IV. *Ueber den zweckmäfsigsten Widerstand des Galvanometers beim Messen von Widerständen mittelst einer Wheatstone'schen Brücke*[1]; *von Louis Schwendler.*

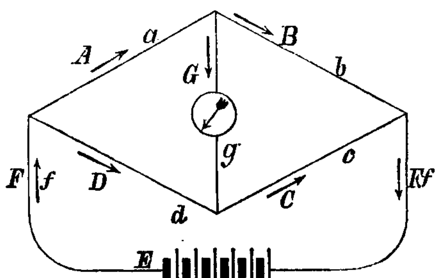
Es ist allgemein bekannt, dafs beim Messen von Widerständen mittelst einer Wheatstone'schen Brücke die gröfste Empfindlichkeit erreicht wird, wenn die vier Brückenzweige einander gleich sind; keine Untersuchung existirt jedoch bis jetzt, meines Wissens, über die mindestens gleich wichtige Frage:

Welcher Widerstand des Galvanometers das magnetische Moment desselben zu einem Maximum mache, wenn die übrigen Zweige gegeben sind.

Es ist bekannt, dafs im einfachen Stromkreis der Widerstand des Galvanometers gleich dem aufserwesentlichen Widerstande seyn mufs, um das magnetische Maximum zu erreichen. Aus ähnlichen Gründen wie hier, mufs auch in dem complicirten Stromlauf einer Brücke ein solches Gesetz existiren, und ist nur die Frage zu beantworten, was in diesem Falle als aufserwesentlicher Widerstand zu betrachten sey. Die Beantwortung dieser Frage, welche aus einem practischen Bedürfnifs hervorgegangen ist, soll der Hauptgegenstand der folgenden Untersuchung seyn.

In untenstehender Figur 1 seyen *a*, *b*, *c*, und *d* die

Fig. 1.



1) Zuerst mitgetheilt im *Phil. Mag.* Mai 1866 und Jan. 1867.

Widerstände der vier Zweige, f der Widerstand im Batteriezweige und g der unbekannte Widerstand des Galvanometers. Bezeichnet man mit den resp. grofsen Buchstaben die Stromstärken in den sechs verschiedenen Zweigen der Brücke und ist E die elektromotorische Kraft, so hat man nach den beiden Kirchhoff'schen Gesetzen die folgenden sechs von einander unabhängigen Gleichungen:

$$A = B + C$$
$$C = D + G$$
$$F = A + D$$
$$aA + gG - dD = o$$
$$fF + aA + gG + cC = E$$
$$gG + cC - bB = o$$

Aus diesen 6 Gleichungen die 5 Stromstärken A, B, C, D, und F eliminirt, folgt eine Gleichung die nur noch die Stromstärke G, die elektromotorische Kraft E und die Widerstände der sechs Zweige enthält; aus dieser Gleichung die Stromstärke G entwickelt, folgt:

$$G = \frac{E}{\frac{g(c+d)(a+b)+f(a+b+c+d)}{bd-ac} + \frac{f(b+c)(a+d)+ab(c+d)+cd(a+b)}{bd-ac}}$$

Setzt man in diesem Ausdruck für G, $bd - ac = o$, so folgt $G = o$; das bekannte Brückengesetz.

Zur Vereinfachung setze man:

$$(c+d)(a+b) + f(a+b+c+d) = V$$
$$bd - ac = \alpha$$
$$f(b+c)(a+d) + ab(c+d) + cd(a+b) = W$$

und multiplicirt man den Ausdruck für G mit U der Anzahl der Umwindungen im Galvanometer, so erhält man das magnetische Moment desselben, welches mit Y bezeichnet werden mag, nämlich:

$$Y = E\alpha \frac{U}{gV + W}$$

Bezeichnet man mit q den Querschnitt des Drahtes, welcher den gegebenen Raum füllt, so hat man zwischen U, q und g die folgenden beiden Gleichungen:

