16.

Sur quelques propriétés d'une certaine classe de fonctions transcendantes.

(Par Mr. *O. J. Broch*, Candidatus philosophiae à Christiania.)

Les théorèmes que je vais démontrer dans le mémoire suivant sont analogues aux théorèmes que l'illustre *Abel* a proposés dans le mémoire XV. du premier tome de ses ouvrages complètes. Ils énoncent des propriétés remarquables des fonctions de la forme $\int \frac{F\,dx}{\sqrt[n]{R}}$, fonctions dont M. *Abel* dans le mémoire cité n'a traités que pour le cas où n est égal à 2.

§. 1.

Théorème I.

Soient $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ des fonctions entières de x, dont les coefficiens sont des variables indépendantes. Soient de plus $R(x)$ et $F(x)$ des fonctions entières de x. Si l'on désigne par $c_1\, c_2 \ldots\ldots c_n$ les diverses valeurs de $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ et que l'on suppose

$$1. \quad B_\nu(x) = c_\nu^{n-1} f_{n-1}(x) \sqrt[n]{(R(x)^{n-1})} + c_\nu^{n-2} f_{n-2}(x) \sqrt[n]{(R(x)^{n-2})} \ldots\ldots + c_\nu f_1(x) \sqrt[n]{(R(x))} + f_0(x),$$

et

$$2. \quad \psi(x) = B_1(x).B_2(x)\ldots\ldots B_n(x),$$

$\psi(x)$ devient une fonction entière de x. En la décomposant en facteurs de la forme $x - x_\nu$ on obtiendra

$$3. \quad \psi(x) = A(x-x_1)(x-x_2)\ldots\ldots(x-x_\mu).$$

Or, en supposant:

$$4. \quad \vartheta(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(R(x))}} \Big\{ \log\left(\frac{f_0(x) + f_1(x)\sqrt[n]{(R(x))} + \ldots\ldots + f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}}{f_0(x) - f_1(x)\sqrt[n]{(R(x))} + \ldots\ldots - f_{n-1}(x)\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}}\right)$$
$$+ \sum_1^{\frac{1}{2}n-1}{}_p \left(\cos\frac{2p\pi}{n} \log \sum_0^{n-1}{}_\nu \sum_0^{n-1}{}_\zeta \left(f_\nu(x) f_\zeta(x) \cos\frac{2p(\nu-3)\pi}{n}\right)\right)$$
$$- \sum_1^{\frac{1}{2}n-1}{}_p \left(\sin\frac{2p\pi}{n} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\sum_0^{n-1}{}_\nu \sin\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}{\sum_0^{n-1}{}_\nu \cos\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(Rx^\nu)}}\right)\right) \Big\},$$

$$5.\quad \vartheta'(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{(R(x))}}\Bigg\{\log\left(f_0 x + f_1 x\sqrt[n]{(R(x))} + \dots + f_{n-1}\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}\right)$$
$$+\sum_{0}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_p\left(\cos\frac{2p\pi}{n}\log\sum_{0}^{n-1}{}_\nu\sum_{0}^{n-1}{}_\zeta\left(f_\nu(x)f_\zeta(x)\cos\frac{2p(\nu-3)\pi}{n}\right)\right)$$
$$-\sum_{1}^{\frac{1}{2}(n-1)}{}_p\left(\sin\frac{2p\pi}{n}\,\text{arc tang} = \left(\frac{\sum_{0}^{n-1}{}_\nu \sin\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}{\sum_{0}^{n-1}{}_\nu \cos\frac{2p\nu\pi}{n} f_\nu(x)\sqrt[n]{(R(x)^\nu)}}\right)\right)\Bigg\},$$

$$6.\quad \Pi(x) = \int\frac{F(x)\,dx}{(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}},$$

et en désignant par ϖz le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement d'une fonction quelconque z de x, je dis qu'on aura

$$7.\quad c_1\Pi(x_1) + c_2\Pi(x_2) + \dots c_\mu\Pi(x_\mu) = C + F(a)\vartheta(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est un nombre pair, et

$$8.\quad c_1\Pi x_1 + c_2\Pi x_2 + \dots c_\mu\Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta'(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta'(x)}{x-a}\right)$$

si n est impair.

