24.
Auflösung einer Aufgabe aus den Annalen der Mathematik von Herrn Gergonne.

(Von Herrn *J. Steiner.*)

I.

Im XVII. Bande der *Annales de mathematiques* von Herrn Gergonne befindet sich S. 83. folgende Aufgabe:

> „Construire rigoureusement la droite qui coupe à la fois quatre droites données dans l'espace, non comprises deux à deux dans un même plan."

Die nachfolgende Auflösung dieser Aufgabe erfordert einige Hülfssätze und Betrachtungen, die hier theils entwickelt, theils blofs angedeutet werden sollen.

II.

Folgende Sätze sind leicht einzusehen: 1) Durch jeden gegebenen Punct ist eine einzige Gerade möglich, welche mit einer der Lage nach gegebenen Geraden parallel ist. 2) Alle Geraden, welche eine gegebene Gerade A schneiden und mit einer anderen gegebenen Graden B parallel sind, liegen zusammen in einer Ebene, welche mit der letzteren Geraden parallel ist; oder durch eine gegebene Gerade A ist allemal eine einzige Ebene möglich, welche mit einer anderen gegebenen Geraden B parallel ist, vorausgesetzt, dafs die beiden Geraden A, B nicht parallel sind. 3) Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B gegeben, so ist durch jede derselben eine Ebene möglich, welche mit der anderen parallel ist (2.), und beide Ebenen sind daher mit einander parallel. 4) Sind im Raume irgend zwei Gerade und ein Punct gegeben, so ist durch den Punct allemal eine und nur eine Ebene möglich, welche mit jeder der beiden Geraden parallel ist.

III.

„Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B und irgend ein Punct P gegeben, so kann durch den Punct allemal eine einzige dritte Gerade gelegt werden, welche entweder 1) jene beiden Geraden schneidet,

det, oder 2) die eine schneidet und mit der anderen parallel ist." Denn man denke sich durch den Punct P und durch jede der beiden Geraden insbesondere eine Ebene, so mufs jede dritte Gerade, welche durch den Punct gehen und beide gegebene Geraden schneiden soll, in diesen beiden Ebenen zugleich liegen, daher giebt es nur eine einzige solche Gerade, nemlich die Durchschnittslinie beider Ebenen. Liegt der gegebene Punct P entweder in derjenigen Ebene, welche durch A geht und mit B parallel ist, oder in derjenigen, welche durch B geht und mit A parallel ist (II, 3.), so findet der zweite Fall (2.) des Satzes Statt, d. h., die dritte Gerade schneidet blofs die eine gegebene Gerade und ist mit der anderen parallel.

IV.

„Sind im Raume irgend drei Gerade A, B, C gegeben, so giebt es allemal eine und nur eine vierte Gerade C_1, welche zwei derselben, z. B. A, B, schneidet und mit der dritten C parallel ist." Denn man denke sich durch A eine Ebene, welche mit C parallel ist, und ebenso durch B eine Ebene, welche mit C parallel ist, so ist die Durchschnittslinie beider Ebenen die einzig mögliche Gerade C_1, welche die Geraden A, B schneidet und mit der Geraden C parallel ist (II, 2.). Man erhält daher die Gerade C_1, wenn man z. B. durch A eine Ebene legt, welche mit C parallel ist, und alsdann durch den Punct b, in welchem sie B schneidet, eine Gerade C_1, mit C parallel zieht.

V.

„Sind im Raum irgend drei Gerade A, B, C gegeben (von denen keine zwei in einer Ebene liegen), so kann eine vierte Gerade A_1 so bewegt werden, dafs sie stets alle drei schneidet, und dafs sie nach und nach durch jeden beliebigen Punct geht, welchen man in einer derselben annimmt." Denn durch jeden beliebigen Punct c, welchen man z. B. in der Geraden C annimmt, kann nach (III.) eine Gerade A_1 gelegt werden, welche die Geraden A, B, und welche mithin alle drei Geraden A, B, C schneidet. Und läfst man nun in der Vorstellung den Punct c in der Geraden C sich fortbewegen, so wird auch die Gerade A_1 sich bewegen, so dafs sie nach und nach längs der ganzen Geraden C fortgleitet.

