

Über Matrizen- und Differentialkomplexe. III.

Von

ALFRED LOEWY in Freiburg i. Br.

In einem in diesen Annalen Band 78, Seite 343 unter dem gleichen Titel veröffentlichten Aufsatz II*) habe ich neben die schon früher von mir gelehrte Zerlegung eines Matrizenkomplexes in seine aufeinanderfolgenden *vorderen* größten vollständig reduziblen Teilkomplexe eine neue Zerlegung, nämlich die in aufeinanderfolgende *hintere* größte vollständig reduzible Teilkomplexe gestellt. Die Verschiedenheit dieser zwei Zerlegungen habe ich an einem Beispiel gezeigt; bei diesem ergab sich, daß die Anzahl der aufeinanderfolgenden *vorderen* größten vollständig reduziblen Teilkomplexe und der aufeinanderfolgenden *hinteren* größten vollständig reduziblen Teilkomplexe gleich war. (II, § 1, Math. Annalen 78, Seite 343.) Diese Tatsache trifft nun, wie ich hier beweisen will, allgemein zu. Es gilt nämlich das folgende *Theorem*:

Transformiert man einen Matrizenkomplex A erstens unter Hervorhebung seiner aufeinanderfolgenden vorderen größten vollständig reduziblen Teilkomplexe in einen Matrizenkomplex (vgl. I, § 7, Math. Annalen Bd. 78, Seite 35):

$$\mathfrak{A}: \begin{array}{cccc} \mathfrak{A}_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{22} & 0 & \dots 0 \\ \mathfrak{A}_{31} & \mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{33} & \dots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{12} & \mathfrak{A}_{13} & \dots \mathfrak{A}_{11} \end{array}$$

und zweitens unter Hervorhebung seiner aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduziblen Teilkomplexe in einen Matrizenkomplex (vgl. II, § 1, Math. Annalen Bd. 78, Seite 344):

$$\mathfrak{M}: \begin{array}{cccccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & 0 & \dots 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-1} & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2} & \dots 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathfrak{M}_{2,\mu} & \mathfrak{M}_{2,\mu-1} & \mathfrak{M}_{2,\mu-2} & \dots \mathfrak{M}_{22} & 0 \\ \mathfrak{M}_{1,\mu} & \mathfrak{M}_{1,\mu-1} & \mathfrak{M}_{1,\mu-2} & \dots \mathfrak{M}_{12} & \mathfrak{M}_{11} \end{array}$$

*) Obgleich der Aufsatz II einige Monate früher abgefaßt wurde, stehen II und III infolge der Zeitumstände unmittelbar hintereinander in diesem Heft.

so ist $\lambda = \mu$, d. h. die Anzahl der vorderen und der hinteren größten vollständig reduziblen Teilkomplexe ist dieselbe. Ferner ist $\mathfrak{M}_{\mu\mu}$ in der durch den (von mir sogenannten ersten vorderen größten subordinierten) Matrizenkomplex \mathfrak{R}_{11} (vgl. I, § 8, Math. Annalen Bd. 78, Seite 39) bestimmten Art als vorderer Bestandteil (vgl. I, § 10, Math. Annalen Bd. 78, Seite 43) enthalten; allgemein ist immer der Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-1} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-2} & \cdots & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-i+1} & & \end{array}$$

($i = 1, 2, \dots, \mu$)

in der durch den (von mir sogenannten i^{ten} vorderen größten subordinierten) Matrizenkomplex (vgl. I, § 8, Math. Annalen Bd. 78, Seite 39)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \mathfrak{R}_{i1} & \mathfrak{R}_{i2} & \mathfrak{R}_{i3} & \cdots & \mathfrak{R}_{ii} \\ & & & & (i = 1, 2, \dots, \mu) \end{array}$$

bestimmten Art als vorderer Bestandteil (vgl. I, § 10, Math. Annalen Bd. 78, S. 43) enthalten.

