

UN THÉORÈME SUR L'INTÉGRATION SOUS LE SIGNE INTÉGRALE.

Par M. Grégoire Fichtenholz (Odessa).

Adunanza del 27 aprile 1913.

Nous voulons établir un théorème extrêmement simple sur l'intégration sous le signe intégrale comme une conséquence du théorème connu de ARZELÀ dont nous citons l'énoncé ¹⁾:

« Soit $g(x, n)$ une fonction des variables x et n bien déterminée pour chaque valeur de x dans l'intervalle (a, b) et pour chaque valeur du nombre naturel n .
« Supposons: 1° que cette fonction soit intégrable de a à b pour chaque valeur constante de n ; 2° qu'il existe une limite finie $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(x, n)$ pour chaque valeur constante de x ; 3° que pour les valeurs indiquées de x et n $|g(x, n)|$ ne surpasse K , K étant une constante; enfin, 4° que la fonction limite $G(x)$ elle-même soit intégrable de a à b . Dans ces conditions on aura

$$\lim \int_a^b g(x, n) dx = \int_a^b G(x) dx ».$$

De là nous déduisons facilement la proposition auxiliaire ²⁾ dont nous aurons besoin:

LEMME. — Si la fonction $g(x, n)$ satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° du théorème de ARZELÀ, on peut affirmer qu'il existe une limite finie

$$I = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g(x, n) dx.$$

Pour arriver à ce résultat il suffit de démontrer que, en désignant par ε une quantité positive choisie à volonté, on peut toujours déterminer un nombre N , tel que,

¹⁾ C. ARZELÀ, *Sulla integrazione per serie* (Nota I) [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Roma), vol. I (1885), pp. 532-537], p. 537; W. F. OSGOOD, *Non-Uniform Convergence and the Integration of Series Term by Term* [American Journal of Mathematics, Vol. XIX (1897), pp. 155-190], p. 182; C. ARZELÀ, *Sulle serie di funzioni* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche, serie V, tomo VIII (1899-1900), pp. 131-186, 701-744], p. 724.

²⁾ Cette proposition résulte immédiatement d'un théorème analogue à celui de ARZELÀ et relatif aux intégrales dans le sens de M. LEBESGUE. Voir: H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* (Paris, Gauthier-Villars, 1904), p. 114.

pour $n' > N$, $n'' > n'$, on ait

$$\left| \int_a^b g(x, n'') dx - \int_a^b g(x, n') dx \right| = \left| \int_a^b [g(x, n'') - g(x, n')] dx \right| < \varepsilon.$$

Faisons l'hypothèse contraire ou, ce qui est la même chose, admettons l'existence d'une quantité positive ε_0 et de deux suites des entiers croissants n'_m et n''_m ($m=1, 2, \dots$; $n''_m > n'_m$), telles que, pour chaque valeur de m , on ait

$$\left| \int_a^b [g(x, n''_m) - g(x, n'_m)] dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

En posant $g(x, n''_m) - g(x, n'_m) = g_1(x, m)$, nous remarquons que $|g_1(x, m)| \leq 2K$ et $\lim_{m \rightarrow \infty} g_1(x, m) = 0$; par conséquent, en vertu du théorème de ARZELÀ,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b [g(x, n''_m) - g(x, n'_m)] dx = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^b g_1(x, m) dx = 0,$$

ce qui est en contradiction avec la relation précédente.

Cela posé, nous pouvons démontrer le théorème fondamental qui suit :

THÉORÈME. — Soit $f(x, y)$ une fonction des variables x et y bien déterminée pour chaque valeur de x dans l'intervalle (a, b) et pour chaque valeur de y dans l'intervalle (c, d) .

Supposons : 1° que cette fonction soit intégrable de a à b pour chaque valeur constante de y ; 2° qu'elle soit intégrable de c à d pour chaque valeur constante de x ; 3° que, pour les valeurs indiquées de x et y , $|f(x, y)|$ ne dépasse K , K étant une constante.

