

II. Ueber electricische Schwingungen in geraden Leitern; von J. Stefan.

(Aus den Sitzungsber. der kais. Acad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Cl. Bd. 99, Abth. IIa. vom 24. April 1890; mitgetheilt vom Hrn. Verf.)

Die Vertheilung eines constanten electricischen Stromes in einem Leiter oder die Verzweigung eines solchen in mehreren Leitern geschieht in der Weise, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes die durch das Gesetz von Joule bestimmte Wärmeentwicklung ein Minimum wird. Dieser Satz ist von Kirchhoff für Leiter von beliebiger Gestalt bewiesen worden. Demselben entspricht es zum Beispiel, dass ein constanter Strom über den ganzen Querschnitt eines Leitungsdrahtes, den er durchfliesst, in gleichförmiger Dichtigkeit sich vertheilt.

Dieser Satz gilt jedoch nur, wenn die einzelnen Theile der Leitung keine eigenthümlichen electromotorischen Kräfte enthalten, er gilt deshalb nicht für veränderliche Ströme, welche von inducirenden Kräften in den Leitern begleitet sind. Bei Strömen von rapider Veränderlichkeit, im besonderen bei periodischen Strömen von hoher Schwingungszahl, tritt der Einfluss, welchen die Widerstände auf die Stromvertheilung nehmen, hinter jenen der Inductionswirkungen zurück, und zwar bei periodischen Strömen um so mehr, je höher die Schwingungszahl wird. Bei der Lösung mancher Fragen, welche sich auf das Verhalten solcher Ströme beziehen, kann man von dem Widerstande der Leiter ganz absehen und die Gleichungen anwenden, welche für Ströme in Leitern ohne Widerstand gelten. Auf diese Gleichungen und ihre Anwendung ist zuerst von G. Lippmann¹⁾ hingewiesen worden.

Aus diesen Gleichungen ergibt sich folgender Satz: Die Vertheilung oder Verzweigung eines veränderlichen Stromes geschieht in der Weise, dass für jede Zeit bei gleicher

1) G. Lippmann, Compt. rend. 109. p. 251. 1889.

Grösse des gesammten Stromes die electrodynamische Energie desselben ein Minimum ist.

Bezeichnet man die Stromstärken in zwei Zweigen, welche unter dem Einflusse derselben electromotorischen Kraft E stehen, mit i_1 und i_2 , die Widerstände der Zweige mit w_1 und w_2 , ihre Coëfficienten der Selbstinduction mit L_1 und L_2 und endlich den Coëfficienten ihrer gegenseitigen Induction mit M , so gelten die Gleichungen:

$$E = w_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Lässt man die mit den Widerständen multiplicirten Glieder weg, so bleibt die Gleichung:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Enthalten die Ausdrücke für i_1 und i_2 kein von der Zeit unabhängiges Glied, so kann man diese Gleichung, da die Inductionscoëfficienten als constante Grössen vorausgesetzt sind, durch:

$$L_1 i_1 + M i_2 = L_2 i_2 + M i_1$$

ersetzen und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher das Trinom:

$$T = \frac{1}{2} (L_1 i_1^2 + 2 M i_1 i_2 + L_2 i_2^2)$$

für einen vorgeschriebenen Werth von $i_1 + i_2$ ein Minimum wird. Das Trinom T kann als die electrodynamische Energie der zwei Ströme i_1 und i_2 bezeichnet werden. Es ist also der oben aufgestellte Satz zunächst für eine aus zwei Theilen bestehende Verzweigung gewonnen. In derselben Weise lässt sich aber die Rechnung für beliebig viele Zweige führen, also auch für die unendlich vielen unendlich dünnen Fäden, in welche man sich einen Leitungsdraht zerlegt denken kann.

Die electrodynamische Energie eines Stromes oder eines Stromsystems lässt sich auch als eine magnetische Energie darstellen, welche in der Magnetisirung der Leiter und des dieselben umgebenden Mediums ihren Grund hat. Man kann also auch sagen: Die Vertheilung der Ströme erfolgt in der Art, dass bei gleicher Grösse des gesammten Stromes seine magnetische Energie ein Minimum wird. Diese Formuli-

rung des Princip's bietet den Vortheil, dass sie die Lösung mehrerer Aufgaben ohne jede Rechnung gestattet.

In einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt, welcher keinen seitlichen Einwirkungen ausgesetzt ist, können sich electriche Ströme nur symmetrisch um die Axe vertheilen. Wie nun auch die Stromdichte von der Axe gegen die Oberfläche hin variiren mag, der Leiter wirkt nach aussen magnetisch so, als ob der ganze Strom in der Axe concentrirt wäre. Das Minimum der magnetischen Energie ist also dadurch bestimmt, dass dieselbe in dem vom Leiter erfüllten Raume den kleinsten Werth erhält. Dieser kleinste Werth, und zwar der Werth Null, wird dann erreicht, wenn der ganze Strom in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche des cylindrischen Leiters condensirt ist, denn eine solche Stromröhre übt in dem von ihr umschlossenen Raume keine magnetische Kraft aus.

Ist der Querschnitt des Leiters nicht kreisförmig, so gibt es gleichfalls eine Vertheilung des Stromes in der Oberfläche, welche seine magnetische Wirkung in jedem inneren Punkte der Null gleich macht und dem Principe des Minimums der magnetischen Arbeit entspricht. Diese Vertheilung ist conform derjenigen, welche eine electriche Ladung annimmt, wenn sie sich auf dem Leiter im Zustande des Gleichgewichtes befindet. So wie die Resultante der electriche Kräfte einer solchen Ladung in jedem Punkte des Leiters Null ist, ist dies auch für die Resultante der magnetischen Kräfte der verschiedenen in der Oberfläche liegenden Stromfäden der Fall, wenn die Stromdichtigkeit längs der Umfangslinie in derselben Weise variirt, wie die Dichtigkeit der statischen electriche Ladung. Ist z. B. der Querschnitt des Leiters von einer Ellipse begrenzt, so werden die Stromdichten in den verschiedenen Punkten dieser Ellipse sich verhalten wie die Perpendikel, welche auf die zu diesen Punkten gehörigen Tangenten aus dem Mittelpunkt gefällt werden.