Oder um irgend eine Gerade A_1 zu erhalten, welche die drei gegebenen Geraden A, B, C schneidet, lege man z. B. durch C eine beliebige Ebene, so wird diese die Geraden A, B in irgend zwei Puncten a, b schneiden, und alsdann wird die Gerade ab der Forderung genügen, d. h., sie hat die Eigenschaft der verlangten Geraden A_1, indem sie nothwendiger Weise auch die Gerade C schneiden wird, weil sie mit ihr in der genannten Ebene liegt. „Läfst man daher in der Vorstellung diese Ebene sich um die Gerade C herumbewegen, so wird die Gerade ab oder A_1 sich so bewegen, dafs sie fortwährend alle drei gegebene Gerade A, B, C schneidet, und dafs die Durchschnittspuncte a, b, c, in welchen sie die letzteren schneidet, längs diesen sich continuirlich fortbewegen."

VI.

Mit anderen Worten folgt daher: „dafs die drei gegebenen Geraden A, B, C von einer unzähligen Schaar anderer Geraden A_1, B_1, C_1, D_1, ... geschnitten werden können, und dafs von dieser Schaar keine zwei, so nahe sie auch immerhin auf einander folgen mögen, einander schneiden können, weil sie sonst, und folglich auch jene 3 Geraden mit ihnen, in einer Ebene liegen müfsten."

Fixirt man irgend drei Gerade aus der genannten Schaar, z. B. die drei Geraden A_1, B_1, C_1, und nimmt sie als drei gegebene Geraden an, so folgt also, dafs dieselben nicht allein von den drei Geraden A, B, C, sondern vielmehr von einer zweiten, unzähligen Schaar Geraden A, B, C, D, ... geschnitten werden können.

Es liegen aber bekanntlich die beiden Schaaren Gerader zusammen in einer Fläche der zweiten Ordnung, nemlich im einfachen Hyperboloïd *); und ferner schneiden nicht nur die drei Geraden A, B, C alle Geraden der Schaar A_1, B_1, C_1, D_1, ..., sondern jede Gerade der einen Schaar schneidet jede Gerade der anderen Schaar, so dafs also auch z. B. die Gerade D nothwendig die Gerade D_1 schneidet, oder mit ihr parallel ist **). Das heifst:

„Wenn im Raume drei beliebige Geraden A, B, C, von irgend drei anderen Geraden A_1, B_1, C_1 geschnitten werden, so beschreibt diejenige Gerade, welche sich durch die drei ersteren fortbewegt (V.), die nemliche Fläche zweiter Ordnung, als diejenige Gerade, welche sich durch die drei letzteren bewegt; und diese Fläche ist das einfache Hyperboloïd."

---

*) Band I. Seite 340. dieses Journals.

**) Seite 342. ebendaselbst.

Und ferner: „Von den beiden Schaaren Gerader, die in einer solchen Fläche liegen, können von denen, welche zu der nemlichen Schaar gehören, keine einander schneiden, dagegen aber schneidet jede Gerade der einen Schaar jede Gerade der anderen Schaar, ausgenommen eine einzige, mit welcher sie parallel ist."

VII.

Bewegt sich nemlich die Gerade A_1 durch die drei Geraden A, B, C, so wird sie irgend einmal eine solche Lage haben, daſs sie mit A parallel ist, nemlich in demjenigen besonderen Falle, wo ihr Durchschnittspunct mit A unendlich weit entfernt ist, und welche Lage von A_1 nach (IV.) gefunden wird. Daher folgt:

„Daſs mit jeder Geraden aus einer der beiden genannten Schaaren, eine Gerade aus der anderen Schaar parallel ist."

Es seien die Geraden A und A_1 parallel, so schneidet alsdann A_1 jede der übrigen Geraden B, C, D.... der ersten Schaar (VI.), und die Ebenen durch A_1 und B, A_1 und C, A_1 und D, u. s. w., sind alsdann sämmtlich mit A parallel. Da aber durch jede der Geraden B, C, D.... insbesondere nur eine Ebene mit A parallel möglich ist (II. 2.), so folgt also umgekehrt:

„Daſs alle Ebenen, welche man durch beliebige Geraden B, C, D...., die in einem einfachen Hyperboloïd liegen, und die zu der nemlichen Schaar gehören, mit einer Geraden A, die zu derselben Schaar gehört, parallel legt, einander in einer Geraden A_1 schneiden, welche zu der zweiten Schaar gehört, und welche mit jener abgesonderten Geraden A der ersten Schaar parallel ist."