Toutes les valeurs de $c_1 c_2 \dots c_n$ dans l'expression de la fonction $\psi(x)$ doivent être différentes entre elles, tandis que les quantités $c_1 c_2 \dots c_\mu$ dans le premier membre des équations (7.) et (8.) seront déterminées par des équations particulières, que nous presenterons dans la suite.

Démonstration. Le second membre de l'équation (2.) est une fonction symétrique des racines de l'équation $y^n - R(x) = 0$; il est donc une fonction rationelle des coefficiens de cette équation, et conséquement $\psi(x)$ doit être une fonction entière de x. En vertu de l'équation (3.) les quantités $x_1, x_2, x_3, \dots x_\mu$ seront des fonctions des variables indépendantes qui sont les coefficiens des diverses puissances de x dans $f_0(x)$, $f_1(x), \dots f_{n-1}(x)$. Soit x une quelconque de ces quantités, on aura

$$9.\quad \psi'(x) = 0,$$

et en différentiant, on tire de là:

$$10.\quad dx\,\psi'(x) =$$
$$-\left[\delta f_{n-1}(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu^{n-1}\sqrt[n]{(R(x)^{n-1})}}{B_\nu(x)} + \delta f_{n-2}(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu^{n-2}\sqrt[n]{(R(x)^{n-2})}}{B_\nu(x)} + \dots\right.$$
$$\left.\dots\delta f_1(x)\sum_{1}^{n}{}_\nu\frac{\psi(x)c_\nu\sqrt[n]{(R(x))}}{B_\nu(x)} + \delta f_0(x)\sum\frac{\psi(x)}{B_\nu(x)}\right],$$

en désignant par $\psi'(x)$ la dérivée de $\psi(x)$ par rapport à x, et par la caractéristique δ la différentiation relative aux seules variables indépendantes. En supposant, pour abréger:

$$11. \quad \sum_1^n {}_\nu \frac{\psi(x)\, c_\nu^p \sqrt[n]{(R(x)^p)}}{B_\nu(x)} = C_p(x),$$

l'équation (10.) donne

$$12. \quad dx\, \psi'(x)$$
$$= -[\delta f_{n-1}(x)\, C_{n-1}(x) + \delta f_{n-2}(x)\, C_{n-2}(x) + \dots \delta f_1(x)\, C_1(x) + \delta f_0(x)\, C_0(x)].$$

De là on tire, en multipliant par $\dfrac{F(x)}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}\,\psi'(x)}$:

$$12. \quad \frac{F(x)\, dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} =$$
$$-\frac{F(x)}{(x-a)\psi'(x)} \cdot \left\{ \frac{\delta f_{n-1} x\, C_{n-1}(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} + \frac{\delta f_{n-2}(x)\, C_{n-2}(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} + \dots \frac{\delta f_0(x)\, C_0(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} \right\}.$$

Maintenant, pour que l'équation (9.) puisse avoir lieu, une des quantités $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... $B_n(x)$ doit être égale à zéro. Soit donc

$$14. \quad B_r(x) = 0,$$

on trouve

$$15. \quad C_p(x) = \frac{\psi x\, c_r^p \sqrt[n]{(R(x)^p)}}{B_r(x)}.$$

Donc

$$16. \quad (C_p(x))^n = R(x)\,(C_{p-1}(x))^n,$$

et

$$17. \quad \frac{C_p(x)}{c\sqrt[n]{(R(x))}} = C_{p-1}(x).$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (13.) on aura

$$18. \quad \frac{F(x)\, dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\frac{F(x)}{(x-a)\psi' x}\Big[\delta f_{n-1}(x)\, C_{n-2}(x) + \delta f_{n-2}(x)\, C_{n-3}(x) + \dots$$
$$\dots + \delta f_1(x)\, C_0(x) + \delta f_0(x) \frac{C_{n-1}(x)}{R(x)}\Big].$$