In seinen zuletzt veröffentlichten Versuchen hat Hertz¹⁾ sehr auffallende Belege dafür geliefert, dass electriche

1) Hertz, Wied. Ann. 37. p. 395. 1889.

Schwingungen von sehr hoher Schwingungszahl nur längs der Oberfläche der Leiter sich bewegen. Aus seinen Beobachtungen über solche Bewegungen in einem streifenförmigen Leiter geht auch hervor, dass die Stromdichtigkeit in den Rändern des Streifens eine sehr viel grössere ist, als in der Mitte der breiten Seitenflächen desselben.

Die Gleichungen, aus welchen das Princip der Stromvertheilung abgeleitet wurde, enthalten die Voraussetzung, dass die Stromstärke in jedem Faden des Leiters zu jeder Zeit nach seiner ganzen Länge denselben Werth besitze. Diese Voraussetzung ist wenigstens sehr nahe erfüllt bei der Entladung von Condensatoren durch kurze Leitungsdrähte und auch bei den Schwingungen in den Oscillatoren von Hertz, sie ist es aber nicht in dem Falle der Fortpflanzung von electrischen Wellen in langen Drähten. Man kann jedoch das Princip der Stromvertheilung auch auf solche Fälle anwenden, und zwar mit desto grösserer Annäherung, je länger die Wellen im Vergleiche zu den Querdimensionen des Leiters sind. Die Wirkung der Selbstinduction in einem Stücke des Leiters rührt zum grössten Theile ihres Betrags von der Variation des Stromes in diesem Stücke selbst ab und innerhalb eines solchen Stückes kann immerhin die Stromintensität als nach der ganzen Länge desselben gleich angenommen werden.

Die angegebene Vertheilung der Ströme in der Oberfläche eines Leiters hat zur Folge, dass die Selbstinduction in dem Leiter unabhängig wird von der magnetischen Beschaffenheit seiner Substanz. Die Schwingungsdauer der Oscillationen einer Entladung wird daher dieselbe sein, mag der Condensator durch einen Eisendraht oder durch einen gleichgestalteten Kupferdraht entladen werden. Ebenso kann man schliessen, dass sich electrische Wellen von hoher Schwingungszahl in einem Eisendrahte mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen, wie in einem Kupferdrahte. Nach den Versuchen von Hertz ist dies thatsächlich der Fall. Nach Hertz wäre diese Thatsache nur so zu deuten, dass der Magnetismus des Eisens so schnellen Schwingungen nicht zu folgen vermag. Nach dem hier Vorgetragenen liegt die Sache viel einfacher, das Innere des Eisendrahtes

bleibt von jeder magnetischen Einwirkung dieser Schwingungen frei.

Ist i_2 die Intensität eines Stromes, welcher in einem Leiter von einem anderen Strome i_1 inducirt wird, so besteht die Gleichung:

$$0 = w_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

Mit Vernachlässigung von $w_2 i_2$ und unter der Voraussetzung, dass die Ausdrücke für i_1 und i_2 keine von der Zeit unabhängigen Glieder enthalten, verwandelt sich diese Gleichung in:

$$0 = L_2 i_2 + M i_1$$

und diese drückt die Bedingung aus, unter welcher die electrodynamische Energie T der beiden Ströme für einen gegebenen Werth von i_1 ein Minimum wird.

Wird ein veränderlicher Strom durch einen Draht geschickt, welcher von einer concentrischen Metallröhre isolirt umgeben ist, so wird in dieser Röhre ein Strom inducirt. Die Richtung und Grösse, sowie die Vertheilung dieses Stromes lässt sich aus diesem Princip unmittelbar ableiten. Das Minimum der electrodynamischen oder magnetischen Energie der beiden Ströme wird bei folgender Anordnung derselben erreicht. Der centrale Strom ist in einer unendlich dünnen Schicht an der Oberfläche seines Leiters condensirt. Der inducirte Strom fliesst in einer unendlich dünnen Schicht an der inneren Fläche der Röhre und hat in jedem Zeitpunkte dieselbe Intensität, wie der Strom im Mitteldrahte, aber die entgegengesetzte Richtung. Bei dieser Anordnung sind nur in dem Raume zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Wandfläche der Röhre magnetische Kräfte thätig. Das Innere des Drahtes, sowie der von der Substanz der Röhre erfüllte, aber ausserdem noch der ganze äussere Raum sind von magnetischen Kräften frei.

Die den Draht umschliessende Röhre hebt auch seine inducirende Wirkung im ganzen äusseren Raume auf, sie bildet einen vollkommenen Schirm für die inducirenden, wie für die magnetischen Kräfte des von ihr umhüllten Drahtes. Die Schirmwirkung der Röhre besteht nach dieser Darstellung also darin, dass die Wirkungen des centralen Stromes

durch jene des inducirten Stromes in der Röhre aufgehoben werden.

Dieser Fall steht in vollständiger Analogie mit dem electrostatischen Probleme der Vertheilung der Electricität auf zwei concentrischen Cylindern, von welchen der innere isolirt, der äussere zur Erde abgeleitet ist. In derselben Weise ist die Aufgabe auch dann, wenn der Draht und die Röhre nicht concentrisch sind, und auch andere als kreisförmige Querschnitte haben, durch die analoge Aufgabe der Electrostatik gelöst. Die Schirmwirkung der Röhre bleibt auch unter diesen veränderten Bedingungen eine vollkommene.