$$U = \frac{\text{const.}}{q}$$

$$\text{und } g = \frac{U\,.\,\text{const}}{q}$$

$$\text{also } U = \text{const. } \sqrt{g}\ ^{1)},$$

und deshalb

$$Y = E\alpha\,.\,\frac{\sqrt{g}}{gV+W}\,.\,\text{Const.}$$

In diesem Ausdruck für Y nehme man allein g veränderlich und es kommt jetzt nur darauf an denjenigen Werth von g zu bestimmen, für welchen Y zum Maximum wird. Das ist der Fall, wenn

$$g = \frac{W}{V}$$

oder, indem man wieder die Werthe von W und V substituirt;

$$g = \frac{f(b+c)(c+d) + ab(c+d) + cd(a+b)}{(c+d)(a+b) + f(a+b+c+d)} \quad . \quad . \quad (1).$$

Indem man Zähler und Nenner dieses Bruches mit ac dividirt, erhält man die für die weitere Untersuchung besser geeignete Formel:

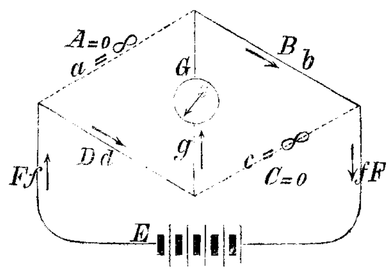
$$g = \frac{f\left(1+\frac{d}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) + bd\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right) + b + d}{\left(1+\frac{d}{a}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right) + f\left(\frac{b+d}{ac}+\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)} \quad . \quad . \quad (1).$$

Diese Gleichung (1) giebt also die allgemeine Abhängigkeit zwischen dem Galvanometerwiderstand und den Widerständen der 5 übrigen Zweige, wenn das magnetische Moment ein Maximum ist, und da diese Gleichung unabhängig von der Gleichgewichtsbedingung ($G = o$) entwickelt worden ist, so mufs man das bekannte Gesetz für den einfachen Stromkreis daraus erhalten, wenn man $a = c = \infty$ setzt. Fig. 1 wandelt sich alsdann um in Fig. 2 (siehe umstehende Figur) und die Gleichung (1) giebt

$$g = f + b + d$$

was wichtig ist.

1) Was nur richtig ist, wenn die radiale Dicke der isolirenden Umhüllung im Verhältnifs zum Drahtdurchmesser sehr klein ist.



Anstatt der Gleichung (1) kann man auch schreiben

$$g = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d} + f\gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

vorausgesetzt dafs

$$\gamma = \frac{(ac-bd)^2}{(a+b)(c+d)[(a+b)(c+d)+f(a+b+c+d)}$$

Es ist jedoch klar, dafs das Gesetz, welches durch Gleichung (1) ausgedrückt wird, nur dann von wirklich practischem Interesse ist, wenn man dem Gleichgewicht in der Brücke sehr nahe, d. h. G sehr nahe Null ist. Für diesen Fall haben wir $ac - bd$ sehr klein, deshalb γ, welches dem Quadrat dieser kleinen Gröfse proportional ist, nähert sich noch mehr der Gränze Null und da f, der Widerstand im Batteriezweige, schon von selbst so klein als es eben möglich ist, gewählt wird, so kann man sehr nahe dem Gleichgewicht, $f\gamma = o$ setzen. Nahe dem Zustande des Gleichgewichts hat man daher näherungsweise:

$$g = \frac{ab}{a+b} + \frac{cd}{c+d}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Da aber $(ac - bd)^2$ sehr klein, so kann man auch schreiben

$$g = \frac{(a+d)(b+c)}{a+b+c+d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Welche Gleichung (2) ein sehr einfaches Gesetz für die Wheatstone'sche Brücke nahe dem Gleichgewicht giebt.

Das magnetische Maximum wird erreicht, wenn der Widerstand des Galvanometers gleich dem parallel gestell-

ten Widerstand derjenigen beiden Doppelzweige ist, welche dem Galvanometer gegenüber liegen.