Maintenant toutes les fonctions $C_{n-2}(x)$, $C_{n-3}(x)$, ... $C_0(x)$, $\dfrac{C_{n-1}(x)}{R(x)}$ sont des fonctions entières de x. En effet $C_{n-1}(x)$, $C_{n-2}(x)$, ... $C_0(x)$ sont les coefficients de $\delta f_{n-1}(x)$, $\delta f_{n-2}(x)$, ... $\delta f_0(x)$ dans le second membre de l'équation (12.), et on les tire de la différentiation de la fonction entière $\psi(x)$ par rapport aux variables indépendantes, et tous les termes où $f_{n-1}(x)$ paraît dans $\psi(x)$ ont toujours, comme on le voit dans l'équation (2.), $R(x)$ pour coefficient. Donc, en faisant pour abréger:

$$19.\quad \lambda(x) = F(x)\Big[C_{n-2}(x)\,\delta f_{n-1}(x) + C_{n-3}(x)\,\delta f_{n-2}(x) + \dots \\ \dots + C_0(x)\,\delta f_1(x) + \frac{C_{n-1}(x)}{R(x)}\,\delta f_0 x\Big],$$

où $\lambda(x)$ est une fonction entière de x, on trouve

$$20.\quad \frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi' x},$$

et en désignant par $\Sigma\lambda(x)$ la quantité $\lambda x_1 + \lambda x_2 + \dots \lambda x_\mu$:

$$21.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\Sigma\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi' x}.$$

Si maintenant on fait $\lambda(x) = \lambda_1(x)(x-a) + \lambda(a)$, où $\lambda_1(x) = \dfrac{\lambda(x)-\lambda(a)}{x-a}$ est une fonction entière de x, l'équation (21.) donne

$$22.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = -\Sigma\frac{\lambda_1 x}{\psi' x} - \lambda(a)\Sigma\frac{1}{(x-a)\psi' x}.$$

Mais

$$23.\quad \Sigma\frac{1}{(x-a)\psi' x} = -\frac{1}{\psi(a)}\ \text{et}$$

$$24.\quad \Sigma\frac{\lambda_1(x)}{\psi'(x)} = \varpi\left(\frac{\lambda_1(x)}{\psi(x)}\right) = \varpi\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)},$$

en remarquant que $\varpi\dfrac{\lambda(a)}{(x-a)\psi(x)}$ est toujours égal à zéro. L'équation (22.) devient donc:

$$25.\quad \Sigma\frac{F(x)\,dx}{c(x-a)\sqrt[n]{(R(x))}} = \frac{\lambda(a)}{\psi(a)} - \varpi\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)},$$

et en intégrant et remarquant que $\int\varpi X\,dy = \varpi\int X\,dy$:

$$26.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1 + \frac{1}{c_2}\Pi x_2 + \dots + \frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C + \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} - \varpi\int\frac{\lambda(x)}{(x-a)\psi(x)}.$$

Pour trouver la valeur de $\int\dfrac{\lambda(a)}{\psi(a)}$, il y a à rémarquer que cette intégrale à l'aide de l'équation (19.) peut être mise sous la forme suivante:

$$27.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} =$$

$$F(a)\int\left\{\frac{C_{n-2}(a)\,\delta f_{n-1}(a) + C_{n-3}(a)\,\delta f_{n-2}(a) + \dots C_0(a)\,\delta f_1(a) + \frac{C_{n-1}(a)}{R(a)}\,\delta f_0(a)}{\psi(a)}\right\}.$$