Der inducirte Strom der Röhre wirkt auch auf den primären Strom im Mitteldrahte ein. Diese Einwirkung besteht darin, dass durch die Einschränkung des magnetischen Feldes auf den Raum zwischen der Oberfläche des Drahtes und der inneren Fläche der Röhre die Selbstinduction des primären Stromes bedeutend vermindert wird. Der Coëfficient der Selbstinduction eines geraden cylindrischen Drahtes von der Länge l und dem Radius a ist durch $2l \log(2l/ac)$ bestimmt. Dabei ist vorausgesetzt, dass a klein gegen l ist und der Strom in einer sehr dünnen Schicht an der Oberfläche des Drahtes condensirt ist. Für einen geradlinig gespannten Draht ist $c =$ der Basis der natürlichen Logarithmen $= e$, wenn man zur Berechnung die Formel von F. Neumann verwendet. Nach der Formel von W. Weber ist $c = e^2$, nach der electromagnetischen Theorie der Induction ist $c = e^{3/2}$. Für einen kreisförmig gebogenen Draht, dessen Enden einander sehr nahe liegen, ist nach allen drei Theorien $c = \pi e^2/2$. Wird der Draht mit einer Röhre vom Radius b concentrisch umhüllt und ist auch b sehr klein gegen l , so ist der Coëfficient der Selbstinduction auf $2l \log(b/a)$ reducirt

Wird einem stromführenden Leiter ein zweiter parallel gestellt, so vertheilen sich der primäre Strom in der Oberfläche des ersten und der inducirte in jener des zweiten ebenso, wie sich eine gegebene electriche Ladung und die inducirte Ladung auf dem zweiten Leiter vertheilen, wenn letzterer zur Erde abgeleitet ist. Hat der erste Leiter einen kreisförmigen Querschnitt, so ist doch der Strom über seine

Oberfläche nicht gleichförmig vertheilt, sondern hat an der dem benachbarten Leiter zugewendeten Seite eine grössere Dichte als an der abgewendeten. Auch ein solcher Leiter, welcher den primären nicht rings umschliesst, übt eine theilweise Schirmwirkung aus, und zwar um so mehr, je ausgedehnter er ist.

Die Condensation einer veränderlichen electrischen Bewegung auf eine unendlich dünne Schicht in der Oberfläche des Leiters bildet ebenso wie die gleichförmige Vertheilung der Bewegung über den ganzen Querschnitt einen idealen Grenzfall. Je nach dem Grade der Variabilität der Bewegung und der Grösse des specifischen Widerstandes des Leiters nähert sich der wirkliche Vorgang mehr dem einen oder dem anderen dieser beiden Fälle. Die Vertheilung eines veränderlichen Stromes in einem geraden Leiter von kreisförmigem Querschnitt ist schon von Maxwell berechnet und diese Rechnung von Lord Rayleigh insbesondere mit Rücksicht auf periodische Ströme ergänzt worden. Ich habe mich mit derselben Aufgabe in der Abhandlung: „Ueber veränderliche electrische Ströme in dicken Leitungsdrähten“¹⁾ beschäftigt. Meine Darstellung des Problems unterscheidet sich von den früheren dadurch, dass sie nicht von der Maxwell'schen Theorie des electromagnetischen Feldes ausgeht, sondern von den Formeln, welche F. Neumann und W. Weber für das electrodynamische Potential zweier Stromelemente aufgestellt haben. Aus diesen ergibt sich unmittelbar die Bestimmungsgleichung für die Dichtigkeit des Stromes in jedem der unendlich dünnen Fäden, in welche man sich den Leiter zerlegt denken kann. Für einen Draht von kreisförmigem Querschnitt ist unter der Voraussetzung, dass die Strömung symmetrisch um die Axe vertheilt ist, die Stromdichtigkeit u in der Distanz r von der Axe zur Zeit t bestimmt durch die Gleichung:

$$(a) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \left(\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \right),$$

worin σ den specifischen Widerstand des Leiters, μ seine magnetische Leitungsfähigkeit bedeutet. Die Gleichung gilt

1) J. Stefan, Wien. Ber. 95. 2. Abth. p. 917. 1887.

unter der Voraussetzung, dass die electromotorische Kraft p innerhalb des Leiters der Gleichung:

$$(b) \quad \frac{d^2 p}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dp}{dr} = 0$$

genügt, darin ist der Fall eingeschlossen, dass p für alle Fäden des Leiters denselben Werth hat, also von r unabhängig ist.

Zu der für u gegebenen Differentialgleichung kommt noch eine Bedingung für die Oberfläche des Leiters hinzu. Die ganze um die Axe concentrisch vertheilte Strömung wirkt auf eine Faser in der Oberfläche so inducirend, als wäre sie in der Axe concentrirt. Bezeichnet man mit J die gesammte Intensität des Stromes im Leiter zur Zeit t und sind p_1 und u_1 die Werthe von p und u für die Oberfläche, also für $r = a$, so ist:

$$(c) \quad p_1 = l \sigma u_1 + 2l \log \frac{2l}{ac} \frac{dJ}{dt}.$$

Ist der Leiter eine Röhre, a_0 der innere Radius derselben, so kommt für $r = a_0$ noch die Bedingung hinzu:

$$(d) \quad \frac{dp}{dr} = l \sigma \frac{du}{dr}.$$

Man kann der Gleichung (c) noch eine andere Gestalt geben. Die Gleichung (a) kann man in der Form:

$$r \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right)$$

schreiben. Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $2\pi dr$ und integrirt über den ganzen Querschnitt, so erhält man:

$$(e) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\sigma}{2\mu} \left(r \frac{du}{dr} \right),$$

worin auf der zweiten Seite für die eingeklammerte Grösse die Differenz der Werthe, die sie für $r = a$ und $r = a_0$ annimmt, zu setzen ist. Setzt man diesen Werth von dJ/dt in die Gleichung (c) ein, so enthalten die Bedingungsgleichungen nur mehr die Werthe von u und seiner ersten Differentialquotienten nach r .