Weiter ist der Matrizenkomplex \mathfrak{R}_{22} in der durch den (von mir sogenannten ersten hinteren größten subordinierten) Matrizenkomplex \mathfrak{M}_{11} (vgl. II, § 4, Math. Annalen Bd. 78, Seite 353) bestimmten Art als hinterer Bestandteil (vgl. II, § 5, Math. Annalen Bd. 78, Seite 355) enthalten; allgemein ist immer der Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{R}_{2-i+1,2-i+1} & 0 & 0 & . & . & . & 0 \\ \mathfrak{R}_{2-i+2,2-i+1} & \mathfrak{R}_{2-i+2,2-i+2} & 0 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ \mathfrak{R}_{2,2-i+1} & \mathfrak{R}_{2,2-i+2} & \mathfrak{R}_{2,2-i+3} & \cdots & \mathfrak{R}_{22} & & \end{array}$$

($i = 1, 2, \dots, \lambda$)

in der durch den (von mir sogenannten i^{ten} hinteren größten subordinierten) Matrizenkomplex (vgl. II, § 4, Math. Annalen Bd. 78, Seite 353)

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{M}_{ii} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathfrak{M}_{i-1,i} & \mathfrak{M}_{i-1,i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \mathfrak{M}_{1i} & \mathfrak{M}_{1,i-1} & \mathfrak{M}_{1,i-2} & \cdots & \mathfrak{M}_{11} \end{array}$$

bestimmten Art als hinterer Bestandteil (vgl. II, § 5, Math. Annalen Bd. 78, Seite 355) enthalten.

Zum Beweise transformieren wir den gegebenen Matrizenkomplex in einen Matrizenkomplex \mathfrak{M}^* von derselben Art, der die Form hat:

$$\mathfrak{M}^*: \begin{array}{cccccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1}^* & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-1}^* & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2}^* & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{M}_{2\mu}^* & \mathfrak{M}_{2,\mu-1}^* & \mathfrak{M}_{2,\mu-2}^* & \dots & \mathfrak{M}_{22}^* & 0 \\ \mathfrak{M}_{1\mu}^* & \mathfrak{M}_{1,\mu-1}^* & \mathfrak{M}_{1,\mu-2}^* & \dots & \mathfrak{M}_{12}^* & \mathfrak{M}_{11}^* \end{array}$$

Bei \mathfrak{M}^* sollen die Diagonalmatrizenkomplexe ebenso wie bei \mathfrak{M} aufeinanderfolgende hintere größte vollständig reduzible Teilkomplexe bedeuten, bei \mathfrak{M}^* soll aber in den Diagonalmatrizenkomplexen die vollständige Reduzibilität noch unmittelbar hervortreten. Es ist also \mathfrak{M}_i^* ein Matrizenkomplex des Typus

$$\mathfrak{M}_i^*: \begin{array}{cccccc} m_{11}^{(i)} & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & m_{22}^{(i)} & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & m_{\epsilon_i\epsilon_i}^{(i)} & \\ (i = 1, 2, \dots, \mu), \end{array}$$

wobei $m_{11}^{(i)}, m_{22}^{(i)}, \dots, m_{\epsilon_i\epsilon_i}^{(i)}$ irreduzible Matrizenkomplexe sind.

Da sowohl bei \mathfrak{M} als auch bei \mathfrak{M}^* die hinteren größten vollständig reduziblen Teilkomplexe hervorgehoben erscheinen, hat auch die \mathfrak{M} in \mathfrak{M}^* überführende Matrix das entsprechende Aussehen wie \mathfrak{M} und \mathfrak{M}^* (vgl. den Satz in II, § 3, Math. Annalen Bd. 78, Seite 351); mithin sind die Matrizenkomplexe

$$\text{und} \quad \begin{array}{cccccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-1} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-2} & \dots & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-i+1} & \\ \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 & 0 & \dots & 0 & \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1}^* & 0 & \dots & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-1}^* & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-2}^* & \dots & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-i+1}^* & \\ (i = 1, 2, \dots, \mu) \end{array}$$

stets von derselben Art.

