

Über trigonometrische und harmonische Polynome.

Von

GABRIEL SZEGÖ in Budapest.

Es sei $f(\theta)$ für $0 \leq \theta \leq 2\pi$ nichtnegativ und im Lebesgueschen Sinne integrierbar, ferner

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta > 0.$$

Ich betrachte das System

$$\sqrt{f(\theta)}, \sqrt{f(\theta)}z, \dots, \sqrt{f(\theta)}z^n, \dots^*) \quad (z = e^{i\theta})$$

und bilde daraus nach E. Schmidt durch Orthogonalisierung ein ganz bestimmtes System

$$\sqrt{f(\theta)}\Phi_0(z), \sqrt{f(\theta)}\Phi_1(z), \dots, \sqrt{f(\theta)}\Phi_n(z), \dots \quad (z = e^{i\theta})$$

mit folgenden Eigenschaften:

- a) $\Phi_n(z)$ ist ein Polynom n^{ten} Grades von z .
- b) Der Koeffizient von z^n in $\Phi_n(z)$ ist positiv.

$$c) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \Phi_m(z) \overline{\Phi_n(z)} d\theta = \varepsilon_{mn}^{**}) \quad (z = e^{i\theta}; m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ist z. B. $f(\theta) = 1$, so ist $\Phi_n(z) = z^n$.

Die Polynome $\Phi_n(z)$ hängen sehr eng mit der zu $f(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formenschar***) zusammen und besitzen mehrere inter-

*) Im folgenden sind alle Quadratwurzeln positiv (nichtnegativ) zu nehmen.

**) \bar{x} bedeutet die zu x konjugiert komplexe Größe; $\varepsilon_{mn} = 0$ oder 1, je nachdem $m \neq n$ oder $m = n$ ist.

***) O. Toeplitz: a) Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen von unendlich vielen Veränderlichen [Nachrichten der Kgl. Ges. der Wiss. zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1907, S. 110—116]; b) Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen [ebenda, 1910, S. 489—506]; c) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. I. Teil: Theorie der L -Formen [Math. Ann., Bd. 70, 1910, S. 351—376]; d) Über die Fouriersche Entwicklung positiver Funktionen [Rend. del Circ. Mat. di Palermo 32, 2. Semester 1911, S. 191—192].

essante Eigenschaften. Sie stehen zu den Toeplitzschen Formen in ähnlicher Beziehung, wie die von Heine betrachteten und in der Theorie der Stieltjesschen Kettenbrüche vorkommenden Polynome*) zu den Hankelschen Formen**).

Eine allgemeine Behandlung dieser Polynome will ich anderswo auseinandersetzen. Ich beschränke mich hier nur auf den Spezialfall

$$(1) \quad f(\theta) = p(\theta, r) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2} = \frac{1-r^2}{|z-r|^2} \quad (z = e^{i\theta}; 0 < r < 1),$$

in welchem sie direkt und in einfacher Form aufzuschreiben sind. Mit Hilfe dieser Formeln gebe ich dann die Lösung zweier Extremumaufgaben über trigonometrische Polynome, die im Falle $r = 0$ von Herrn L. Fejér behandelt worden sind.***) Hieraus ergeben sich mehrere Ungleichungen über harmonische Polynome.

1. Es sei r eine feste Zahl, für welche $0 < r < 1$ ist und

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$$

bezeichne das eindeutig bestimmte System von Polynomen mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi_n(z)$ ist ein Polynom n^{ten} Grades von z .

b) Der Koeffizient von z^n in $\varphi_n(z)$ ist positiv.

$$c) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi_m(z) \overline{\varphi_n(z)} d\theta = \varepsilon_{mn} \quad (z = e^{i\theta}; m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ich behaupte, daß

$$(\varphi) \quad \varphi_0(z) = 1, \quad \varphi_n(z) = \frac{z^{n-1}(z-r)}{\sqrt{1-r^2}} \quad (n \geq 1)$$

ist. In der Tat, die Bedingungen a) und b) sind zunächst erfüllt. Ferner

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) z^n d\theta = r^{1/n} \quad (z = e^{i\theta}; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

also

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) |\varphi_0(z)|^2 d\theta = 1,$$

*) O. Perron: Die Lehre von den Kettenbrüchen 1913, S. 375—383.