Ueberhaupt geht jede Ebene, welche durch irgend eine Gerade aus einer der beiden Schaaren geht, nothwendiger Weise auch durch eine Gerade der anderen Schaar. Denn geht z. B. eine Ebene durch A, so wird sie die Geraden B, C in irgend zwei Puncten b, c schneiden, und alsdann schneidet die Gerade bc alle drei Geraden A, B, C (V.), und gehört also zu der zweiten Schaar und liegt in der genannten Ebene. Also: „Jede Ebene, welche das einfache Hyperboloïd in einer Geraden schneidet, schneidet dasselbe noch in einer zweiten Geraden, und beide Geraden gehören, nothwendiger Weise, verschiedenen Schaaren an."*)

VIII.

Durch irgend drei im Raume gegebene Gerade A, B, C, welche nicht mit einer Ebene parallel sind, ist demnach allemal ein einfaches Hyperboloïd bestimmt, d. h., es giebt allemal eine und nur eine solche Fläche, in welcher die drei Geraden liegen. Der Mittelpunct dieser Fläche wird, wie sich leicht beweisen läfst, und wie z. B. Hachette im vorhergehenden Bande dieses Journals bewiesen hat, auf folgende Weise gefunden:

1) „Man suche diejenigen drei Geraden A_1, B_1, C_1, welche respective mit den gegebenen Geraden A, B, C parallel sind, und respective die beiden übrigen B und C, A und C, A und B schneiden (IV.), und lege alsdann durch je zwei Parallelen, also durch A und A_1, B und B_1, C und C_1 eine Ebene, so ist der Durchschnittspunct dieser drei Ebenen der gesuchte Mittelpunct."

---

*) Wir fügen hier beiläufig folgende Bemerkungen hinzu:

1. Legt man durch A eine Ebene parallel mit B; durch B eine Ebene parallel mit C; und durch C eine Ebene parallel mit A, und nimmt diese drei Ebenen als Coordinaten-Ebenen an, so ist die Gleichung des genannten Hyperboloïds H:

$$(x-a)(y-b)(z-c) = xyz,$$

welche, wenn $a = 2\alpha$, $b = 2\beta$, $c = 2\gamma$ gesetzt wird, auf die Form

$$(x-\alpha)(y-\beta)(z-\gamma) = (x+\alpha)(y+\beta)(z+\gamma)$$

gebracht werden kann, in welcher Gestalt sie die Gleichung der genannten Fläche ist, wenn ihr Mittelpunct der Anfangspunct der Coordinaten ist, und diese letzteren mit irgend drei Geraden A, B, C, welche in der Fläche liegen und der nemlichen Schaar Geraden angehören, parallel sind. Aus dieser Gleichung leitet man leicht die von Binet gegebene Gleichung ab (Band I. Seite 347. dieses Journals).

2. Wählt man die Axen des Hyperboloids zu Coordinaten-Axen, so ist seine Gleichung bekanntlich:

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y^2 - a^2b^2z^2 = -a^2b^2c^2 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (\alpha.)$$

Bezieht sich folgende Gleichung

$$b^2c^2x^2 - a^2c^2y - a^2b^2z^2 = 0 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (\beta.)$$

auf das nemliche Coordinaten-System, so ist letztere die Gleichung eines Kegels (zweiter Ordnung), welcher mit jener Fläche (α.) einerlei Mittelpunct hat, und ihr Asymptoten-Kegel ist.