Dans ces conditions on peut affirmer l'EXISTENCE et l'ÉGALITÉ des intégrales

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx \quad \text{et} \quad \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy \quad ^3).$$

Posons

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x, y) dx, \quad \psi(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

Considérons une suite quelconque de subdivisions de l'intervalle (c, d) en parties

3) Dans tous les théorèmes analogues (qui me sont connus) sur les fonctions bornées on rencontre des conditions plus étroites. Voir, par ex. : E. HOSSENFELDER, *Ueber die Reihenfolge gewisser Grenzüperationen in der Integralrechnung* [Wissenschaftliche Beilage zum XVII. Jahresbericht des Kgl. Gymnasiums zu Strassburg i. Westpr., 1891, Progr. Nr. XLI], pp. 17-18; C. ARZELÀ, *Sugli integrali doppi* [Memorie della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, sezione delle Scienze Fisiche e Matematiche, serie V, tomo II (1892), pp. 133-147], p. 143; O. STOLZ, *Grundzüge der Differential- und Integralrechnung* (Leipzig, Teubner), III. Teil (1899), pp. 2, 4; G. H. HARDY, *On differentiation and integration under the integral sign* [The Quarterly Journal of Mathematics, Vol. XXXII (1901), pp. 66-140], pp. 79-80; E. W. HOBSON, *On Repeated Integrals* [Proceedings of the London Mathematical Society, Series II, Vol. V (1907), pp. 325-334], p. 327.

J'ai donné ce théorème pour la première fois en 1910 dans un travail : *Théorie des intégrales définies simples dépendantes d'un paramètre*, présenté à la Faculté des Sciences Physiques et Mathématiques de l'Université d'Odessa.

ayant des longueurs $\eta_n^{(1)}, \dots, \eta_n^{(m_n)}$ ($n = 1, 2, \dots$), supposant *seulement* que toutes ces longueurs tendent vers zéro pour $n = \infty$, et choisissons *arbitrairement* dans l' i_n -ième ($i_n = 1, \dots, m_n$) partie une valeur $y_n^{(i_n)}$.

Alors on aura

$$\sum_{i_n=1}^{m_n} \varphi(y_n^{(i_n)}) \cdot \eta_n^{(i_n)} = \sum_{i_n=1}^{m_n} \left[\int_a^b f(x, y_n^{(i_n)}) dx \right] \cdot \eta_n^{(i_n)} = \int_a^b \left[\sum_{i_n=1}^{m_n} f(x, y_n^{(i_n)}) \cdot \eta_n^{(i_n)} \right] dx.$$

En posant $\sum_{i_n=1}^{m_n} f(x, y_n^{(i_n)}) \cdot \eta_n^{(i_n)} = g(x, n)$, nous remarquons que $|g(x, n)| \leq K \cdot (d - c)$ et (par la définition même de l'intégrale) $\lim_{n=\infty} g(x, n) = \psi(x)$; d'après le lemme précédent, il existe une limite finie

$$I = \lim_{n=\infty} \int_a^b g(x, n) dx = \lim_{n=\infty} \sum_{i_n=1}^{m_n} \varphi(y_n^{(i_n)}) \cdot \eta_n^{(i_n)}.$$

La limite dont on a démontré l'existence ne dépend, ni du mode de la subdivision de l'intervalle (c, d) , ni du choix des valeurs de y dans les intervalles partiels. En effet, si deux lois distinctes (du genre indiqué) conduisaient à des limites différentes I' et I'' , on pourrait, en les combinant (par exemple, en suivant la première pour n impair et la seconde pour n pair), obtenir une troisième loi du même genre, telle que la somme correspondante n'aurait pas de limite.

D'après ce qui précède, il est aisé de conclure que la limite I est l'intégrale définie $\int_c^d \varphi(y) dy$. Nous arrivons donc à la relation suivante:

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \lim_{n=\infty} \int_a^b g(x, n) dx.$$

Mais, par un raisonnement tout semblable, on verra que la fonction $\psi(x)$ [la fonction limite pour $g(x, n)$] est elle-même intégrable de a à b et par conséquent, en vertu du théorème de ARZELÀ,

$$\int_c^d \varphi(y) dy = \int_a^b \psi(x) dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Notre proposition est donc démontrée.

Odessa, 28 novembre 1912.

GRÉGOIRE FICHTENHOLZ.