**) Ich bezeichne als Hankelsche Formen diejenigen quadratischen Formen, deren Determinante eine Hankelsche ist.

***) L. Fejér: Über trigonometrische Polynome [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, 1916, S. 53—82].

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \overline{\varphi_0(z)} \varphi_n(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \frac{z^n - rz^{n-1}}{\sqrt{1-r^2}} d\theta = 0$$

und
$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \overline{\varphi_m(z)} \varphi_n(z) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{n-m} d\theta = \varepsilon_{mn}$$

$$(z = e^{i\theta}; m, n = 1, 2, 3, \dots).$$

Hieraus folgt die Behauptung.

Aus (φ) ergeben sich unmittelbar die Umkehrungsformeln:

$$(\varphi^{-1}) \quad 1 = \varphi_0(z), \quad z^n = r^n \varphi_0(z) + \sqrt{1-r^2} [r^{n-1} \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z)] \quad (n \geq 1).$$

2. Bevor ich weitergehe, führe ich hier einen Fejérschen Satz an*), der in der Folge eine besonders wichtige Rolle spielen wird. Das ist:

Die Gesamtheit der Funktionen von der Form

$$x_0 + x_1 z + \dots + x_n z^n \quad (z = e^{i\theta}),$$

wo x_0, x_1, \dots, x_n beliebige komplexe (reelle) Konstanten bezeichnen, stimmt mit der Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen (Kosinus-)Polynome n^{ter} Ordnung überein.

Aus (φ) und (φ^{-1}) folgt nun unmittelbar der Satz:

Die Gesamtheit der Funktionen von der Form

$$(2) \quad |x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \dots + x_n \varphi_n(z)|^2 \quad (z = e^{i\theta}),$$

wo x_0, x_1, \dots, x_n beliebige komplexe (reelle) Konstanten bezeichnen, stimmt mit der Gesamtheit der nichtnegativen trigonometrischen (Kosinus-)Polynome n^{ter} Ordnung überein.

Dieser Satz wird als Ausgangspunkt unserer Beweisführungen dienen.

3. Herr Fejér hat in seiner oben zitierten Arbeit folgendes Theorem bewiesen**):

Es sei $\varphi(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung mit dem absoluten Gliede 1, d. h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 1.$$

Dann ist
$$\varphi(\theta) \leq n + 1 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

*) A. a. O. S. 62—64. Wie Herr Fejér dort bemerkt, rührt der erste Beweis des Satzes von Herrn F. Riesz her.

**) A. a. O. S. 64—66.

und das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{n+1} |1 + z + \dots + z^n|^2 \quad [z = e^{i(\theta - \theta_0)}]$$

und $\theta = \theta_0$ ist*) (θ_0 ist beliebig).

Ich beweise hier den folgenden Satz:

Es sei $0 < r < 1$ und $\varphi(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung, für welches

$$(3) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) d\theta = 1 \quad \text{ist. Dann ist}$$

$$(4) \quad p(\theta, r) \varphi(\theta) \leq n + \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

und das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$(5) \quad \varphi(\theta) = \frac{1+r}{n+1-r(n-1)} \left| 1 + \frac{z-r}{1+r} \frac{z^n-1}{z-1} \right|^2 \quad (z = e^{i\theta})$$

und $\theta = 0$ ist.

