ihrem Ursprung. Man könnte dann also die Strahlung verschiedener Körper zur Interferenz bringen, was sich unmittelbar zur Konstruktion eines Perpetuum mobile zweiter Art verwenden ließe.<sup>3)</sup> Der zweite Hauptsatz fordert daher, daß die Strahlung praktisch vollkommen absorbiert und zerstreut ist, bevor sie das letzte Stadium erreicht.

Jetzt können wir aber zeigen, daß dem Entropieprinzip zufolge nicht einmal das zweite, viel früher eintretende Stadium ohne wesentliche Schwächung erreicht werden darf. Leiten wir nämlich das eine von zwei kohärenten, anfangs im Vakuum befindlichen Strahlenbündeln durch ein dispergierendes Mittel, so würde im zweiten Stadium mit abnehmender Kohärenz die Entropie wachsen. Lassen wir es darauf wieder ins Vakuum austreten, und das andere in demselben Mittel dieselbe Strecke

1) M. Planck, Vorl. über Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig 1906. § 51 und § 52.

2) M. Laue, Ann. d. Phys. 18. p. 523. 1905.

3) M. Laue, Ann. d. Phys. 20. p. 365. 1906, vgl. § 3.



zurücklegen, so erlitte dies dieselbe Änderung der Schwingungsform, die Kohärenz und mit ihr die Entropie nähme wieder den Anfangswert an. Auch diesem Widerspruch mit dem Entropieprinzip entgeht man nur durch die Annahme starker Absorption. Tatsächlich ist meines Wissens auch noch nie eine Abnahme der Interferenzfähigkeit bei der Fortpflanzung durch dispergierende Mittel beobachtet worden. Selbst bei einem Woodschen Versuch<sup>1)</sup>, bei welchem das Licht der gelben Heliumlinie sehr stark anomal dispergierenden Natriumdampf durchsetzte, behielt es seine Kohärenz kollkommen.

Es ist bemerkenswert, daß diese zweite Einschränkung im Gegensatz zu der ersteren sich nicht auf das Prinzip von der Unmöglichkeit des Perpetuum mobile zweiter Art zurückführen läßt, sondern auf dem Boltzmannschen Gedanken des Zusammenhanges zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit und der daraus entspringenden Planckschen Idee der Nichtgültigkeit des Additionstheorems beruht; denn nur auf dieser Grundlage läßt sich überhaupt die Kohärenz thermodynamisch werten.

Zum Schluß wollen wir noch einen Schritt zur Deutung unseres Ergebnisses im Sinne dieser Theorie unternehmen. Sind die Intensitäten  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  zweier Strahlenbündel groß gegen  $h\nu^3/c^2$  und ist ihre Inkohärenz  $j_{12}$  nicht gerade klein gegen 1, so sind in Gleichung (28) die Argumente der beiden  $L$ -Funktionen von derselben Größenordnung wie  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , und man kann Formel (23) durch die einfachere Beziehung

$$(52) \quad L(\kappa) = \frac{k\nu^2}{c^2} \log\left(\frac{c^2 \kappa}{h\nu^3}\right), \quad E = \sigma \frac{k\nu^2}{c^2} \log\left(\frac{c^2 \kappa}{h\nu^3}\right)$$

ersetzen. Wir befinden uns dann, da für die Temperatur  $T$  hieraus

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial L}{\partial \kappa} = \frac{k^2 \nu^2}{c^2 \kappa}$$

folgt, im Gültigkeitsbereich des Rayleighschen Strahlungsgesetzes<sup>2)</sup>; d. h. wir vernachlässigen die Größe des elementaren Wirkungsquantums (Lichtquants). Da die Wahrscheinlich-

1) R. W. Wood, Phil. Mag. (6) 8. p. 324. 1904.

2) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung p. 159. Leipzig 1906.

keit  $W(\kappa)$  eines Strahlenbündels mit seiner Entropie durch die universelle Beziehung

$$E = k \log W$$

verknüpft ist, wird dabei

$$(53) \quad W(\kappa) = \left( \frac{c^2 \kappa}{h \nu^3} \right)^\sigma \frac{\nu^2}{c^2}.$$

Setzen wir nun (52) in (28) ein, so finden wir für die Entropie und die Wahrscheinlichkeit eines Systems von zwei partiell kohärenten Strahlenbündeln nach (53)

$$E = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[ \left( \frac{c^2}{h \nu^3} \right)^2 j_{12} \kappa_1 \kappa_2 \right],$$

$$W = \left[ \left( \frac{c^2}{h \nu^3} \right)^2 j_{12} \kappa_1 \kappa_2 \right]^\sigma \frac{\nu^2}{c^2} = W(\kappa_1) \cdot W(j_{12} \kappa_2).$$

Bei absoluter Inkohärenz wären demnach die Wahrscheinlichkeiten beider Strahlenbündel einfach zu multiplizieren, wie das selbstverständlich ist. Für partiell kohärente Strahlenbündel hat man dagegen gemäß unserer Definition der Inkohärenz  $j$  (Gleichung (21)) dabei von der Intensität des einen den Anteil abzuziehen, der von dem zum anderen Strahlenbündel kohärenten Anteil der Schwingung herrührt, und nur ihren dazu inkohärenten Anteil zu berücksichtigen; denn dessen Intensität ist

$$\overline{g_f'^2} = j_{fg} \overline{g^2} = j_{12} \kappa_2.$$

Bei drei Strahlenbündeln, für welche  $j_{12}$ ,  $j_{23}$ ,  $j_{31}$  und  $J$  nicht gerade klein gegen 1 sein dürfen, geht Formel (49) durch Substitution von (52) gemäß (50) und (51) über in

$$E = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[ \left( \frac{c^2}{h \nu^3} \right)^3 K_1 K_2 K_3 \right] = \sigma \frac{k \nu^2}{c^2} \log \left[ \left( \frac{c^2}{h \nu^3} \right)^3 J \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \right].$$

Da nach (40)

$$J = j_{12} j_{23} j'_{31},$$

so wird nach (53)

$$W = \left[ \left( \frac{c^2}{h \nu^3} \right)^3 \kappa_1 \cdot j_{12} \kappa_2 \cdot j_{23} j'_{31} \kappa_3 \right]^\sigma \frac{\nu^2}{c^2}$$

$$= W(\kappa_1) \cdot W(j_{12} \kappa_2) \cdot W(j_{23} j'_{31} \kappa_3).$$

Es ist aber nach (39a)

$$j_{23} j'_{31} \kappa_3 = j_{gh} j_{hg'} j'_{fg'} \overline{h^2} = \overline{(h_g j'_{fg})^2},$$

derjenige Anteil an der Intensität  $\kappa_3$ , welcher allein von dem zu den beiden anderen Strahlenbündeln inkohärenten Anteil der Schwingung  $h$  herrührt.

Man sieht ohne weiteres, wie sich die Wahrscheinlichkeit von vier, fünf und mehr Strahlenbündeln berechnen wird; unsere Vermutung über die Entropie, die wir am Ende von § 9 aussprachen, findet hierin eine Stütze. Auch ahnt man, daß unsere rein phänomenologisch abgeleiteten Formeln im Lichte der Wahrscheinlichkeitstheorie einen einfachen Sinn erhalten werden. Diesen zu entdecken, muß das nächste Ziel der Thermodynamik der Interferenzerscheinungen sein.

Berlin, März 1907.

(Eingegangen 27. März 1907.)

---