\mathfrak{H} , \mathfrak{M} und folglich auch \mathfrak{M}^* mögen den Grad n haben. Aus \mathfrak{M}^* bilden wir mit unbestimmten Funktionen z_1, z_2, \dots, z_n den Differentialkomplex $(z') + \mathfrak{M}^*(z)$ und aus \mathfrak{H} mit unbestimmten Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n den Differentialkomplex $(y') + \mathfrak{H}(y)$. Da \mathfrak{M} mit \mathfrak{H} und \mathfrak{M}^* von der-

selben Art ist, sind auch \mathfrak{R} und \mathfrak{M}^* von derselben Art, und es gibt eine lineare homogene Substitution $(z) = P(y)$ von nicht verschwindender Determinante, die den Differentialkomplex $(z') + \mathfrak{M}^*(z)$ in den Differentialkomplex $(y') + \mathfrak{R}(y)$ transformiert. Der Teilkomplex \mathfrak{R}_{11} von \mathfrak{R} sei vom Grade f , so daß in dem Differentialkomplex $(y') + \mathfrak{R}(y)$ die ersten f Funktionen y_1, y_2, \dots, y_f bei dem Teildifferentialkomplex $(y') + \mathfrak{R}_{11}(y)$ auftreten. Der Matrizenkomplex $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ sei g^{ten} Grades und bei dem in $(z') + \mathfrak{M}^*(z)$ enthaltenen Teildifferentialkomplex $(z') + \mathfrak{M}_{\mu\mu}^*(z)$ seien die Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g verwendet. Da $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ ein evident vollständig reduzibler Matrizenkomplex ist, verteilen sich die Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g derart in Klassen, daß eine jede Klasse einem irreduziblen Bestandteil von $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ entspricht und nur bei diesem auftritt. Jede Funktion einer solchen Klasse muß daher bei der Substitution $(z) = P(y)$ notwendig eine lineare homogene Funktion von y_1, y_2, \dots, y_f allein, nicht aber von $y_{f+1}, y_{f+2}, \dots, y_n$ sein; denn sonst könnte man an Stelle von \mathfrak{R}_{11} einen größeren ersten vorderen vollständig reduziblen Teilkomplex von \mathfrak{R} finden, was dem Charakter von \mathfrak{R}_{11} , erster größter vorderer vollständig reduzibler Teilkomplex von \mathfrak{R} zu sein, widersprechen würde. (Vgl. das analoge ausführlich durchgeführte Schlußverfahren in I, § 6, Math. Annalen Bd. 78, Seite 31 und 32.) Da z_1, z_2, \dots, z_g in lauter Klassen der eben beschriebenen Art zerfallen, sind sämtliche Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g lineare homogene Funktionen von y_1, y_2, \dots, y_f . Führt man nun in den Teildifferentialkomplex $(y') + \mathfrak{R}_{11}(y)$ statt y_1, y_2, \dots, y_f die g Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g , die linear und homogen von y_1, y_2, \dots, y_f abhängen, sowie $f - g$ weitere unabhängige Linearfunktionen von y_1, y_2, \dots, y_f ein, so wird, da sich z_1, z_2, \dots, z_g auf den Differentialkomplex $(z') + \mathfrak{M}_{\mu\mu}^*(z)$ beziehen, der Matrizenkomplex \mathfrak{R}_{11} von derselben Art mit einem Matrizenkomplex

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 \\ \mathfrak{S} & \mathfrak{R}; \end{array}$$

hierbei ist \mathfrak{S} ein Matrizenkomplex mit $f - g$ zeiligen und g spaltigen Matrizen und \mathfrak{R} bedeutet einen Matrizenkomplex mit $f - g$ zeiligen und $f - g$ spaltigen Matrizen. Mithin ist nach dem Satze in I, § 10 (Math. Annalen Bd. 78, Seite 46) der Matrizenkomplex $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ als vorderer Bestandteil in der durch \mathfrak{R}_{11} bestimmten Art enthalten. Da $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ und $\mathfrak{M}_{\mu\mu}$ von derselben Art sind, ist auch $\mathfrak{M}_{\mu\mu}$ als vorderer Bestandteil in der durch \mathfrak{R}_{11} bestimmten Art enthalten. Hiermit ist bereits ein Teil unseres Satzes bewiesen.