Maintenant la quantité entre les parenthèses du second membre devant être intégrable, on doit avoir

$$\frac{\delta\left(\frac{C_p(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{r+1}(a)} = \frac{\delta\left(\frac{C_r(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{p+1}(a)},$$

en remarquant que

$$29. \quad \frac{C_{n-1}(a)}{R(a)} = C_{-1}(a).$$

Or cela a lieu effectivement, car on a

$$30. \quad \psi(a)\frac{\delta C_p(a)}{\delta f_{r+1}(a)} = \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^p}{B_\nu(a)}\right).\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^{r+1}}{B_\nu(a)}\right) - \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^{p+r+1}}{B_\nu^2(a)}\right),$$

$$31. \quad C_p(a)\frac{\delta\psi(a)}{\delta f_{r+1}(a)} = \psi^2(a)\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^p}{B_\nu(a)}\right).\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^{r+1}}{B_\nu(a)}\right):$$

donc

$$32. \quad \frac{\delta\left(\frac{C_p(a)}{\psi(a)}\right)}{\delta f_{r+1}(a)} = \frac{\psi(a)\frac{\delta C_p(a)}{\delta f_{r+1}(a)} - C_p(a)\frac{\delta\psi(a)}{\delta f_{r+1}(a)}}{\psi^2(a)} = -\sqrt[n]{(R(a)^{p+r+1})}\,\Sigma_1^n{}_\nu\left(\frac{c_\nu^{p+r+1}}{B_\nu^2(a)}\right),$$

et cela est une fonction symétrique par rapport à p et r. Le second membre de l'équation (27.) est donc intégrable. Maintenant dans toutes les fonctions $\frac{C_{n-2}(a)}{\psi(a)}$, $\frac{C_{n-3}(a)}{\psi a}$, ... $\frac{C_{n-1}(a)}{R(a)\psi(a)}$, il n'existe aucune partie qui ne contienne toutes les quantités $f_0(a)$, $f_1(a)$, $f_{n-1}(a)$ ....: on conclura donc que

$$33. \quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\int\frac{C_{p-1}\,\delta f_p(a)}{\psi(a)}$$

ou, en substituant la valeur de $C_{p-1}(a)$ donnée par l'équation (11.):

$$34. \quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\int\Sigma_1^n{}_\nu\frac{c_\nu^{p-1}\sqrt{(R(a)^{p-1})}\,\delta f_p(a)}{B_\nu(a)} = \frac{F(a)}{\sqrt[n]{(R(a))}}\Sigma_1^n{}_\nu\frac{1}{c_\nu}\log B_\nu(a).$$

Si n est pair, $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ a deux valeurs réelles $+1$ et -1, et $n-2$ valeurs imaginaires de la forme $\cos\frac{2p\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2p\pi}{n}$, en donnant à p successivement toutes les valeurs entières renfermées entre les limites 1 et $\frac{n}{2}-1$. Si n est impair, $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$ a une valeur réelle $+1$ et $n-1$ valeurs imaginaires de la forme $\cos\frac{2p\pi}{n} \pm \sqrt{-1}\sin\frac{2p\pi}{n}$, en donnant à p successivement toutes les valeurs entières renfermées entre les limites 1 et $\frac{n-1}{2}$. En vertu de cela et en remarquant que

$$(a+b\sqrt{-1})\log(c+d\sqrt{-1})+(a-b\sqrt{-1})\log(c-d\sqrt{-1})$$
$$= a\log(c^2+d^2)+b\operatorname{arc}\left(\operatorname{tang}=\frac{d}{c}\right)$$

on trouve aisément, si n est pair:

$$35.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\,\vartheta(a),$$

et si n est impair:

$$36.\quad \int\frac{\lambda(a)}{\psi(a)} = F(a)\,\vartheta'(a).$$

Donc, en substituant cela dans l'équation (26.) on a

$$37.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1+\frac{1}{c_2}\Pi x_2+\dots\frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C+F(a)\,\vartheta(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et

$$38.\quad \frac{1}{c_1}\Pi x_1+\frac{1}{c_2}\Pi x_2+\dots\frac{1}{c_\mu}\Pi x_\mu = C+F(a)\vartheta'(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta'(a)}{x-a}\right)$$

si n est impair; ou parceque $\frac{1}{c_1}$ est aussi une valeur de $\sqrt[n]{\sqrt{1}}$, en posant c_ν au lieu de $\frac{1}{c_\nu}$:

$$39.\quad c_1\Pi x_1+c_2\Pi x_2+\dots c_\mu\Pi x_\mu = C+F(a)\,\vartheta(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et si n est impair

$$40.\quad c_1\Pi x_1+c_2\Pi x_2+\dots c_\mu\Pi x_\mu = C+F(a)\vartheta'(a)-\varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta'(x)}{x-a}\right)$$