Füllt der Leiter den Kreis vom Radius a voll aus, so entfällt in (e) der untere Grenzwert und es bleibt die Gleichung:

$$(f) \quad \frac{dJ}{dt} = \frac{\sigma}{2\mu} \frac{du}{dr} \quad \text{für } r = a \text{ übrig.}$$

Die Gleichungen zur Bestimmung von u haben dieselbe Form, wie jene zur Bestimmung der Temperatur in einem Drahte, welchem Wärme nur durch die Oberfläche zugeführt oder entzogen werden kann. Diese Analogie zwischen den Gleichungen bedingt auch eine solche zwischen den thermischen und electricischen Vorgängen.

Wird ein galvanisches Element geschlossen, so verbreitet sich der Strom im Schliessungsdrahte in derselben Art wie die Wärme, wenn der Draht plötzlich aus einem Raume von tieferer in einen solchen von höherer Temperatur versetzt wird. Der Strom beginnt in der Oberfläche des Leiters zu fliessen und erreicht hier zuerst seine definitive Dichtigkeit, später erst in den tieferen Schichten, zuletzt im centralen Faden. Der Ausgleich der Stromdichte vollzieht sich um so rascher, je grösser der specifische Widerstand des Leiters ist, er geht in magnetisirbaren Drähten sehr viel langsamer vor sich als in unmagnetischen. Wird z. B. zur Schliessung des Elementes ein Eisendraht von 1 m Länge und 1 cm Durchmesser gewählt, so weicht nach 0,01 Secunde die Stromdichte in der Oberfläche von ihrem definitiven Werthe nur um 3 Proc. ab, in der Mitte des Drahtes aber hat sie zu dieser Zeit nur die Hälfte des definitiven Werthes. Bei dieser Rechnung wurde der specifische Widerstand des Eisens = 9900, seine magnetische Leitungsfähigkeit = 150 angenommen. Die Verschiedenheit der Stromentwicklung in den äusseren und inneren Theilen des Drahtes ist so gross, dass ihr experimenteller Nachweis nicht sehr schwierig wäre. In unmagnetischen Drähten ist dieselbe bei gleichem Durchmesser sehr viel kleiner.

Wird ein Draht in einen Raum gebracht, dessen Temperatur periodisch wechselt, so stellt sich ein Beharrungszustand der Temperaturvertheilung im Drahte ein, derart, dass die Temperatur desselben in allen Schichten die periodischen Schwankungen der äusseren Temperatur mitmacht. Die Amplituden der Schwankungen nehmen jedoch gegen die Axe hin ab, und zwar um so rascher, je kürzer die Periode dieser Schwankungen ist. Zugleich haben diese in verschiedenen Schichten verschiedene Phasen, sodass die Maxima zum Beispiel in einer Schicht um so später auftreten, je

weiter diese Schicht von der Oberfläche entfernt ist. Dieselben Eigenschaften zeigt auch der Gang der Temperatur in verschiedenen Tiefen des Erdbodens im Vergleiche zu den täglichen und jährlichen Schwankungen der Temperatur an der Oberfläche der Erde.

In derselben Weise stellt sich der periodische Beharungszustand der electrischen Bewegung in einem Leitungsdrahte her, wenn in diesem eine periodische electromotorische Kraft thätig ist. Für einen Eisendraht von 4 mm Dicke gibt die Rechnung für den Fall, dass der Strom in demselben 250 ganze Schwingungen in der Secunde macht, die Amplitude der Schwingungen in der Oberfläche 2,52 mal so gross, als in der Axe. Für 500 Schwingungen steigt diese Zahl auf 5,86, für 1000 auf 20,59. Die Stromschwingung in der Axe hat gegen jene in der Oberfläche in diesen drei Fällen die Phasendifferenzen $116^{\circ} 2'$, $174^{\circ} 50'$ und $215^{\circ} 38'$. Dieselben Verhältnisse gelten für einen Kupferdraht von fünfmal grösserer Dicke, oder bei gleicher Dicke für 25 mal höhere Schwingungszahlen.

Je höher die Schwingungszahl wird, desto grösser wird die Verdichtung der electrischen Bewegung an der Oberfläche. Für eine Schwingungszahl von 50 Millionen findet man, dass in einem Eisendraht die Amplitude der Schwingungen in 0,0085 mm Tiefe 100 mal kleiner ist als in der Oberfläche. In der Tiefe von 0,0058 mm beträgt die Verzögerung in der Phase gegen die Oberfläche eine halbe Schwingungsdauer. In dieser Tiefe hat der Strom in jedem Augenblicke die entgegengesetzte Richtung und eine 23 mal kleinere Amplitude als in der Oberfläche. In einem Kupferdraht sind die Tiefen mit den angeführten Eigenschaften fünfmal, für einen Neusilberdraht 18 mal grösser als die für den Eisendraht angegebenen.

Diese Art der Stromvertheilung hat zur Folge, dass ein Draht für solche Schwingungen einen ganz anderen Widerstand und eine andere Selbstinduction äussert, als für gewöhnliche Ströme. Die Formeln, welche zur Berechnung dieser Grössen für kleinere Werthe der Schwingungszahlen benutzt werden können, habe ich in der angeführten Abhandlung entwickelt. Für sehr grosse Werthe der Schwingungs-

zahl sind diese Formeln wegen ihrer geringen Convergenz nicht geeignet. Es kann aber für diesen Fall die Bestimmungsgleichung für die Stromdichtigkeit u in der Form:

$$(g) \quad \frac{du}{dt} = \frac{\sigma}{4\pi\mu} \left(\frac{d^2u}{dz^2} - \frac{1}{a} \frac{du}{dz} \right)$$

verwendet werden, wenn a den Radius des Drahtes und z die Tiefe einer Schicht unter der Oberfläche bedeutet. Anstatt a sollte in der Gleichung $a - z$ geschrieben werden. Da aber u schon für kleine Werthe von z sehr klein wird, so ist die angenommene Vereinfachung der Gleichung zulässig, sobald a selbst nicht sehr klein ist.