Wir betrachten weiter den Teilmatrizenkomplex von \mathfrak{M}^* :

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1}^*. \end{array}$$

Dieser läßt sich, wenn man die Bedeutung von $\mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1}^*$ beachtet, auch schreiben

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{M}_{\mu,\mu}^* & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{f}_{\mu 1} & m_{11}^{(\mu-1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{f}_{\mu 2} & 0 & m_{22}^{(\mu-1)} & 0 & \dots & 0 \\ \mathfrak{f}_{\mu 3} & 0 & 0 & m_{33}^{(\mu-1)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{f}_{\mu, \varepsilon_{\mu-1}} & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{\varepsilon_{\mu-1}, \varepsilon_{\mu-1}}^{(\mu-1)} \end{array}$$

dabei sind $\mathfrak{f}_{\mu 1}, \mathfrak{f}_{\mu 2}, \dots, \mathfrak{f}_{\mu, \varepsilon_{\mu-1}}$ Matrizenkomplexe, die aus $\mathfrak{M}_{\mu-1,\mu}^*$ hervorgehen, sämtlich, wie es $\mathfrak{M}_{\mu,\mu}^*$ bestimmt, g Spalten besitzen und deren Zeilen der Reihe nach durch $m_{11}^{(\mu-1)}, m_{22}^{(\mu-1)}, \dots, m_{\varepsilon_{\mu-1}, \varepsilon_{\mu-1}}^{(\mu-1)}$ festgelegt sind. Von den Funktionen z_1, z_2, \dots, z_n des Differentialkomplexes $(z') + \mathfrak{M}(z)$ mögen bei dem Teildifferentialkomplex, der zu dem Teilkomplex

$$(1) \quad \begin{array}{cc} \mathfrak{M}_{\mu,\mu}^* & 0 \\ \mathfrak{f}_{\mu 1} & m_{11}^{(\mu-1)} \end{array}$$

gehört, außer den schon bei $(z') + \mathfrak{M}_{\mu,\mu}^*(z)$ verwendeten Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g noch weiter $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ auftreten; es enthalte also $\mathfrak{f}_{\mu 1}$ Matrizen mit g_1 Zeilen.

Wir betrachten ferner noch den Teildifferentialkomplex von $(y') + \mathfrak{R}(y)$, der zu dem Teilkomplex

$$(2) \quad \begin{array}{cc} \mathfrak{R}_{11} & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} \end{array}$$

gehört. Bei diesem Teildifferentialkomplex mögen von den n Funktionen y_1, y_2, \dots, y_n außer y_1, y_2, \dots, y_f , die schon bei $(y') + \mathfrak{R}_{11}(y)$ verwendet wurden, noch $y_{f+1}, y_{f+2}, \dots, y_{f+f'}$ auftreten; es sei also \mathfrak{R}_{22} vom Grade f' .

Wir fassen nunmehr die zwischen $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ und $z_1, z_2, \dots, z_{g+g_1}$ bestehenden linear unabhängigen, linearen homogenen Relationen ins Auge. Ihre Zahl sei genau gleich ϱ . Zunächst wissen wir, daß die g unabhängigen Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g lineare homogene Funktionen von y_1, y_2, \dots, y_f sind; folglich ist $\varrho \geq g$. Wäre nun $\varrho = g$, so würden $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ von $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ linear unabhängig sein. Man könnte alsdann in dem Differentialkomplex $(y') + \mathfrak{R}(y)$ die Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ beibehalten, weiter die von ihnen unabhängigen Funktionen $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ hinzunehmen und noch $n - (f + f' + g_1)$ neue lineare unabhängige Funktionen von y_1, y_2, \dots, y_n einführen. Hierdurch würde man einen Matrizenkomplex erhalten, der mit \mathfrak{R} von derselben Art ist und die Form

$$(3) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & 0 & 0 \\ p_{31} & 0 & m_{11}^{(\mu-1)} & 0 \\ q_{41} & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{array}$$

hätte; denn durch die Einführung der neuen Funktionen geht der Teildifferentialkomplex mit den Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{g+g_1}$, der zu dem Teilkomplex