Hiernach kann man also stets den Widerstand, resp. den Durchmesser, des Drahtes berechnen, der den gegebenen Raum auszufüllen hat, und zwar erhält man im Allgemeinen für jeden verschiedenen, zu messenden Widerstand einen anderen Werth von g; da jedoch das Galvanometer nur eine sehr beschränkte Anzahl von verschiedenen Widerständen besitzen kann, so wird es nöthig, für diejenigen zu messende Widerstände das obige Gesetz allein in Erfüllung gehen zu lassen, für welche die anderen Bedingungen am unvortheilhaftesten sich stellen, und es ist klar, dafs dieses der Fall seyn wird für alle grofsen Widerstände, die nur mittelst einer grofsen Differenz in den Zweigen a und d gemessen werden können. Mit den gewöhnlichen Brücken, wie sie jetzt allgemein bei Kabelprüfungen angewandt werden, kann man Widerstände zwischen den Gränzen 0,01 bis 1 Mill. Siemens's Einheiten messen. Die Zweige a und d bestehen aus den Widerständen 10, 100 und 1000, während der Vergleichswiderstand zwischen den Gränzen 1 bis 10000 Siemens'scher Einheiten verändert werden kann, und es ist evident, dafs, wenn man für eine solche Brücke den Widerstand eines Galvanometers mit nur einem Windungssystem zu wählen hat, dieser Widerstand das gefundene Gesetz erfüllen mufs, wenn die grofsen Widerstände von 100000 bis 1 Mill. S. E. gemessen werden sollen, oder wenn man das Mittel 550000 zu messen hat. Für diesen Fall hat man in Gleichung (2) zu setzen

$$a = 10$$
$$d = 1000$$
$$b = 5500$$
und $c = 550000$;

dann folgt: $g = 1009$ Siemens's Einheit.

Da näherungsweise $dc - bd = 0$ gesetzt werden kann, so kann man Gleichung (2) auch schreiben

$$g = \left(\frac{a+d}{c+d}\right) c$$

und für den Fall, dafs der zu messende Widerstand c im Verhältnifs zum gröfsten der beiden Zweige, nämlich d, sehr grofs ist, kann man auch schreiben:

$$g = a + d$$

oder in diesem Fall:

Das magnetische Maximum des Galvanometers wird erreicht, wenn der Widerstand desselben gleich ist der Summe der beiden kleinsten Zweige.

Obgleich schon aus der Herleitung folgt, unter welchen Bedingungen das gefundene Gesetz, resp. Gleichung (2), allein richtig ist, so will ich doch noch einmal diese Bedingungen hier kurz wiederholen, besonders da die letzte der Bedingungen zu einer weiteren Untersuchung Veranlassung giebt, die von einem ganz allgemeinen Interesse ist.

Der Ausdruck für g Gleichung (2) ist nur richtig, wenn

1) der Widerstand im Batteriezweige sehr klein ist, wenigstens klein im Verhältnifs zum Parallel-Widerstand der beiden Doppelzweige, welche dem Galvanometer gegenüber liegen d. h. klein im Verhältnifs zu $\frac{(a+d)(b+c)}{a+b+c+d}$;

2) das Gleichgewicht mufs nahezu hergestellt seyn, und

3) der nichtleitende Querschnitt einer jeden Umwindung mufs entweder sehr klein seyn im Verhältnifs zum leitenden Querschnitt, oder allgemeiner, dieses Verhältnifs zwischen nichtleitenden und leitenden Querschnitt einer jeden Umwindung mufs eine Constante seyn für Drähte von verschiedenen Durchmessern.