Für $\lim r = 0$ reduziert sich die Ungleichung (4) auf die Fejérsche und das trigonometrische Polynom (5) auf

$$\frac{1}{n+1} |1 + z + \dots + z^n|^2 \quad (z = e^{i\theta}).$$

Beweis: Es sei $n \geq 1$. (Für $n = 0$ ist der Satz trivial.) Ich setze nach (2)

$$\varphi(\theta) = |x_0 \varphi_0(z) + x_1 \varphi_1(z) + \dots + x_n \varphi_n(z)|^2 \quad (z = e^{i\theta}),$$

wo x_0, x_1, \dots, x_n beliebige komplexe Konstanten bezeichnen. Die Bedingung (3) ist dann vollständig gleichbedeutend mit der folgenden:

$$(3') \quad |x_0|^2 + |x_1|^2 + \dots + |x_n|^2 = 1.$$

Man hat nun nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\varphi(\theta) \leq |\varphi_0(z)|^2 + |\varphi_1(z)|^2 + \dots + |\varphi_n(z)|^2 \quad (z = e^{i\theta}).$$

Es ist aber
$$p(\theta, r) |\varphi_0(z)|^2 = p(\theta, r) \leq \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

und
$$p(\theta, r) |\varphi_n(z)|^2 = 1 \quad (z = e^{i\theta}; 0 \leq \theta \leq 2\pi; n \geq 1),$$

also
$$p(\theta, r) \varphi(\theta) \leq n + \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad \text{q. e. d.}$$

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so muß zunächst $\theta = 0$ sein, da sonst

$$p(\theta, r) < \frac{1+r}{1-r}$$

ist. Es ist aber

$$p(0, r) = \frac{1+r}{1-r}$$

*) D. h. $\theta \equiv \theta_0 \pmod{2\pi}$.

und
$$\varphi(0) = \left| x_0 + \sqrt{\frac{1-r}{1+r}} (x_1 + \dots + x_n) \right|^2,$$

also
$$\left| x_0 \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} + x_1 + \dots + x_n \right|^2 = n + \frac{1+r}{1-r},$$

während die Bedingung (3') erfüllt ist. Daraus folgt

$$x_0 = \lambda \sqrt{\frac{1+r}{1-r}}, \quad x_z = \lambda \quad (z = 1, 2, \dots, n),$$

wo
$$|\lambda|^2 \left(n + \frac{1+r}{1-r} \right) = 1$$

ist; also
$$\varphi(\theta) = \frac{1}{n + \frac{1+r}{1-r}} \left| \sqrt{\frac{1+r}{1-r}} \varphi_0(z) + \varphi_1(z) + \dots + \varphi_n(z) \right|^2$$

$$= \frac{1+r}{n+1-r(n-1)} \left| 1 + \frac{z-r}{1+r} \frac{z^n-1}{z-1} \right|^2 \quad (z = e^{i\theta}).$$

4. Ich benutze dieses Theorem, um einen Satz über harmonische Polynome zu beweisen.

Es sei $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung. Es sei ferner

$$\text{Max. } \varphi(\theta, r) = M(r) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

$$\text{Min. } \varphi(\theta, r) = m(r) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

und
$$M(r) - m(r) = \Omega(r). \quad \text{Dann ist für } 0 < r < 1$$

$$(6) \quad M(r) \leq M(1) - \frac{1-r}{1+r} \frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}}, \quad \text{und}$$

$$(7) \quad m(r) \geq m(1) + \frac{1-r}{1+r} \frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}};$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ ist

Dieses Theorem gibt eine Verschärfung der für jede harmonische Funktion gültigen Ungleichungen

$$M(r) \leq M(1) \quad \text{bzw.} \quad m(r) \geq m(1).$$

Für $\lim r = 0$ reduziert es sich auf einen Satz von Fejér.*)

Beweis: Es sei $0 < r < 1$. Ich schließe den Fall $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ aus, so daß

$$M(r) < M(1), \quad m(r) > m(1)$$

und
$$\Omega(1) > \Omega(r) > 0 \quad \text{ist. Ich setze dann in (4).}$$

$$\varphi(\theta) = \frac{M(1) - \varphi(\theta + \theta_0, 1)}{M(1) - M(r)},$$

*) A. a. O. S. 69—70.

wo θ_0 das Argument bezeichnet, für welches

$$\varphi(\theta_0, r) = M(r)$$

ist; $\varphi(\theta)$ ist offenbar ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) d\theta = 1,$$

da ja

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) d\theta = 1$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta + \theta_0, 1) d\theta = \varphi(\theta_0, r) = M(r)$$

ist. Also

$$p(\theta, r) \frac{M(1) - \varphi(\theta + \theta_0, 1)}{M(1) - M(r)} \leq n + \frac{1+r}{1-r} \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi).$$