$$(4) \quad \mathfrak{f}_{\mu 1} \quad m_{11}^{(\mu-1)}$$

von (1) gehört, in einen solchen über, der nur die Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_f, z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$, aber nicht $y_{f+1}, y_{f+2}, \dots, y_{f+f'}$ und nicht die neuen $n - (f + f' + g_1)$ Funktionen enthält, weil z_1, z_2, \dots, z_g bloße Funktionen von y_1, y_2, \dots, y_f sind. Der aus (4) hervorgehende transformierte Komplex könnte also in bezug auf die Funktionen $y_1, y_2, \dots, y_f, y_{f+1}, \dots, y_{f+f'}, z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ und die weiter eingeführten Funktionen, wie schon oben geschehen, als

$$p_{31} \quad 0 \quad m_{11}^{(\mu-1)} \quad 0$$

bezeichnet werden, wobei sich p_{31} aus $\mathfrak{f}_{\mu 1}$ ergibt. Die in (3) weiter benutzten Matrizenkomplexe $q_{41}, q_{42}, q_{43}, q_{44}$ sind solche mit $n - (f + f' + g_1)$ Zeilen und f bzw. f' bzw. g_1 bzw. $n - (f + f' + g_1)$ Spalten. Daß sich der Matrizenkomplex \mathfrak{R} in die Form (3) bringen läßt, ist unmöglich; denn dies würde der Tatsache widersprechen, daß (2) der zweite größte vollständig reduzierbare Teilkomplex von \mathfrak{R} ist. Daher muß $\varrho > g$ sein.

Nach dem Hilfssatz I in I, § 4 (Math. Annalen Bd. 78, Seite 13) müssen die zwei Matrizenkomplexe (1) und (2) mit zwei Matrizenkomplexen von derselben Art sein, die in einem Matrizenkomplex \mathfrak{L}_{11} vom ϱ^{ten} Grade übereinstimmen. Da von dem Bestandteil $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ von (1) bereits gezeigt ist, daß er in der durch den Bestandteil \mathfrak{R}_{11} von (2) bestimmten Art enthalten ist, kann man für \mathfrak{L}_{11} die Form

$$\begin{array}{cc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 \\ \mathfrak{L}_{21} & \mathfrak{L}_{22} \end{array}$$

wählen, wobei \mathfrak{L}_{22} mindestens vom ersten Grade ist; denn $\mathfrak{M}_{\mu\mu}^*$ hat den Grad g , und es war $\varrho > g$. Wäre nun $\varrho < g + g_1$, so könnte man den Matrizenkomplex (1) in die Form

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 & 0 \\ \mathfrak{L}_{21} & \mathfrak{L}_{22} & 0 \\ \mathfrak{L}_{31} & \mathfrak{L}_{32} & \mathfrak{L}_{33} \end{array}$$

überführen. Diese Transformation würde aber der Tatsache widersprechen, daß in (1) $m_{11}^{(\mu-1)}$ ein irreduzierbarer Matrizenkomplex ist. Mithin muß

$\varphi = g + g_1$ sein. Folglich sind die Funktionen $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_f, y_{f+1}, \dots, y_{f+f'}$. Genau dasselbe Verfahren, das wir auf den Teilkomplex $\{_{\mu 1} m_{11}^{(\mu-1)}$ anwandten, kann auf den Teilkomplex $\{_{\mu 2} m_{22}^{(\mu-1)}$ usw. schließlich auf den Teilkomplex $\{_{\mu, \varepsilon_{\mu-1}} m_{\varepsilon_{\mu-1}, \varepsilon_{\mu-1}}^{(\mu-1)}$, d. h. auf den ganzen Teilkomplex $\mathfrak{M}_{\mu-1, \mu}^* \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu-1}^*$ angewandt werden. Sei $\mathfrak{M}_{\mu-1, \mu-1}^*$ vom g' ten Grade, so daß bei dem Differentialkomplex, der zu dem Matrizenkomplex

$$(5) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu \mu}^* & 0 & \\ \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu-1}^* & \end{array}$$