Ein Integral dieser Gleichung ist:

$$u = e^{-gz} \sin(\gamma t - hz).$$

Dasselbe gibt für $z = 0$ die Stromdichtigkeit $u_1 = \sin \gamma t$ und stellt für grosse Werthe von γ die Abnahme von u mit wachsendem z mit hinreichender Genauigkeit dar. Die Constanten g und h sind durch die Gleichungen:

$$g^2 - h^2 + \frac{g}{a} = 0, \quad 2gh + \frac{h}{a} = \frac{4\pi\mu\gamma}{\sigma}$$

bestimmt.

Man kann nun die Gleichung (f), welche für die Coordinate z die Form:

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{a\sigma}{2\mu} \frac{du}{dz}$$

für $z = 0$ annimmt, benutzen, um einen Ausdruck für die Intensität des Gesamtstromes herzustellen. Es ist:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} (g \sin \gamma t + h \cos \gamma t)$$

also:
$$J = \frac{a\sigma}{2\mu\gamma} (h \sin \gamma t - g \cos \gamma t).$$

Aus diesen zwei Gleichungen folgt:

$$\gamma h J + g \frac{dJ}{dt} = \frac{a\sigma}{2\mu} (g^2 + h^2) \sin \gamma t = \frac{a\sigma}{2\mu} (g^2 + h^2) \cdot u_1.$$

Nimmt man daraus den Werth von u_1 und setzt denselben in die Bedingungsgleichung (c), so folgt:

$$p_1 = \frac{2l\mu\gamma h}{a(g^2 + h^2)} J + \left[2l \log \frac{ac}{2l} + \frac{2l\mu g}{a(g^2 + h^2)} \right] \frac{dJ}{dt}.$$

Für den Fall, dass p im ganzen Querschnitt des Drahtes denselben Werth hat, gibt diese Gleichung die Beziehung

zwischen der electromotorischen Kraft p und der Intensität des Gesamtstromes J . Man kann also den Factor von J in dieser Gleichung als den Widerstand, den Factor von dJ/dt als den Coëfficienten der Selbstinduction des Drahtes bezeichnen.

Bezeichnet man diesen Widerstand mit w' , den gewöhnlichen mit w , so ist annähernd:

$$w' = w \left(\pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}} + \frac{1}{4} \right).$$

Darin bedeutet n die Schwingungszahl des periodischen Stromes, welche mit γ durch die Gleichung $\gamma = 2n\pi$ verbunden ist. Für sehr grosse Werthe von γ reducirt sich diese auf die schon von Lord Rayleigh angegebene Formel:

$$w' = w \cdot \pi a \sqrt{\frac{n\mu}{\sigma}}.$$

Für eine Schwingungszahl $n = 50 \cdot 10^6$ und $a = 0,2$ wird für einen Kupferdraht, wenn $\sigma = 1650$ angenommen wird, $w' = 109w$. Für einen Eisendraht ist das Verhältniss von w' zu w noch viel grösser. Die mit einer periodischen Entladung verbundene Wärmeentwicklung ist für jedes Zeitelement dt durch $w' J^2 dt$ bestimmt. Zur Beurtheilung ihrer Wirkung auf den Leitungsdraht und seine Umgebung ist es wichtig, zu beachten, dass die ganze Wärmeentwicklung auf eine sehr dünne Schicht an der Oberfläche des Drahtes beschränkt ist.

Der Coëfficient der Selbstinduction kann durch:

$$L' = 2l \left(\log \frac{2l}{ac} + \frac{1}{4\pi a} \sqrt{\frac{\mu\sigma}{n}} \right)$$

dargestellt werden. Mit wachsendem n wird L' immer kleiner und nähert sich dem Werthe als Grenze, welchen dieser Coëfficient annimmt, wenn der Strom in der Oberfläche condensirt ist. Dieser Werth ist auch nur wenig von jenem verschieden, welcher unter der Voraussetzung, dass der Strom den ganzen Querschnitt gleichförmig erfüllt, gefunden wird. Dieser letztere Werth ist nämlich:

$$L_0 = 2l \left(\log \frac{2l}{ac} - \frac{1}{4} \right).$$

Diese Eigenschaft des Inductionscoëfficienten hat zur Folge, dass die Theorie der oscillatorischen Entladungen, obwohl diese ganz anders geschehen, als bei der Berechnung derselben vorausgesetzt wurde, für die Schwingungsdauer doch Resultate liefert, die mit den Beobachtungen stimmen, so lange der Widerstand ohne merklichen Einfluss auf die Oscillationsdauer bleibt.

Insofern man das Innere eines Leiters einer rasch oscillirenden Bewegung als stromlos betrachten darf, kann man auch sagen, dass sich im Inneren die äussere electromotorische Kraft und jene der Selbstinduction des Leiters das Gleichgewicht halten. Dieses Gleichgewicht bleibt bestehen, wenn ein etwa durch zwei concentrische Flächen begrenztes Stück des Leiters ausgeschnitten wird, sobald die in diesem Stück vorhandene Strommenge verschwindend klein ist. Der centrale Theil des Leiters wird stromlos bleiben oder der äussere Mantel bildet für ihn einen Schirm gegen die äussere electromotorische Kraft.

Ein röhrenförmiger Leiter übt in allen im Inneren der Höhlung gedachten Fäden eine gleich grosse Induction aus, wie in einem Faden der inneren Oberfläche. Ihre Wirkung zusammen mit jener der äusseren electromotorischen Kraft ist durch $l\sigma u_0$ bestimmt, wenn u_0 die Stromdichtigkeit in der inneren Oberfläche bedeutet. $l\sigma u_0$ gibt daher auch die auf einen in der Höhlung gelegenen Faden wirkende, totale electromotorische Kraft und diese wird sehr klein, sobald u_0 sehr klein ist. Da die Amplitude der Stromdichtigkeit von der Oberfläche einwärts annähernd nach dem Gesetz e^{-gz} abnimmt und für grosse Werthe der Schwingungszahl auch g einen grossen Werth erhält, so wird, wie schon oben angegeben worden ist, schon für kleine Werthe von z ein sehr kleiner Werth für u_0 resultiren. Es genügt eine sehr geringe Dicke der Röhrenwand zu einer nahezu vollständigen Schirmwirkung.