Es sei nun

$$\varphi(\theta_1, 1) = m(1),$$

so ergibt sich

$$p(\theta_1 - \theta_0, r) \frac{\Omega(1)}{M(1) - M(r)} \leq n + \frac{1+r}{1-r},$$

also

$$\frac{1-r}{1+r} \frac{\Omega(1)}{M(1) - M(r)} \leq n + \frac{1+r}{1-r}, \quad \text{woraus}$$

(6)

$$M(r) \leq M(1) - \frac{1-r}{1+r} \frac{\Omega(1)}{n + \frac{1+r}{1-r}} \quad \text{folgt.}$$

Schließen wir, wie gesagt, den Fall $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ aus, so ist in (6) das Gleichheitszeichen niemals gültig. In der Tat, nach Punkt 3 könnte das nur dann eintreten, wenn $\theta_0 = \theta_1$ ist. Nun ist andererseits

$$p(0, r) = \frac{1+r}{1-r} > \frac{1-r}{1+r};$$

so daß in (6) immer das Zeichen $<$ gilt.

Ähnlich beweist man die Ungleichung (7).

Folgerung: Es sei $\varphi(\theta, r)$ ein harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung. Dann ist mit Behaltung der früheren Bezeichnungen

(6')

$$M(r_1) \leq M(r_2) - \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \frac{\Omega(r_2)}{n + \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}} \quad \text{und}$$

(7')

$$m(r_1) \geq m(r_2) + \frac{r_2 - r_1}{r_2 + r_1} \frac{\Omega(r_2)}{n + \frac{r_2 + r_1}{r_2 - r_1}} \quad (0 < r_1 < r_2);$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn $\varphi(\theta, r) = \text{const.}$ ist.

5. Herr Fejér hat ebenfalls in seiner früher zitierten Arbeit folgenden Satz bewiesen*):

Es sei $\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives Kosinuspolynom n^{ter} Ordnung ($n \geq 1$) mit dem absoluten Gliede 1, d. h.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta = 1.$$

Dann ist

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta \leq \frac{1}{2};$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta) = 1 \pm \cos n\theta \quad \text{ist.}$$

Ich beweise hier das folgende Theorem.

Es sei $0 < r < 1$ und $\varphi(\theta)$ ein beliebiges nichtnegatives Kosinuspolynom n^{ter} Ordnung ($n \geq 1$), für welches

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) d\theta = 1 \quad \text{ist. Dann ist}$$

$$(9) \quad -\frac{1-r^n}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta \leq \frac{1+r^n}{2};$$

das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi(\theta) = \frac{1 + \cos n\theta}{1 + r^n} \quad \text{bzw.} \quad \varphi(\theta) = \frac{1 - \cos n\theta}{1 - r^n} \quad \text{ist.}$$

Beweis: Ich setze nach (2)

$$\varphi(\theta) = |\alpha_0 \varphi_0(z) + \alpha_1 \varphi_1(z) + \cdots + \alpha_n \varphi_n(z)|^2 \quad (z = e^{i\theta}),$$

wo $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ beliebige reelle Konstanten bezeichnen. Die Bedingung (8) ist dann mit der folgenden gleichbedeutend:

$$(8') \quad \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 = 1.$$

Es gelten nun die Formeln

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) |\varphi_0(z)|^2 z^n d\theta = r^n,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) |\varphi_\lambda(z)|^2 z^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \frac{|z-r|^2}{1-r^2} z^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^n d\theta = 0,$$

*) A. a. O. S. 72.