Die beiden ersten Bedingungen werden erfüllt in allen Fällen von practischem Interesse. Die dritte Bedingung wird jedoch nicht erfüllt, in dem die Dicke der isolirenden Umhüllung von Drähten (Seide) für Drähte von sehr verschiedenem Durchmesser constant ist, d. h. so dünn als es die Natur des isolirenden Materials zuläfst. Das Verhältnifs zwischen dem nichtleitenden und leitenden Querschnitt eines Drahtes variirt daher mit dem Durchmesser des Drahtes; aus diesem Grunde erscheint es also nothwendig den Ausdruck für g zu corrigiren. Diese Correction zu finden und zu untersuchen, ob sie wirklich so grofs sey, um in gewissen vorkommenden Fällen sie berücksichtigen zu müssen, ist der Zweck der weiteren Untersuchung. Diese Untersuchung hat nicht allein Interesse in unserem speciellen Fall der Wheatstone'schen Brücke, sondern sie tritt, da aller aufgewickelter Draht isolirt seyn mufs, überall in den Vordergrund, wenn es sich darum handelt, für irgend ein Instrument in irgend einem Stromkreis denjenigen Draht zu wählen, welcher das magnetische Moment des Instruments für gegebenen aufserwesentlichen Widerstand zum Maximum macht.

Es sey:

g der unbekannte Widerstand des Drahtes, der einen gegebenen Raum auszufüllen hat und für diesen Raum das magnetische Maximum erzeugen soll;

k der aufserwesentliche Widerstand in irgend einer gegebenen Stromverzweigung, welcher Widerstand stets eine gewisse Function der Widerstände aller Zweige mit Ausnahme von g ist[1]);

q der leitende Querschnitt einer jeden Drahtumwindung;

$\varDelta$ der nichtleitende Querschnitt einer jeden Umwindung, bestehend aus der isolirenden Umhüllung und dem nicht ausgefüllten Raum;

λ Die specifische Leitungsfähigkeit des Drahtmaterials;

U Die Anzahl der Windungen, welche nöthig sind, den gegebenen Raum mit Draht vollzuwickeln; dann hat man:

$$U = \frac{A}{q + \varDelta}$$

und

$$g = \frac{UB}{\lambda q}$$

oder

$$U = \sqrt{\frac{A\lambda}{B}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{\varDelta}{q}}} \sqrt{g}$$

1) Z. B. für die Wheatstone'sche Brücke nahe dem Gleichgewicht ist: $k = \frac{(a+d)(b+c)}{a+b+c+d}$.

A und B sind zwei Constante für constanten Raum und constante Leitungsfähigkeit, nämlich A ist die Hälfte des Querschnitts des vollzuwickelnden Raumes, rechtwinklich zu den Windungen, und B die Länge einer mittleren Umwindung. $\frac{B}{A\lambda}$ bedeutet also einen elektrischen Widerstand, der für constanten Raum und constante Leitungsfähigkeit constant ist und mit v' bezeichnet werden mag; also

$$U = \sqrt{\frac{g}{v'}} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{\Delta}{q}}}$$

Setzt man in diesem Ausdruck für U

$$\Delta = o \text{ oder } \frac{\Delta}{q} = \text{constant},$$

so hat man

$$U = \sqrt{g} \,.\, \text{constant},$$

unsere frühere Substitution für U, welche uns für das magnetische Maximum

$$g = k$$

gab; oder der Widerstand des Drahtes, welcher den gegebenen Raum zu füllen hat, mufs gleich dem aufserwesentlichen Widerstand seyn.

Da jedoch, wie schon bemerkt, die radiale Dicke der isolirenden Umhüllung stets dieselbe ist für Drähte von sehr verschiedenen Durchmessern, so ist $\frac{\Delta}{q}$ veränderlich mit q, respective mit g, und deshalb mufs man, um das magnetische Maximum für gegebenen Raum zu erzeugen, haben:

$$g = f(k), \text{ oder:}$$

Sobald man die isolirende Umhüllung berücksichtigt, darf der Widerstand des Drahtes, welcher den gegebenen Raum zu füllen hat, nicht gleich dem aufserwesentlichen Widerstande seyn.