Legt man nun eine Ebene so, dafs sie den Kegel (β.) in irgend einer Kante, welche K heifsen mag, berührt, so findet man, dafs diese Ebene allemal die Fläche (α.) in irgend zwei Geraden, z. B. A, A_1, schneidet, welche unter sich und mit der genannten Kante K parallel sind, und dafs letztere in der Mitte zwischen jenen beiden Geraden liegt. Folglich ist jede Gerade, welche sich in der Fläche (α.) befindet, mit irgend einer Kante des Kegels (β.) parallel, und umgekehrt. Demnach folgen nachstehende Sätze:

Oder man erhält daher diesen Mittelpunct am einfachsten, wie folgt:

2) „Durch eine der drei gegebenen Geraden, z. B. durch A, lege man eine Ebene parallel mit B, welche die C in irgend einem Punct c schneiden wird; und ferner lege man durch A eine Ebene parallel mit C, welche die B in irgend einem Punct b schneiden wird, so ist alsdann die Mitte M derjenigen Geraden bc, welche die beiden genannten Puncte verbindet, der verlangte Mittelpunct."

IX.

Nach diesen vorläufigen Betrachtungen wollen wir uns nun zu der obigen Aufgabe (I.) wenden. Sie verlangt nemlich:

„Diejenige Gerade in aller Strenge zu construiren, welche vier gegebene Geraden, von denen keine zwei in einer Ebene liegen, zumal schneidet."

Die vier gegebenen Geraden sollen A, B, C, D heifsen.

Werden zunächst nur die drei Geraden A, B, C berücksichtigt, so liegen diese in einem bestimmten einfachen Hyperboloïd (VIII.), welches

---

I. „Alle Geraden, welche in der Fläche eines einfachen Hyperboloïd's liegen, sind mit den Kanten eines bestimmten Kegels zweiter Ordnung parallel, d. h., zieht man durch einen beliebigen Punct P, mit jeder Geraden, welche in der Fläche eines gegebenen einfachen Hyperboloïds liegt, eine Parallele, so liegen alle diese Parallelen zusammen in einer bestimmten Kegelfläche zweiter Ordnung." Oder

II. „Sind im Raume irgend drei Gerade A, B, C gegeben, und eine vierte Gerade A_1, welche dieselben schneidet, bewegt sich auf alle mögliche Weise, ohne jedoch einen Augenblick aufzuhören, jene drei zu schneiden, so ist sie stets mit irgend einer Kante eines bestimmten Kegels parallel; oder bewegt sich eine andere Gerade a_1, welche fortwährend durch irgend einen fixen Punct P geht, so, dafs sie stets mit der Geraden A_1 parallel ist, so beschreibt sie eine bestimmte Kegelfläche zweiter Ordnung, welche den Punct P zum Mittelpunct (Scheitel) hat."

III. „Sind im Raume irgend zwei Gerade A, B, nebst einem beliebigen Kegel P zweiter Ordnung gegeben, so liegen alle mögliche Gerade A_1, B_1, C_1, ..., von denen jede jene beiden Geraden schneidet, und mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, zusammen in einem bestimmten einfachen Hyperboloïd; oder bewegt sich eine Gerade A_1 so, dafs sie stets mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, und fortwährend die beiden Geraden A, B schneidet, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd."

IV. „Sind irgend zwei Kegelschnitte A, B, welche in irgend einer Fläche zweiter Ordnung liegen, nebst einem beliebigen Kegel P derselben Ordnung gegeben, und bewegt sich eine Gerade A_1 so, dafs sie stets mit irgend einer Kante des Kegels P parallel ist, und fortwährend durch die Peripherien der beiden Kegelschnitte A, B geht, so beschreibt sie ein einfaches Hyperboloïd."

Ist der genannte Kegel ein gerader Kegel, so ist das Hyperboloïd dasjenige, welches durch Umdrehung erzeugt werden kann; und tritt an die Stelle des Kegels eine oder zwei Ebenen, so wird das genannte einfache Hyperboloïd, durch das hyperbolische Paraboloïd vertreten.

H heifsen mag, und es giebt eine Schaar von Geraden A_1, B_1, C_1, D_1.... von welchen jede jene drei Geraden schneidet und in der Fläche H liegt (VI.). Die gesuchte Gerade befindet sich daher nothwendiger Weise unter dieser Schaar, nemlich es ist diejenige, welche durch einen derjenigen Puncte geht, in welchen die vierte gegebene Gerade D das Hyperboloïd H schneidet. Kennt man demnach einen solchen Durchschnittspunct, so ist auch die gesuchte Gerade als gefunden zu betrachten, weil durch irgend einen Punct der Fläche H nur eine einzige, zu der Schaar A_1, B_1, C_1, D_1.... gehörige Gerade möglich ist. Daher giebt es so viele Geraden, welche der Aufgabe Genüge leisten, als es Puncte giebt, in welchen die Gerade D und das Hyperboloïd H einander schneiden, mithin im Allgemeinen zwei.