gehört, insgesamt die Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_g, z_{g+1}, \dots, z_{g+g'}$ auftreten, so sind die zu $\mathfrak{M}_{\mu \mu}^*$ gehörigen Funktionen z_1, z_2, \dots, z_g lineare homogene Funktionen von y_1, y_2, \dots, y_f , und $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g'}$ sind solche von $y_1, y_2, \dots, y_f, y_{f+1}, \dots, y_{f+f'}$; denn für die bei $m_{11}^{(\mu-1)}$ auftretenden Funktionen $z_{g+1}, z_{g+2}, \dots, z_{g+g_1}$ ist es gezeigt, und die durch $m_{22}^{(\mu-1)}, m_{33}^{(\mu-1)}, \dots, m_{\varepsilon_{\mu-1}, \varepsilon_{\mu-1}}^{(\mu-1)}$ neu hinzutretenden verhalten sich ebenso. Führt man nun in dem Differentialkomplex, der zu (2) gehört, statt $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ die $g+g'$ unabhängigen Funktionen $z_1, z_2, \dots, z_{g+g'}$, die linear und homogen von $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ abhängen, sowie $f+f'-(g+g')$ weitere unabhängige Linearfunktionen von $y_1, y_2, \dots, y_{f+f'}$ ein, so wird, da sich $z_1, z_2, \dots, z_{g+g'}$ auf den durch den Matrizenkomplex (5) bestimmten Differentialkomplex beziehen, der Matrizenkomplex (2) von derselben Art mit einem Matrizenkomplex

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu \mu}^* & 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu-1}^* & 0 \\ \mathfrak{P} & \mathfrak{Q} & \mathfrak{S}, \end{array}$$

hierbei sind $\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \mathfrak{S}$ Matrizenkomplexe mit $f+f'-(g+g')$ Zeilen und g bzw. g' bzw. $f+f'-(g+g')$ Spalten. Die Darstellung (6) besagt nach dem Satze in I, § 10 (Math. Annalen Bd. 78, Seite 46), daß der Matrizenkomplex (5) in der durch den Matrizenkomplex (2) bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist. Da die Matrizenkomplexe (5) und

$$(7) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu \mu} & 0 & \\ \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1, \mu-1} & \end{array}$$

gegenseitig von derselben Art sind, ist auch (7) als vorderer Bestandteil in der durch den Matrizenkomplex (2) bestimmten Art enthalten. Hiermit ist ein weiterer Schritt im Beweise unseres Satzes getan.

Nunmehr sind die Matrizenkomplexe

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & 0 \\ \mathfrak{R}_{31} & \mathfrak{R}_{32} & \mathfrak{R}_{33} \end{array}$$

und

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu}^* & 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1}^* & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu}^* & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-1}^* & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2}^* \end{array}$$

zu betrachten. Bezeichnet man den Matrizenkomplex (5) abgekürzt mit $\overline{\mathfrak{M}}_{\mu-1,\mu-1}^*$, so kann man (9), da $\mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2}^*$ evident vollständig reduzibel ist, auch schreiben

$$\begin{array}{cccc} \overline{\mathfrak{M}}_{\mu-1,\mu-1}^* & 0 & 0 & \dots 0 \\ t_{\mu-1,1} & m_{11}^{(\mu-2)} & 0 & \dots 0 \\ t_{\mu-1,2} & 0 & m_{22}^{(\mu-2)} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{\mu-1,\varepsilon_{\mu-2}} & 0 & 0 & \dots m_{\varepsilon_{\mu-2},\varepsilon_{\mu-2}}^{(\mu-2)}; \end{array}$$

dabei sind $m_{11}^{(\mu-2)}$, $m_{22}^{(\mu-2)}$, \dots , $m_{\varepsilon_{\mu-2},\varepsilon_{\mu-2}}^{(\mu-2)}$ irreduzible Komplexe. Aus der Tatsache, daß (8) der dritte größte vollständig reduzible Teilkomplex von \mathfrak{R} ist, schließt man analog wie oben, daß $z_{g+g'+1}$, $z_{g+g'+2}$, \dots , $z_{g+g'+g''}$ lineare homogene Funktionen von $y_1, y_2, \dots, y_f, y_{f+1}, \dots, y_{f+f'}, y_{f+f'+1}, \dots, y_{f+f'+f''}$ sind, wenn f'' der Grad von \mathfrak{R}_{33} , g'' derjenige von $\mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2}^*$ ist. Hieraus folgt dann, daß (9) oder der Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-1} & \mathfrak{M}_{\mu-2,\mu-2} \end{array}$$

der mit (9) von derselben Art ist, in der durch den Matrizenkomplex (8) bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist.