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi_x(z) \overline{\varphi_{x'}(z)} z^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z^{x-x'+n} d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi_x(z) \overline{\varphi_0(z)} z^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \frac{z^{n+x} - r z^{n+x-1}}{\sqrt{1-r^2}} d\theta = 0,$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \overline{\varphi_x(z)} \varphi_0(z) z^n d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \frac{z^{n-x} - r z^{n-x+1}}{\sqrt{1-r^2}} d\theta = r^{n-x} \sqrt{1-r^2}$$

$$(z = e^{i\theta}; x, x' = 1, 2, \dots, n; n \geq 1).$$

Man hat also

$$(10) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) z^n d\theta \\ = r^n \alpha_0^2 + \sum_{x=1}^n r^{n-x} \sqrt{1-r^2} \alpha_0 \alpha_x \quad (z = e^{i\theta}).$$

Meine Aufgabe ist nun, das Maximum und Minimum dieser quadratischen Form zu bestimmen, während die Veränderlichen der Bedingung

$$\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2 = 1$$

unterworfen sind. Zu diesem Zwecke bestimme ich die Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$L_n(-\mu) = L_n(x) = \begin{vmatrix} r^n + x & p r^{n-1} & p r^{n-2} & \dots & p \\ p r^{n-1} & x & 0 & \dots & 0 \\ p r^{n-2} & 0 & x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix},$$

wo

$$\mu = -x, \quad p = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2}$$

ist. Ich bezeichne die Determinanten, die $L_n(x)$ durch Weglassen der letzten, der zwei letzten usw. Reihen und Kolonnen entstammen, bzw. mit $L_n^{(1)}(x)$, $L_n^{(2)}(x)$, usw. Dann ist

$$L_n(x) = L_n^{(0)}(x) = x L_n^{(1)}(x) - p^2 x^{n-1} \\ \dots \dots \dots L_n^{(x-1)}(x) = x L_n^{(x)}(x) - p^2 r^{2x-2} x^{n-x} \\ \dots \dots \dots L_n^{(n-1)}(x) = x L_n^{(n)}(x) - p^2 r^{2n-2}$$

und

$$L_n^{(n)}(x) = r^n + x.$$

Ich addiere nun diese Gleichungen, nachdem ich die x^{te} mit x^{x-1} multipliziert habe ($x=1, 2, \dots, n$). So ergibt sich

$$\begin{aligned} L_n(-\mu) &= L_n(x) = x^{n-1} \left[x(r^n + x) - \frac{1 - r^{2n}}{4} \right] \\ &= x^{n-1} \left[\left(x + \frac{r^n}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right] \\ &= (-\mu)^{n-1} \left(\frac{1 + r^n}{2} - \mu \right) \left(\frac{r^n - 1}{2} - \mu \right). \end{aligned}$$

Sind also die Eigenwerte der Form (10)

$$\mu_0^{(n)} \leq \mu_1^{(n)} \leq \dots \leq \mu_n^{(n)},$$

so ist

$$\mu_0^{(n)} = -\frac{1-r^n}{2}, \quad \mu_n^{(n)} = \frac{1+r^n}{2}$$

und für $n \geq 2$

$$\mu_1^{(n)} = \mu_2^{(n)} = \dots = \mu_{n-1}^{(n)} = 0.$$

Daraus folgt die Ungleichung (9).

Die obere Grenze $\mu_n^{(n)}$ wird für ein Wertsystem $\alpha_x = \alpha_{x_n}$ ($x = 0, 1, \dots, n$) erreicht, definiert durch die Gleichungen

[illegible]

Daraus folgt

$$\alpha_{zn} = \frac{pr^{n-z}}{\mu_n^{(n)}} \alpha_{0n} \quad (z=1, 2, \dots, n)$$

und

$$\frac{1}{\alpha_{0n}^2} = 1 + \frac{p^2}{\mu_n^{(n)2}} \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2} = \frac{2}{1 + r^n},$$

d. h.

$$\alpha_{0n}^2 = \frac{1+r^n}{2}.$$

Also

$$\begin{aligned}\varphi(\theta) &= |\alpha_0 \varphi_0(z) + \alpha_1 \varphi_1(z) + \dots + \alpha_n \varphi_n(z)|^2 \\ &= \frac{1+r^2}{2} \left| 1 + \sum_{x=1}^n \frac{p r^{n-x}}{\mu_n^{(n)}} \frac{z^{x-1}(z-r)}{\sqrt{1-r^2}} \right|^2 \\ &= \frac{|1+z^n|^2}{2(1+r^n)} = \frac{1+\cos n\theta}{1+r^n} \quad (z=e^{i\theta}).\end{aligned}$$