Um diese Function $f(k)$ zu bestimmen, wollen wir annehmen, dafs der gegebene Raum gleichmäfsig mit Draht vollgewickelt werde, dessen isolirende Umhüllung die radiale Dicke δ haben mag. Man kann alsdann setzen:

$$\frac{\varDelta}{q} = c\,\frac{\left(\sqrt{\frac{q}{\pi}} + \delta\right)^2}{q} - 1,$$

c bedeutet eine Constante, welche angiebt, wie man sich das gleichmäfsige Vollwickeln des gegebenen Raumes mit Draht zu denken habe[1]). Den Werth von $\frac{\varDelta}{q}$ in den Ausdruck für U gesetzt und berücksichtigt, dafs man $q = \frac{UB}{g\lambda}$ hat, erhält man:

$$\sqrt{U} = \frac{\sqrt{\frac{g\pi}{v'c}}}{\sqrt{U} + \sqrt{\frac{\delta^2\pi\lambda}{B}}\sqrt{g}}.$$

Da jedoch δ, die radiale Dicke der Isolirung, für alle Drähte als constant vorausgesetzt werden kann, so ist $\frac{B}{\delta^2\pi\lambda}$ ein constanter Widerstand für constanten Raum und constante Leitungsfähigkeit, der mit w bezeichnet werden mag, und setzt man aufserdem:

$$\frac{\pi}{v'c} = \frac{1}{v}$$

so hat man einfacher:

$$\sqrt{U} = \frac{\sqrt{\frac{g}{v}}}{\sqrt{U} + \sqrt{\frac{g}{w}}}$$

Hieraus U entwickelt, folgt:

$$U = \frac{g}{2w} + \sqrt{\frac{g}{v}} \pm \sqrt{\frac{g}{w}\sqrt{\frac{g}{v}} + \frac{g^2}{4w^2}}.$$

Da jedoch U die Anzahl der Umwindungen in einem gegebenen Raum nicht bis ins Unendliche mit g wachsen kann, indem die radiale Dicke der isolirenden Umhüllung stets gröfser als Null ist, so gilt in diesem Fall das negative Zeichen der Quadratwurzel, also:

1) Denkt man sich den Querschnitt $\varDelta$ in Quadrate zerlegt, so hat man $c = 4$, in Sechsecke $c = 3{,}4$ usw.

$$U = \frac{g}{2w} + \sqrt{\frac{g}{v}} - \sqrt{\frac{g}{w}\sqrt{\frac{g}{v}} + \frac{g^2}{4w^2}}.$$

Nennt man jetzt Y das magnetische Moment desjenigen Zweiges, von welchem g der Widerstand und U die Anzahl der Umwindungen ist, so hat man

$$Y = \text{const.}\ \frac{U}{g+k}$$

oder für U den obigen Werth substituirt und $\sqrt{g} = x$ etc. gesetzt, folgt:

$$Y = \text{const.}\ \frac{\frac{x^2}{2w} + \frac{x}{\sqrt{v}} - \sqrt{\frac{x^3}{w\sqrt{v}} + \frac{x^4}{4w^2}}}{x^2+k}$$

und es kommt jetzt nur noch darauf an, denjenigen Werth von x zu bestimmen, welcher Y zum Maximum macht.

Es ist

$$\frac{dY}{dx} = (k+x^2)\left\{\frac{x}{w} + \frac{1}{\sqrt{v}} - \frac{\frac{3x^2}{w\sqrt{v}} + \frac{x^3}{w^2}}{2\sqrt{\frac{x^3}{w\sqrt{v}} + \frac{x^4}{4w^2}}}\right\} -$$

$$2k\left\{\frac{x^2}{2w} + \frac{x}{\sqrt{v}} - \sqrt{\frac{x^3}{w\sqrt{v}} + \frac{x^4}{4w^2}}\right\} = 0,$$

oder nach einigen einfachen Reductionen erhält man die folgende Gleichung:

$$x_4 - k\frac{\sqrt{v}}{w}x^3 - 2kx^2 + k^2 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

Diese Gleichung vom vierten Grade hat nur zwei reelle Wurzeln, welche beide positiv sind. Die eine ist stets gröfser als $\sqrt{k}$ und die andere kleiner als $\sqrt{k}$, so lange $\frac{\sqrt{v}}{w}$ von Null verschieden ist; da aber nun $x < \sqrt{k}$, $\frac{dY^2}{dx^2}$ negativ macht, so entspricht nur diesen Werth einem Maximum von Y [1]).