Auf diese Weise fortfahrend, beweist man sukzessiv für $i=4, 5, \dots, \mu$, für $i=1, 2, 3$ ist es schon geschehen, daß der Matrizenkomplex

$$(10) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{M}_{\mu\mu} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-1,\mu-1} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-1} & \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-2} & \dots \mathfrak{M}_{\mu-i+1,\mu-i+1} \end{array}$$

stets in der durch den Matrizenkomplex

$$(11) \quad \begin{array}{cccc} \mathfrak{R}_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \mathfrak{R}_{21} & \mathfrak{R}_{22} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{R}_{i1} & \mathfrak{R}_{i2} & \mathfrak{R}_{i3} & \dots \mathfrak{R}_{ii} \end{array}$$

bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist.

Nun ist der sich aus (10) für $i = \mu$ ergebende Matrizenkomplex mit \mathfrak{R} von derselben Art; daher ist \mathfrak{R} in dem durch (11) für $i = \mu$ sich ergebenden Matrizenkomplex als vorderer Bestandteil enthalten. Für $i = \mu$ enthält (11) μ aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Teilkomplexe; daher kann \mathfrak{R} als Bestandteil dieses Matrizenkomplexes auch nicht mehr als μ aufeinanderfolgende vordere größte vollständig reduzible Teilkomplexe besitzen. Die Anzahl der aufeinanderfolgenden vorderen größten vollständig reduziblen Teilkomplexe von \mathfrak{R} war zu Beginn unserer Untersuchung mit λ bezeichnet, also ist $\lambda \leq \mu$. Hiermit ist, abgesehen von $\lambda = \mu$, der erste Teil unseres Satzes völlig bewiesen.

Wir führen nun die zu \mathfrak{R} und \mathfrak{M} adjungierten Matrizenkomplexe $\hat{\mathfrak{R}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$ (vgl. II, § 2, Math. Annalen Bd. 78, Seite 346) ein. $\hat{\mathfrak{M}}$ können wir dann schreiben:

$$(12) \quad \begin{array}{cccc} \hat{\mathfrak{M}}_{11} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \hat{\mathfrak{M}}_{12} & \hat{\mathfrak{M}}_{22} & 0 & \dots 0 \\ \hat{\mathfrak{M}}_{13} & \hat{\mathfrak{M}}_{23} & \hat{\mathfrak{M}}_{33} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathfrak{M}}_{1\mu} & \hat{\mathfrak{M}}_{2\mu} & \hat{\mathfrak{M}}_{3\mu} & \dots \hat{\mathfrak{M}}_{\mu\mu} \end{array}$$

wobei $\hat{\mathfrak{M}}_{11}, \hat{\mathfrak{M}}_{22}, \dots, \hat{\mathfrak{M}}_{\mu\mu}$ die aufeinanderfolgenden vorderen größten vollständig reduziblen Teilkomplexe von $\hat{\mathfrak{M}}$ sind. $\hat{\mathfrak{R}}$ können wir schreiben:

$$(13) \quad \begin{array}{cccc} \hat{\mathfrak{R}}_{12} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \hat{\mathfrak{R}}_{2, \lambda-1} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-1, \lambda-1} & 0 & \dots 0 \\ \hat{\mathfrak{R}}_{2, \lambda-2} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-1, \lambda-2} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-2, \lambda-2} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathfrak{R}}_{21} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-1, 1} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-2, 1} & \dots \hat{\mathfrak{R}}_{11} \end{array}$$

wobei $\hat{\mathfrak{R}}_{11}, \hat{\mathfrak{R}}_{22}, \dots, \hat{\mathfrak{R}}_{22}$ die aufeinanderfolgenden hinteren größten vollständig reduziblen Teilkomplexe von $\hat{\mathfrak{R}}$ sind. Da \mathfrak{R} und \mathfrak{M} von derselben Art sind, trifft dies nach Satz I in II, § 2 (Math. Annalen Bd. 78, Seite 346) auch für $\hat{\mathfrak{R}}$ und $\hat{\mathfrak{M}}$ zu. Auf Grund des bereits bewiesenen ersten Teiles unseres Theorems schließen wir nun aus den Matrizenkomplexen (12) und (13), daß für $i = 1, 2, \dots, \lambda$ der Matrizenkomplex