Ganz analog ergibt sich, daß die untere Grenze $\mu_0^{(n)}$ nur dann erreicht wird, wenn $\alpha_x = \alpha'_{x_n}$ ($x = 0, 1, \dots, n$) ist, wo

$$\alpha_{x,n}' = \frac{pr^{n-x}}{u_0(x)} \alpha_{0,n} \quad \text{und} \quad \alpha_{0,n}' = \frac{1-r^n}{2}$$

ist, woraus

$$\varphi(\theta) = \frac{1 - \cos n\theta}{1 - r^n}$$

folgt. Damit ist unser Satz völlig bewiesen.

6. Ich wende diese Betrachtungen auf harmonische Polynome an.

Es sei $n \geq 1$, $0 < r < 1$,

$$\varphi(\theta) = t_0 + 2 \sum_{z=1}^n t_z \cos z\theta \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) d\theta = t_0 + 2 \sum_{z=1}^n t_z r^z = 1.$$

Man hat für alle $z = 1, 2, \dots, n$

$$\cos n\theta \cos z\theta = \frac{1}{2} [\cos (n+z)\theta + \cos (n-z)\theta],$$

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) \cos n\theta d\theta &= t_0 r^n + \sum_{z=1}^n t_z (r^{n+z} + r^{n-z}) \\ &= \frac{r^n}{2} \left(t_0 + 2 \sum_{z=1}^n t_z r^z \right) + \frac{r^n}{2} \left(t_0 + 2 \sum_{z=1}^n \frac{t_z}{r^z} \right) \\ &= \frac{r^n}{2} + \frac{r^n}{2} \left(t_0 + 2 \sum_{z=1}^n \frac{t_z}{r^z} \right). \end{aligned}$$

So ist die Ungleichung (9) mit der folgenden gleichbedeutend:

$$-\frac{1}{2} \leq \frac{r^n}{2} \left(t_0 + 2 \sum_{z=1}^n \frac{t_z}{r^z} \right) \leq \frac{1}{2},$$

d. h.

$$\left| t_0 + 2 \sum_{z=1}^n \frac{t_z}{r^z} \right| \leq \frac{1}{r^n};$$

das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi(\theta) = \frac{1 \pm \cos n\theta}{1 \pm r^n},$$

d. h. wenn

$$t_0 = \frac{1}{1 \pm r^n}, \quad t_n = \frac{\pm \frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$

und für $n \geq 2$

$$t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 0$$

ist.

Ich kann hiermit dem Satze (9) folgende Fassung geben:

Es sei $0 < r < 1$, $n \geq 1$,

$$\varphi(\theta) = t_0 + 2 \sum_{x=1}^n t_x \cos x\theta \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

ferner

$$(8) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta) d\theta = t_0 + 2 \sum_{x=1}^n t_x r^x = 1. \quad \text{Dann ist}$$

$$(11) \quad \left| t_0 + 2 \sum_{x=1}^n \frac{t_x}{r^x} \right| \leq \frac{1}{r^n}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$t_0 = \frac{1}{1 \pm r^n}, \quad t_n = \frac{\pm \frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$

und für $n \geq 2$

$$t_1 = t_2 = \dots = t_{n-1} = 0$$

ist.