1) Die andere reelle Wurzel $x > \sqrt{k}$ giebt das Maximum von Y, wenn das positive Zeichen der Quadratwurzel gilt, und der Grund warum Gleichung (3) beide Maxima enthält, ist der, dafs $\frac{dY}{dx} = 0$ identisch ist für beide Y.

Wir haben also:

$$x_2 = g < k, \text{ oder}$$

Unter Berücksichtigung der isolirenden Umhüllung mufs der Widerstand des Raumes, welcher das Maximum des magnetischen Effects erzeugen soll, stets kleiner als der aufserwesentliche Widerstand seyn; und mag nach Gleichung (3) berechnet werden.

Setzt man in Gl. (3) $\frac{\sqrt{v}}{w} = 0$, d. h. $\delta = 0$ (keine isolirende Umhüllung), so hat man den früheren Ausdruck für g, nämlich:

$$x^2 = g = k;$$

die Differenz zwischen k und g hängt deshalb von dem Coëfficienten $m = \frac{\sqrt{v}}{w}$ in der Weise ab, dafs sie mit diesem Coëfficienten wächst. Es wird daher von Interesse seyn, die Natur dieses Coëfficienten etwas näher zu untersuchen.

Wir hatten früher

$$v = \frac{v'c}{\pi} = \frac{B}{A\lambda\pi} \cdot c$$

und

$$w = \frac{B}{\delta^2 \pi \lambda}$$

also

$$m = \frac{\sqrt{v}}{w} = \delta^2 \sqrt{\frac{c\pi\lambda}{AB}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Drückt man elektrische Widerstände in Siemens-schen Einheiten aus, so ist zu messen:

δ^2 und A in Quadratmillimetern
B in Metern

und λ ist die specifische Leitungsfähigkeit des Drahtmaterials, wenn die Leitungsfähigkeit des reinen Quecksilbers bei 0° als Einheit gesetzt wird.

Ist also der aufserwesentliche Widerstand k für irgend eine Stromverzweigung bekannt und der Coëfficient w nach Formel (4) berechnet, so giebt die Gleichung (3) den entsprechenden Werth von $x^2 = g < k$. Eine solche numerische Rechnung ist jedoch stets umständlich, und es wird daher besser seyn einen algebraischen Näherungsausdruck für g zu geben.

Setzt man in Gleichung (3) wieder

$$x = \sqrt{g} \text{ etc.}$$

so hat man

$$g^2 - kmg\sqrt{g} - 2kg + k^2 = 0$$

oder

$$(k-g)^2 = kmg\sqrt{g}$$

oder

$$(k-g)^4 = k^2m^2g^3 \quad \ldots\ldots \quad (3).$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung

$$g = k - p,$$

wo p eine positive Gröfse ist, die mit k und m wächst, so folgt

$$(k-g)^4 = k^2m^2(k-p)^3$$

oder

$$(k-g)^4 = k^2m^2(k^3 - 3k^2p + 3kp^2 - p^3)$$

oder, indem man auf der rechten Seite alle Glieder mit Potenzen von p gegen k^3 vernachlässigt, erhält man näherungsweise:

$$(k-g)^4 = k^5m^2;$$

oder g entwickelt:

$$g = k(1 - \sqrt[4]{km^2}) \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Diese Formel giebt g allerdings etwas zu klein, jedoch hinreichend nahe genug für die practische Anwendung, wie die folgende Tabelle zeigt:

k in Siemens' Einheiten	$g = x^2$ berechnet nach Gl. (3)	$g' = k\left(1 - \sqrt[4]{km^2}\right)$	$g - g'$
100	85,56	83,90	+ 1,66
200	164,00	162,00	+ 2,00
300		236,40	
500		379,50	
700		516,60	
900		648,90	
1000	762,00	714,00	+ 48,00