Wird ein stromführender Leiter von einer concentrischen Röhre umgeben, so nimmt die Dichtigkeit des in der Röhre inducirten Stromes von der inneren gegen die äussere Wand derselben ab. Auf einen Faden in der äusseren Oberfläche wirken der gegebene und der inducirte Strom so, als ob

beide in der Mittellinie concentrirt wären. Bezeichnet man die Intensität des gegebenen Stromes mit J' , jene des inducirten mit J , die Stromdichtigkeit in der äusseren Oberfläche mit u_1 , so hat man zur Bestimmung von u_1 die Gleichung:

$$-2l \log \frac{2l}{ac} \left(\frac{dJ}{dt} + \frac{dJ}{dt} \right) = l \sigma u_1.$$

Auf einen Faden, welcher sich ausserhalb der Röhre in der Distanz b von der Mittellinie befindet, ist die inducierende Wirkung des Systems:

$$-2l \log \frac{2l}{bc} \left(\frac{dJ'}{dt} + \frac{dJ}{dt} \right).$$

Dieselbe ist auch in diesem Falle durch die Stromdichte u_1 in der Grenzfläche bestimmt. Diese ist das Maass für den Grad der Schirmwirkung, mit welcher die Röhre den äusseren Raum gegen die Induction des eingeschlossenen Stromes schützt.

Für so hohe Schwingungszahlen, wie sie bei den oscillatorischen Entladungen vorkommen, schliesst sich das Verhalten der metallischen Leiter sehr nahe an die Gesetze an, welche für Leiter ohne Widerstand gelten. Bei den electrolytischen Leitern, deren specifischer Widerstand sehr gross ist, verhält sich die Sache anders. Nach Kohlrausch ist das Leitungsvermögen der bestleitenden Schwefelsäure von 1,22 specifischem Gewichte $= 69 \cdot 10^{-6}$ bezogen auf das Leitungsvermögen des Quecksilbers als Einheit. Da der specifische Widerstand des Quecksilbers $= 94300$ ist, so ist jener der bezeichneten Schwefelsäure $= 1366 \cdot 10^6$. Rechnet man mit diesem Werthe die Stromvertheilung in einer mit dieser Flüssigkeit gefüllten Röhre von 1 cm Durchmesser für den Fall, dass der Strom $50 \cdot 10^6$ Schwingungen in der Secunde macht, so findet man die Stromdichtigkeit in der Oberfläche nur um 0,8 Proc. höher als in der Axe der Röhre. Die Strömung ist also in diesem Falle nahezu gleichförmig über den Querschnitt vertheilt, während in einem Kupferdrahte die Stromdichtigkeit von der Oberfläche nach einwärts so rasch abfällt, dass sie in 0,003 cm Tiefe über 20mal, in 0,004 cm Tiefe schon 100mal kleiner ist als in der Oberfläche.

Der Unterschied zwischen der Stromdichte in der Oberfläche und in der Axe wird grösser, wenn die Röhre einen grösseren Querschnitt erhält. Bei der angenommenen Schwingungszahl von 50 Millionen wird die Amplitude der Stromdichte in der Oberfläche sechsmal grösser als in der Axe bei einem Durchmesser von 5,7 cm. Diese Verhältnisszahl steigt auf 20, wenn der Durchmesser = 8 cm wird. Diese Zahlen geben zugleich eine Vorstellung von der Dicke, welche eine Flüssigkeitsschicht haben muss, wenn sie eine merkliche Schirmwirkung ausüben soll. Diese Dicke wächst mit dem specifischen Widerstande σ , sie nimmt mit der Schwingungszahl n ab, sie ist der Quadratwurzel aus dem Quotienten von σ und n proportional.

Zur Beobachtung der Erscheinungen der Schirmwirkung eignen sich sehr gut die electrischen Schwingungen in kurzen geraden Leitern. Ich will hier einige sehr leicht auszuführende Versuche mittheilen.

Der primäre Schwingungsapparat, den ich verwende, besteht aus zwei Messingröhren von je 50 cm Länge und 3,2 cm Durchmesser. Die Röhren sind mit einer Holzleiste durch Träger von Hartgummi verbunden, sodass ihre Axen in eine Linie fallen. Die Axen liegen in einer Höhe von 5 cm über der oberen Fläche der Leiste. Die einander zugewendeten Enden der Röhren sind durch Segmente von Messingkugeln geschlossen. Die Distanz dieser Enden kann variirt werden, indem die Röhren in ihren Trägern verschiebbar sind. Die entfernten Enden der Röhren sind offen. Man kann in dieselben andere Röhren einschieben und so den Apparat auch verlängern. Nahe an den zwei zugekehrten Enden werden um dieselben zwei Schleifen aus dünnem Draht gelegt und diese mit den Polen eines Inductionsapparates verbunden.

Der secundäre Leiter besteht ebenfalls aus zwei Messingröhren von derselben Länge, aber viel kleinerem Durchmesser = 5 mm. Diese beiden Röhren sind ebenso wie die weiten Röhren des primären Leiters auf einer Holzleiste montirt. Ihre benachbarten Enden sind durch Messingkugeln von 8 mm Durchmesser geschlossen; der Abstand derselben kann beliebig klein gemacht werden.

Stellt man die beiden Apparate parallel und lässt in dem primären Funken überschlagen, so treten auch in dem secundären kleine Funken auf. Die Schlagweite dieser Funken nimmt mit der Distanz der beiden Apparate ab, die Funken können aber noch gut beobachtet werden, wenn die Distanz der Apparate 1 m und auch mehr beträgt.

Schiebt man den secundären Leiter in eine aus zusammengerolltem Drahtgeflecht hergestellte Röhre von 100 cm Länge und 10 cm Durchmesser, so kann man die beiden Apparate so nahe aneinander stellen, als es eben angeht; in dem secundären Leiter tritt niemals ein Funke auf. Das Drahtgeflecht, dessen Maschen 4 mm² Flächeninhalt haben, schirmt den umhüllten Leiter vollständig gegen die inducirenden Wirkungen des primären Apparates.