7. Ich beweise jetzt folgendes Theorem:

Es sei $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, das für $r \leq 1$ nichtnegativ ist. Dann gilt die Ungleichung

$$(12) \quad \left| \varphi\left(\theta, \frac{1}{r}\right) \right| \leq \frac{\varphi(\theta, r)}{r^n} \quad (0 < r < 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, r) = \alpha [1 + r^n \cos n(\theta - \beta)]$$

und $\theta = \beta + \frac{x\pi}{n}$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) ist. Hier bezeichnen α und β beliebige reelle Konstanten ($\alpha \geq 0$).*)

In der Tat, sei x ein fester Wert von θ und $0 < r < 1$. Ich setze voraus, daß $\varphi(\theta, r)$ nicht identisch verschwindet; dann ist $\varphi(x, r) > 0$. Ich setze in dem eben bewiesenen Satze

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2} \frac{\varphi(x + \theta, 1) + \varphi(x - \theta, 1)}{\varphi(x, r)} = t_0(x) + 2 \sum_{x=1}^n t_x(x) \cos x\theta.$$

Das ist ein nichtnegatives Kosinuspolynom in θ , welches der Bedingung (8) genügt, da ja die Formel gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(x + \theta, 1) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(x - \theta, 1) d\theta = \varphi(x, r).$$

*) Ist $\alpha = 0$, so findet natürlich für alle θ Gleichheit statt.

Ich setze $\varphi(\theta, r) = a_0 + 2 \sum_{x=1}^n r^x (a_x \cos x\theta + b_x \sin x\theta),$

dann ist

$$\varphi(x + \theta, 1) = a_0 + 2 \sum_{x=1}^n [(a_x \cos xx + b_x \sin xx) \cos x\theta + (b_x \cos xx - a_x \sin xx) \sin x\theta]$$

und so $t_0(x) = \frac{a_0}{\varphi(x, r)}, \quad t_x(x) = \frac{a_x \cos xx + b_x \sin xx}{\varphi(x, r)} \quad (x = 1, 2, \dots; n).$

Ferner

$$\begin{aligned} t_0(x) + 2 \sum_{x=1}^n \frac{t_x(x)}{r^x} &= \frac{1}{\varphi(x, r)} \left[a_0 + 2 \sum_{x=1}^n \frac{1}{r^x} (a_x \cos xx + b_x \sin xx) \right] \\ &= \frac{\varphi\left(x, \frac{1}{r}\right)}{\varphi(x, r)}, \end{aligned}$$

also nach (11)

$$\left| \varphi\left(x, \frac{1}{r}\right) \right| \leq \frac{\varphi(x, r)}{r^n}, \quad \text{q. e. d.}$$

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so ist

$$t_0(x) = \frac{a_0}{\varphi(x, r)} = \frac{1}{1 \pm r^n}, \quad t_n(x) = \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{\varphi(x, r)} = \frac{\pm \frac{1}{2}}{1 \pm r^n}$$

und für $n \geq 2$

$$t_x(x) \varphi(x, r) = a_x \cos xx + b_x \sin xx = 0 \quad (x = 1, 2, \dots, n-1)$$

D. h. für $n = 1$

$$\varphi(x + \theta, 1) = \alpha(1 \pm \cos \theta) \quad \text{und für } n \geq 2$$

$$\varphi(x + \theta, 1) = \alpha \left(1 \pm \cos n\theta + \sum_{x=1}^{n-1} u_x \sin x\theta \right),$$

wo $\alpha \geq 0$ und die u_x gewisse reelle Zahlen bezeichnen.

Aus der Ungleichung

$$1 \pm \cos n\theta + \sum_{x=1}^{n-1} u_x \sin x\theta \geq 0 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

folgt aber offenbar $\left| \sum_{x=1}^{n-1} u_x \sin x\theta \right| \leq 1 \pm \cos n\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$

so daß das Sinuspolynom $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung auf der linken Seite, für alle Nullstellen von $1 \pm \cos n\theta$, die sämtlich zweifach sind, ebenfalls verschwindet, und zwar wenigstens von der zweiten Ordnung. (Das ist geometrisch klar.) Es verschwindet also identisch, d. h.

$$\varphi(x + \theta, 1) = \alpha(1 \pm \cos n\theta)$$

und so $\varphi(\theta, r) = \alpha[1 \pm r^n \cos n(\theta - x)]$.

Daraus ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß $\cos n(\theta - x) = \pm 1$ und so $\theta = x + \frac{x\pi}{n}$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) ist.