Les valeurs de $c_1, c_2, c_3, \dots c_\mu$ dans le premier membre des équations (39.) et (40.) seront déterminées par les équations:

$$41.\quad \begin{cases} c_1\,C_p(x_1) = \sqrt[n]{(R(x_1))}\,C_{p-1}(x_1), \\ c_2\,C_p(x_2) = \sqrt[n]{(R(x_2))}\,C_{p-1}(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_\mu\,C_p(x_\mu) = \sqrt[n]{(R(x_\mu)}\,C_{p-1}(x_\mu), \end{cases}$$

que l'on tire aisément de l'équation (17.).

§. 2.

En supposant plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots x_\mu$ égales entre elles, par exemple $x_1 = x_2$, on aura en vertu des équations (41.):

$$42. \quad c_1 C_p(x_1) = \sqrt[n]{(R(x_1))}\, C_{p-1}(x_1) = c_2 C_p(x_1),$$

et cela donne, en supposant que $C_p(x_1)$ et $\sqrt[n]{(R(x))}\, C_{p-1}(x)$, ou, ce qui est la même chose, $C_p(x)$ et $R(x)\, C_{p-1}(x)$ n'ont pas $x-x_1$ pour diviseur commun:

$$c_1 = c_2.$$

On aura donc le théorème suivant.

Théorème II.

Etant donné l'équation

$$43. \quad \psi(x) = A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\dots\dots(x-x_\mu)^{m_\mu},$$

où les fonctions $C_p(x)$ et $R(x)\, C_{p-1}(x)$ n'ont pas de diviseur commun, on aura

$$44. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\, \vartheta(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\, \vartheta(x)}{x-a}\right)$$

si n est pair, et

$$45. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\, \vartheta'(a) - \varpi\left(\frac{F(x)\, \vartheta'(a)}{x-a}\right)$$

si n est impair.

§. 3.

Si l'on suppose $F(x)$ divisible par $(x-a)$, $F(a)$ devient $= 0$. On aura donc, en mettant $(x-a)\, F(x)$ à la place de $F(x)$ le théorème que voici:

Théorème III.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème II., si l'on fait

$$46. \quad \Pi x = \int \frac{F(x)\, dx}{\sqrt[n]{(R(x))}},$$

où $F(x)$ est une fonction entière quelconque de x, on aura

$$47. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C - \varpi(F(x)\, \vartheta(x))$$

si n est pair, et

$$48. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots . c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C - \varpi(F(x)\, \vartheta'(x))$$

si n est impair.

§. 4.

Si dans les formules (44.) et (45.) on suppose le degré de $F(x)$ moindre que celui de $\sqrt{(R(x))}$, on aura

$$\varpi\left(\frac{F(x)\, \vartheta(x)}{x-a}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \varpi\left(\frac{F(x)\, \vartheta'(x)}{x-a}\right) = 0.$$

On aura donc:

Théorème IV.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), si le degré de $(F(x))^n$ est moindre que celui de $R(x)$, on aura

$$49. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta(a)$$

si n est pair, et

$$50. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C + F(a)\vartheta'(a)$$

si n est impair.

§. 5.

Si dans le théorème précédent on suppose $F(x)$ divisible par $x-a$, on aura $F(a)=0$, et en mettant $(x-a)F(x)$ au lieu de $F(x)$, on aura le théorème suivant

Théorème V.

Les choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), si l'on fait

$$51. \quad \Pi x = \int \frac{F(x)\,dx}{\sqrt[n]{(Rx)}},$$

où le degré de $F(x)^n$ augmenté de n unités est moindre que celui de $R(x)$, on aura

$$52. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu = C.$$

§. 6.