Schiebt man über den secundären Leiter statt der einen Röhre von 100 cm Länge zwei solche Röhren von je 50 cm Länge, jedoch so, dass sie in der Mitte nicht zusammenstossen, so verhindern diese Röhren die Funkenerscheinung in dem eingehüllten Leiter nicht. Schiebt man die beiden Röhren ganz aneinander, sodass sie sich in vielen Punkten ihres Umfanges berühren, dann wirken sie ebenfalls als vollständiger Schirm. Ja, es genügt, die Enden der beiden Röhren soweit einander zu nähern, dass an mehreren Stellen Funken zwischen denselben auftreten. Sobald dies der Fall ist, hören die Funken im eingeschlossenen Leiter zu spielen auf. Dieser Versuch lehrt, dass der umhüllende Leiter nur dann einen Schirm für den eingeschlossenen bildet; wenn in beiden Schwingungen derselben Art inducirt werden können.

Der secundäre Leiter wird von der Drahtröhre gleicher Länge gegen die inducirenden Wirkungen des primären Apparates auch dann geschirmt, wenn der letztere eine beträchtlich grössere Länge hat, als die beiden ersteren. Es treten aber in diesem Falle sofort Funken im secundären Leiter auf, wenn man ihn an den Enden ableitend berührt. Sind der primäre Apparat und die Drahtröhre gleich lang, der secundäre Leiter aber länger, sodass er auf beiden Seiten aus der Röhre hinausragt, so schwächt die Röhre die Funken, sie hebt dieselben aber nicht auf. Der primäre Leiter

inducirt in dem secundären immer Schwingungen, mögen die beiden gleiche oder verschiedene Längen haben. Eine Röhre schirmt den eingeschlossenen secundären Leiter vollkommen gegen die Induction des primären, wenn sie ebenso lang oder länger ist als der eingeschlossene Leiter, nicht aber, wenn sie kürzer ist. Eine Röhre hebt auch in einem secundären Leiter, welcher spiralförmig gewunden ist, die Funken auf, wenn der primäre Apparat, die Axe der Spirale und die Röhre gleiche Längen haben.

Man kann bei solchen Versuchen auch Blechtafeln statt der Drahröhren verwenden. Stellt man den primären und secundären Apparat in einer Distanz von etwa 20 cm parallel, so hebt eine zwischen beide gestellte Tafel aus dünnem Zinkblech von 1 m Länge und 10 cm oder grösserer Höhe die Induction in dem secundären Leiter so weit auf, dass die früher lebhaften Funken verschwinden. Nimmt man statt der einen Tafel zwei von je 50 cm Länge, so bilden sie keinen Schirm, so lange sie sich nicht berühren oder wenigstens nicht so nahe aneinander gerückt sind, dass zwischen mehreren Punkten derselben sich Funken zeigen.

Die in einer solchen Tafel inducirten Schwingungen wirken nicht nur hinter, sondern auch vor der Tafel entgegengesetzt jenen des primären Apparates. Wird die Tafel knapp hinter dem secundären Leiter aufgestellt, so hebt sie ebenfalls die Funken in demselben auf. Dies thun auch die zwei Tafeln von halber Länge, wenn sie sich berühren, nicht aber, wenn sie getrennt sind. Es gilt auch für die Reflexion der electrischen Schwingungen der Satz, dass eine solche nur stattfindet, wenn in dem Reflector solche Schwingungen inducirt werden können oder die reflectirten Inductionswirkungen sind die Wirkungen der Schwingungen, welche in der Oberfläche des reflectirenden Leiters inducirt werden.

Statt der Blechtafeln kann man zu diesen Versuchen auch Tafeln aus Drahtnetz nehmen. Auch Systeme von parallel gespannten Drähten verhalten sich, wie Hertz gezeigt hat, wie flächenförmige Leiter. Solche Drähte üben aber nur dann eine Schirmwirkung aus, wenn der primäre Leiter in ihnen ebensolche Ströme, wie in dem zu schirmen-

den Leiter in genügender Intensität induciren kann. Sie bilden keinen Schirm, wenn sie senkrecht zu den beiden Leitern gestellt werden.

Der primäre Leiter wirkt auf den zweiten nicht blos dann inducirend, wenn die beiden parallel stehen, sondern auch in anderen Lagen, auch wenn sie gegen einander senkrecht gestellt werden, in diesem Falle nur dann nicht, wenn sie eine symmetrische Figur bilden. Stellt man die beiden Leiter parallel und dreht dann den secundären Leiter um seinen Endpunkt, so treten in ihm in allen Lagen Funken auf, wenn man die Drehung bis zu einem Winkel von 180° ausdehnt.

Dieses Verhalten des secundären Leiters entspricht nicht den bekannten Grundsätzen der Electrodynamik. Nach diesen muss die Richtung der Induction im secundären Leiter in der Endstellung die entgegengesetzte von jener in der anfänglichen Stellung sein. Die inducirte electromotorische Kraft muss also in einer zwischen den Stellungen 0° und 180° gelegenen Richtung des Leiters der Null gleich sein. Nimmt man zur Berechnung der Induction die Potentialformel von F. Neumann, so verschwindet die Induction, wenn die beiden Leiter einen rechten Winkel miteinander bilden. Die Formel von W. Weber gibt den Nullwerth der Induction für einen kleineren Winkel. Dieser Winkel rückt näher gegen 90° , wenn man die Induction entsprechend der electromagnetischen Theorie nach dem arithmetischen Mittel der beiden Formeln rechnet. Diese Rechnung entspricht der Annahme, dass die Induction keine unmittelbare Wirkung zwischen den Leiterelementen ist, sondern durch die Magnetisirung des Mediums vermittelt wird, welches die Leiter erfüllt und umgibt.