$$(14) \quad \begin{array}{cccc} \hat{\mathfrak{R}}_{22} & 0 & 0 & \dots 0 \\ \hat{\mathfrak{R}}_{2, \lambda-1} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-1, \lambda-1} & 0 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{\mathfrak{R}}_{2, \lambda-i+1} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-1, \lambda-i+1} & \hat{\mathfrak{R}}_{\lambda-2, \lambda-i+1} & \dots \hat{\mathfrak{R}}_{2-i+1, \lambda-i+1} \end{array}$$

stets in der durch den Matrizenkomplex

$$(15) \quad \begin{array}{ccccccc} \hat{\mathfrak{M}}_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & & \\ \hat{\mathfrak{M}}_{12} & \hat{\mathfrak{M}}_{22} & 0 & \dots & 0 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \hat{\mathfrak{M}}_{1i} & \hat{\mathfrak{M}}_{2i} & \hat{\mathfrak{M}}_{3i} & \dots & \hat{\mathfrak{M}}_{ii} & & \end{array}$$

bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist und daß ferner $\mu \leq \lambda$ ist. Wir haben nur die (10) und (11) entsprechenden Matrizenkomplexe von (12) und (13) gebildet. Da $\lambda \leq \mu$ war, ist zunächst $\lambda = \mu$. Wenn ein Matrizenkomplex \mathfrak{B} in der durch \mathfrak{A} bestimmten Art als vorderer Bestandteil enthalten ist, also \mathfrak{A} von derselben Art ist, mit einem Matrizenkomplex

$$\mathfrak{B} \quad 0 \\ \mathfrak{A}_{21} \quad \mathfrak{A}_{22},$$

so ist der zu \mathfrak{A} adjungierte Matrizenkomplex $\hat{\mathfrak{A}}$ von derselben Art mit dem Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathfrak{B}} & \hat{\mathfrak{A}}_{21} & \text{oder} & \hat{\mathfrak{A}}_{22} & 0, \\ 0 & \hat{\mathfrak{A}}_{22} & & \hat{\mathfrak{A}}_{21} & \hat{\mathfrak{B}}, \end{array}$$

d. h. $\hat{\mathfrak{B}}$ ist als hinterer Bestandteil in der durch den Matrizenkomplex $\hat{\mathfrak{A}}$ bestimmten Art enthalten. Wendet man dieses Resultat auf die Matrizenkomplexe (14) und (15) an und geht zu ihren adjungierten über, so folgt, daß der Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{R}_{2-i+1, 2-i+1} & 0 & & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \mathfrak{R}_{2-i+2, 2-i+1} & \mathfrak{R}_{2-i+2, 2-i+2} & 0 & & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathfrak{R}_{2-i+1, 2-i+1} & \mathfrak{R}_{2-i+1, 2-i+2} & \mathfrak{R}_{2-i+1, 2-i+3} & \dots & \mathfrak{R}_{2-i+1, 2-i} & 0 & \\ \mathfrak{R}_{2, 2-i+1} & \mathfrak{R}_{2, 2-i+2} & \mathfrak{R}_{2, 2-i+3} & \dots & \mathfrak{R}_{2, 2-i} & \mathfrak{R}_{2, 2} & \end{array}$$

für $i = 1, 2, \dots, \lambda$ stets in der durch den Matrizenkomplex

$$\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{R}_{ii} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \mathfrak{R}_{i-1, i} & \mathfrak{R}_{i-1, i-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \mathfrak{R}_{2, i} & \mathfrak{R}_{2, i-1} & \mathfrak{R}_{2, i-2} & \dots & \mathfrak{R}_{2, 2} & 0 & \\ \mathfrak{R}_{1, i} & \mathfrak{R}_{1, i-1} & \mathfrak{R}_{1, i-2} & \dots & \mathfrak{R}_{1, 2} & \mathfrak{R}_{1, 1} & \end{array}$$

bestimmten Art als hinterer Bestandteil enthalten ist. Hiermit sind nun mehr alle Aussagen unseres Satzes bewiesen.

Freiburg i. Br., Februar 1917.