En différentiant les équations (44.) et (45.) $k-1$ fois de suite par rapport à a, on aura le théorème suivant.

Théorème VI.

Faisant

$$53. \quad \Pi(x) = \int \frac{F(x)\,dx}{(x-a)^k \sqrt[n]{(R(x))}}$$

les autres choses étant supposées les mêmes que dans le théorème (2.), on aura

$$54. \quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu$$
$$= C + \frac{1}{\Gamma k} \cdot \frac{d^{k-1}(F(a)\,\vartheta(a))}{da^{k-1}} - \varpi\left(\frac{F(x)\,\vartheta(x)}{(x-a)^k}\right)$$

si n est pair, et

$$55.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi_\mu x_\mu$$
$$= C + \frac{1}{\Gamma k} \cdot \frac{d^{k-1}(F(a)\vartheta'(a)}{d a^{k-1}} - \varpi\left(\frac{F(x)\vartheta'(x)}{(x-a)^k}\right)$$

si n est impair. Γk désigne comme de contienne le produit $1.2.3\dots(k-1)$.

§. 7.

Soit $\mathfrak{F}(x)$ une fonction rationelle quelconque de x, on peut toujours faire

$$56.\quad \mathfrak{F}(x) = F(x) + \frac{F_1(x)}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{F_2(x)}{(x-a_2)^{k_2}} + \dots \frac{F_\nu(x)}{(x-a_\nu)^{k_\nu}},$$

où $F(x)$, $F_1(x)$, ... $F_\nu(x)$ désignent des fonctions entières de x. On aura donc en vertu des théorèmes III. et VI. le théorème qui suit.

Théorème VII.

Faisant

$$57.\quad \Pi x = \int \frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x))}},$$

$\mathfrak{F}(x)$ étant déterminé par l'équation (56.), on aura

$$58.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu =$$
$$C - \varpi(\mathfrak{F}(x)\vartheta(x)) + \frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{d^{k_1-1}(F_1(a_1)\vartheta(a_1))}{d a_1^{k_1-1}} + \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{d^{k_2-1}(F_2(a_2)\vartheta(a_2))}{d a_2^{k_2-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{\Gamma k_\nu} \cdot \frac{d^{k_\nu-1}(F_\nu(a_\nu)\vartheta(a_\nu))}{d a_\nu^{k_\nu-1}}$$

si n est pair, et

$$59.\quad c_1 m_1 \Pi x_1 + c_2 m_2 \Pi x_2 + \dots c_\mu m_\mu \Pi x_\mu =$$
$$C - \varpi(\mathfrak{F}(x)\vartheta'(x)) + \frac{1}{\Gamma k_1} \cdot \frac{d^{k_1-1}(F_1(a_1)\vartheta'(a_1))}{d a_1^{k_1-1}} + \frac{1}{\Gamma k_2} \cdot \frac{d^{k_2-1}(F_2(a_2)\vartheta'(a_2))}{d a_2^{k_2-1}} + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{\Gamma k_\nu} \cdot \frac{d^{k_\nu-1}(F_\nu(a_\nu)\vartheta'(a_\nu))}{d a_\nu^{k_\nu-1}}$$

si n est impair.

§. 8.

En considérant un certain nombre m des quantités x_1, x_2, ... x_μ comme variables indéterminées, les coefficients de x dans les fonctions $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$ seront des fonctions de celles-ci et déterminées par m des équations (41.). Le plus grand nombre des variables indépendantes est donc égal au nombre des coefficiens de x dans $f_0(x)$, $f_1(x)$, ... $f_{n-1}(x)$, et la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme (57.) sera donc réduite à l'aide des équations (58.) et (59.) à un nombre déterminé ν de fonctions de la même forme, suivie d'une expression algébrique, logarithmique ou circulaire. Pour trouver ce nombre ν, soit le dégré de $R(x) = p$, et de $f_{n-1}(x) = r$: la moindre valeur de μ est évidement $= nr + (n-1)p$. On trouvera donc en ayant égard à la forme de la fonction $\psi(x)$:

Le degré de $f_{n-1}(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ r$;

Le degré de $f_{n-2}(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{r}{n}$;

Le degré de $f_{n-3}(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{2p}{n}$;

. . . .