In dieser Tabelle ist:

$m = 0{,}0026$ d. h.
$\delta = 0^{mm}03$ (die gewöhnliche Dicke von einfach mit Seide umsponnenem Draht).
$\lambda = 55$ (reines Kupfer bei 0°).
$B = 0{,}2$ Meter
$A = 200^{\square mm}$
$c = 4$

Die obige Tabelle zeigt, dafs wenn $m = 0{,}0026$, welcher Werth in vielen Fällen der Anordnung, z. B. für einen noch kleineren Raum und dickere Umspinnung, überschritten werden kann, der corrigirte Werth g um 14,4 bis 23,8 Procent vom correspondirenden aufserwesentlichen Widerstande abweicht. Diese Differenz ist offenbar zu grofs, als dafs man sie in Fällen vernachlässigen könnte wo man es überhaupt nur mit schwachen elektrischen Strömen zu thun hat, wie es z. B. beim Messen von Widerständen mittelst der Brücke oder einer andern Differential-Methode der Fall ist.

Benutzt man die Formel (5) für den Widerstand des Galvanometers in einer Wheatstone'schen Brücke, so hat man nur:

$$k = \frac{(a+d)(b+c)}{a+b+c+d} = \frac{a+d}{c+d} \cdot c$$

zu setzen, und man erhält:

$$g = \frac{a+d}{c+d} \cdot c \left\{ 1 - \sqrt[4]{\frac{a+d}{c+d} \cdot cm^2} \right\} \quad . \quad . \quad . \quad (6).$$

In welcher Formel also jetzt der Einflufs der isolirenden Umhüllung des Drahtes berücksichtigt ist.

Ich will hier noch erwähnen, dafs wenn der aufserwesentliche Widerstand zwischen zu weiten Grenzen veränderlich ist, es besser seyn wird, den gegebenen Raum in zwei gleiche Theile zu theilen und einzeln vollzuwickeln, so dafs man vier Enden behält, wodurch man also in den Stand gesetzt wird, die beiden Windungssysteme entweder hintereinander oder parallel geschaltet zu benutzen. Bezeichnet k' den mittleren aufserwesentlichen Widerstand zwischen zwei gegebenen höchsten Gränzen, k'' den mittleren Widerstand zwischen zwei gegebenen niedrigsten Gränzen, so hat man:

$$x + y = k'$$

$$\frac{yx}{x+q} = k'',$$

wo x und y die Widerstände der beiden Windungssysteme bedeuten, also

$$x = \frac{k'}{2} - \sqrt{\frac{k'^2}{4} - k'k''}$$

$$y = \frac{k'}{2} + \sqrt{\frac{k'^2}{4} - k'k''}$$

z. B. für die Brücken, wie sie jetzt gewöhnlich bei Kabelprüfungen angewendet werden, hat man in Folge der Formel (2)

$k' = 1009$ Siemens's Einheiten

und

$k'' = 109$ do. do.

also

$x = 124{,}4$

$y = 884{,}6,$

welche beiden Werthe, wenn nöthig, noch nach Gl. (3), resp. Formel (4), corrigirt werden mögen.

V. *Ueber den Einflufs der Bewegung der Tonquelle auf die Tonhöhe; von W. Beetz.*

Der Versuch, die von mir im Februarheft dieser Annalen mitgetheilten Messungen über die Tonveränderung rotirenden Stimmgabeln mit dem Doppler'schen Gesetze in Einklang zu bringen, hatte mich zu dem Ergebnifs geführt, dafs sich die Beobachtungen den nach diesem Gesetze aus-