X.

Die Durchschnittspuncte der Geraden D und der Fläche H, und hernach die gesuchte Gerade, findet man nunmehr auf folgende Weise:

1) Man suche, nach (VIII.), den Mittelpunct des genannten Hyperboloïds H, in welchem nemlich die drei Geraden A, B, C liegen; er heifse M (Fig. 2.).

2) Durch die Gerade A lege man eine Ebene E parallel mit D, welche die Geraden B, C in irgend zwei Puncten b, c, und das Hyperboloïd in den beiden Geraden A und bc schneiden wird (VII.). Der Durchschnittspunct der beiden Geraden A, bc heifse a.

3) Durch die Gerade D lege man eine Ebene E_1 parallel mit A, welche nemlich die Ebene der Figur ist, so sind die zwei Ebenen E, E_1 mit einander parallel (II. 3.), sie schneiden folglich das Hyperboloïd H in ähnlichen, und ähnlich liegenden Kegelschnitten, deren Mittelpuncte a, m mit dem Mittelpunct M dieser Fläche in einer Geraden liegen. Nun ist der Schnitt der Ebene E die beiden Geraden A, bc, welche als eine Hyperbel anzusehen sind, deren Mittelpunct a ist. Daher wird auch der Schnitt der anderen Ebene E_1 eine Hyperbel h sein, deren Asymptoten md, md_1 mit den Geraden A, bc parallel sind, und deren Mittelpunct m mit den Puncten a, M in einer Geraden liegt.

4) Legt man daher durch den Punct M zwei Ebenen, die eine durch die Gerade A, und die andere durch die Gerade bc, so schneiden dieselben die Ebene E_1 in den Asymptoten md, md_1 der genannten Hyper-

bel h. Sind ferner b_1, c_1 die Durchschnittspuncte der Ebene E_1 und der Geraden B, C, so liegen dieselben nothwendiger Weise in der Peripherie der genannten Hyperbel h. Demnach kennt man die Asymptoten md, md_1 und zwei Puncte b_1, c_1 der genannten Hyperbel h, und es ist nunmehr darum zu thun, diejenigen beiden Puncte α, β zu finden, in welchen dieselbe von der Geraden D geschnitten wird.

5) Zieht man zu diesem Endzweck, z. B. durch den Punct b_1 die Gerade pq parallel mit D, d. i., mit dd_1, so ist nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel:

$$pb_1 . qb_1 = d\alpha . \alpha d_1 = d\beta . \beta d_1.$$

Um hiernach die gesuchten Puncte α, β zu finden: beschreibe man um dd_1, als Durchmesser, den Kreis μ, d. i., $dp_1q_1d_1$, trage in diesen die Sehne $p_1q_1 = pq$, und nehme $p_1b_2 = pb_1$, so ist, vermöge der Potenz des Kreises, $p_1b_2 . q_1b_2 = \delta b_2 . b_2\delta_1$. Man nehme daher ferner:

$$\mu\alpha = \mu\beta = \mu b_2,$$

so sind α, β die beiden gesuchten Puncte, in welchen die Gerade D die Hyperbel h, und folglich auch die beiden Puncte, in welchen dieselbe das Hyperboloïd H schneidet.

6) Legt man nun endlich durch jeden der beiden Puncte α, β eine Gerade A_1, B_1, welche z. B. die beiden Geraden A, B schneidet (III.), so wird jede derselben nothwendiger Weise auch die Gerade C schneiden, und somit der vorgelegten Aufgabe Genüge thun.

Wäre die Gerade dd_1 kleiner als pq, so müſste man in (5.) um den Durchmesser pq, anstatt dd_1, einen Kreis beschreiben, und alsdann fände man durch eine ähnliche Construction die beiden gesuchten Puncte α, β.