Le degré de $f_1(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{(n-2)p}{n}$;

Le degré de $f_0(x)$ égal au nombre entier que contient $r + \frac{(n-1)p}{n}$.

Donc le nombre des coefficiens est égal à la somme de $nr + n - 1$ et des nombres entiers que contiennent les fractions $\frac{p}{n}, \frac{2p}{n}, \ldots \frac{(n-2)p}{n}, \frac{(n-1)p}{n}$; en remarquant qu'en vertu de la forme des équations (41.) un des coefficiens doit être arbitraire. En retranchant ce nombre de $nr + (n-1)p$, on trouvera ν. On a donc le théorème suivant.

Théorème VIII.

Soit $\Pi x = \int \frac{\mathfrak{F}(x)\,dx}{\sqrt[n]{(R(x))}}$, où $\mathfrak{F}(x)$ est une fonction rationelle quelconque de x, et $R(x)$ une fonction entière du degré p: la somme d'un nombre quelconque de fonctions de cette forme sera toujours réductible à une expression algébrique, logarithmique ou circulaire, et à un nombre ν de fonctions de la même forme. Ce nombre ν est égal à la différence entre $(n-1)(p-1)$ et la somme des nombres entiers que contiennent les fractions $\frac{p}{n}, \frac{2p}{n}, \ldots \frac{(n-1)p}{n}$. Si $x_1, x_2, \ldots x_m$ sont les variables indépendantes, les variables dans les ν fonctions de la forme (57.) sont les racines de l'équation:

$$60. \quad \frac{\psi(x)}{A(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_m)} = 0.$$

§. 9.

Si plusieurs des quantités $x_1, x_2, \dots x_m$ sont égales entre elles, m des équations (41.) ne suffisent pas pour déterminer les coefficiens des fonctions $f_0(x), f_1(x), \dots f_{n-1}(x)$. Dans ce cas, en faisant pour abréger

$$6. \quad c.C_p(x) - \sqrt[n]{(R(x))}\, C_{p-1}(x) = \varrho(x),$$

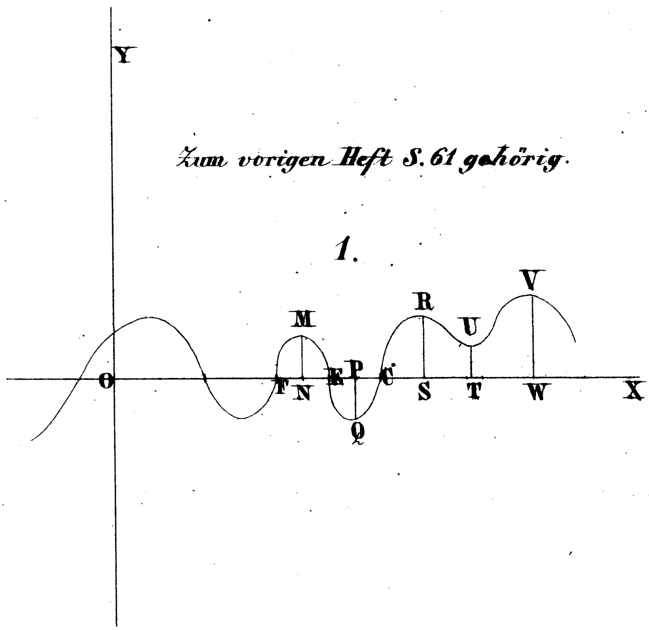
et en supposant $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_k$, on aura les équations:

$$62. \quad \varrho(x_1) = 0, \quad \varrho'(x_1) = 0, \quad \varrho''(x_1) = 0, \quad \dots \quad \varrho^{k-1}(x_1) = 0.$$

Christiania en Norvegue le 1 Août 1839.

Zum vorigen Heft S. 61 gehörig.

1.



2.