Aus den Funken im secundären Leiter kann man jedoch keinen sicheren Schluss über electrodynamische Verhältnisse ziehen, da dieselben nicht nur durch die electrodynamische Induction, sondern auch durch die electrostatische der auf dem primären Leiter vorhandenen periodisch wechselnden Ladung verursacht werden. Man kann diese beiden Wirkungen in einigen Fällen von einander trennen. Stellt man die beiden Leiter gegeneinander senkrecht und schiebt zwi-

schen die benachbarten Enden derselben eine Metallplatte, so hat diese auf die Funkenbildung keinen Einfluss, wenn sie isolirt ist, wohl aber, wenn sie mit der Erde leitend verbunden wird. Die Funken verschwinden dann gewöhnlich, sie treten aber wieder auf, wenn man die Schlagweite im secundären Leiter kleiner macht. Ob in diesem Falle durch die eingeschobene abgeleitete Platte die electrostatische Wirkung ganz aufgehoben wird, die übrigbleibenden kleinen Funken also electrodynamischer Natur sind, ist schwer zu entscheiden. Es ist noch eine genauere Untersuchung der ganzen Frage nothwendig.

In derselben Weise wie in metallischen kann man electrische Schwingungen auch in geraden flüssigen Leitern induciren. Zur Herstellung des secundären Leiters dienen zwei Glasröhren. Die zwei entfernten Enden derselben sind offen und nach aufwärts gebogen, die einander zugewendeten Enden sind geschlossen und enthalten kurze eingeschmolzene Platindrähte, an welche aussen kleine Messingkugeln aufgesteckt werden. Werden die Röhren mit verdünnter Schwefelsäure (14 Volumentheile Wasser, 1 Theil Schwefelsäure) gefüllt und der so formirte Leiter zum primären parallel gestellt, so treten zwischen den einander hinreichend genäherten Messingkugeln schöne, weisse Funken auf. Man kann die Schwefelsäure noch viel weiter verdünnen, die Funken werden dann immer schwächer und erscheinen endlich nicht mehr als weisse, sondern als röthliche Funken. Auf dieselbe Art kann man auch den primären Leiter durch einen flüssigen ersetzen.

Endlich habe ich auch einen secundären Leiter hergestellt, in welchem die inducirten Funken direct zwischen zwei Flüssigkeitskuppen überspringen. Zwei Glasröhren von je 50 cm Länge und 1 cm Durchmesser sind an je einem Ende zugeschmolzen, an den anderen Enden in kurze, dünnere Röhren ausgezogen. Die beiden Röhren werden mit verdünnter Schwefelsäure vollgefüllt und können horizontal gelegt werden, ohne dass aus den engen offenen Enden Flüssigkeit austritt. Stellt man diesen secundären Leiter parallel dem primären auf und nähert die Kuppen der Flüssigkeit einander bis auf 1 mm, so springen zwischen denselben dünne

röthliche Funken über, die hellglänzend werden, wenn man die Kuppen der Flüssigkeiten einander noch näher bringt. Mit sehr verdünnter Schwefelsäure gelang mir dieser Versuch nicht; wurden die Flüssigkeiten einander immer mehr und mehr genähert, so vereinigten sie sich, ohne dass ich vorher einen Funken beobachten konnte. Ich bemerke noch, dass die Schlagweite des Funkens im primären Apparat gewöhnlich 5 mm, in einzelnen Fällen grösser, bis doppelt so gross gewählt wurde.

Ich habe auch einige Versuche über die Schirmwirkung flüssiger Leiter ausgeführt. Der secundäre Leiter wurde in eine Glasröhre von 1,5 cm äusserem Durchmesser eingeschlossen und in eine weitere Röhre von 6 cm Durchmesser centrirt eingeführt. Der Raum zwischen den beiden Röhren wurde mit Flüssigkeit ausgefüllt. Dieser Apparat hatte nahe dieselbe Länge wie der primäre. Beide wurden in 15 cm Distanz einander parallel, und zwar vertical, aufgestellt. Wurde der Zwischenraum zwischen den beiden Röhren mit Wasser gefüllt, so ging die Funkenbildung im secundären Leiter gerade so vor sich, wie in dem Falle, als dieser Raum mit Luft gefüllt war. Wurde das Wasser mit wenig Schwefelsäure versetzt, so zeigte sich auch keine Aenderung. Schwefelsäure vom specifischen Gewicht 1,011 bewirkte eine merkliche Schwächung. Bei der Anwendung einer Säure vom specifischen Gewicht 1,026 verschwanden die Funken. Ebenso blieben die Funken aus, wenn dichtere Säuren genommen wurden, sie traten aber wieder auf, als der Apparat mit einer sehr hoch concentrirten Säure gefüllt wurde. Der specifische Widerstand der Säure von der Dichte 1,026 ist etwa 4,4mal so gross als jener der am besten leitenden. Nimmt man an, dass die Schwingungen im secundären Leiter seiner Länge als einer halben Welle entsprechen, so ist die Zahl derselben in der Secunde = 150 Millionen. Das Resultat dieses Versuches stimmt also beiläufig mit den oben über das Verhalten der Schwefelsäure angegebenen Daten. Zu einer genauen Vergleichung mit den Formeln, welche man für diese Versuchsanordnung aufstellen kann, fehlt übrigens die Bestimmung des Werthes, auf welchen die inducirende Kraft herabgesetzt werden

muss, damit die Funkenbildung im secundären Leiter verschwindet.

Versuche über die Schirmwirkung electrolytischer Leiter sind schon von J. J. Thomson¹⁾ nach einer bequemerer Methode ausgeführt worden. Der primäre und secundäre Leiter sind bei seinen Versuchen kreisförmig gebogen, zwischen denselben befindet sich die Flüssigkeit in einer flachen Schale in Form einer Platte. Bei diesen Versuchen bilden die in der Flüssigkeit inducirten Schwingungen geschlossene Ströme, bei meinen Versuchen haben sie offene geradlinige Bahnen.

1) J. J. Thomson, Proc. of Roy. Soc. London, 45. p. 269. 1889.