Folgerung: Es sei $\varrho > 0$ eine feste Zahl und $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, das für $r \leq \varrho$ nichtnegativ ist. Dann gilt die Ungleichung

$$(12') \quad \left| \varphi\left(\theta; \frac{\varrho}{r}\right) \right| \leq \varphi(\theta, r) \left(\frac{\varrho}{r}\right)^n \quad (0 < r < \varrho; 0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, r) = \alpha \left[1 + \frac{\varrho^n}{r^n} \cos n(\theta - \beta) \right]$$

und $\theta = \beta + \frac{x\pi}{n}$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) ist. Hier sind α und β beliebige reelle Konstanten ($\alpha \geq 0$).*)

8. Aus (12) folgt weiter der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein beliebiges harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung und

$$|\varphi(\theta, r)| \leq 1 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi; r \leq 1),$$

so ist

$$(13) \quad |\varphi(\theta, R)| \leq R^n \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi; R > 1).$$

Das Gleichheitszeichen tritt hier dann und nur dann ein, wenn

$$\varphi(\theta, r) = r^n \cos n(\theta - \beta)$$

und $\theta = \beta + \frac{x\pi}{n}$ ($x = 0, 1, 2, \dots$) ist (β ist beliebig).

In der Tat, für $0 \leq \theta \leq 2\pi$ und $r \leq 1$

$$\frac{1 + \varphi(\theta, r)}{2} \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{1 - \varphi(\theta, r)}{2} \geq 0,$$

$$\text{also nach (12)} \quad |\varphi(\theta, R)| = \left| \frac{1 + \varphi(\theta, R)}{2} - \frac{1 - \varphi(\theta, R)}{2} \right|$$

$$\leq \left| \frac{1 + \varphi(\theta, R)}{2} \right| + \left| \frac{1 - \varphi(\theta, R)}{2} \right|$$

$$\leq R^n \frac{1 + \varphi\left(\theta, \frac{1}{R}\right)}{2} + R^n \frac{1 - \varphi\left(\theta, \frac{1}{R}\right)}{2} = R^n, \quad \text{q. e. d.}$$

Ist hier das Gleichheitszeichen gültig, so muß zunächst

$$\frac{1 + \varphi(\theta, r)}{2} = \alpha \left[1 + r^n \cos n(\theta - \beta) \right] \quad (\alpha \geq 0)$$

*) Man vgl. Fußnote *) S. 11.

sein; also

$$\varphi(\theta, r) = a + br^n \cos n(\theta - \beta),$$

wo $b \geq 0$ und $|a| + b \leq 1$. Es ist ferner $\theta = \beta + \frac{2\pi}{n}$, d. h.

$$|a + (-1)^n b R^n| = R^n.$$

Daraus folgt $a = 0$, $b = 1$ und so

$$\varphi(\theta, r) = r^n \cos n(\theta - \beta).$$

Aus (13) ergibt sich der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein harmonisches Polynom, das nicht identisch verschwindet und

$$V(r) = \text{Max. } |\varphi(\theta, r)| \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

so ist

$$(14) \quad \frac{V(r_2)}{V(r_1)} \leq \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^n \quad (0 < r_1 < r_2)$$

und das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta, r) = ar^n \cos n(\theta - \beta)$$

gültig ($a \neq 0$ und β sind beliebig).

Diese Ungleichung sagt eigentlich gar nichts anderes aus, als daß

$$\frac{V(r)}{r^n}$$

mit wachsendem r nicht zunimmt. Der analoge Satz für Polynome ist fast unmittelbar klar. In der Tat, wenn $P(z)$ ein Polynom n^{ten} Grades der komplexen Veränderlichen z bezeichnet, so ist für $r > 0$

$$\frac{1}{r^n} \text{Max.}_{|z|=r} |P(z)| = \text{Max.}_{|z|=r} \left| \frac{P(z)}{z^n} \right| = \text{Max.}_{|z|=\frac{1}{r}} \left| z^n P\left(\frac{1}{z}\right) \right|,$$

woraus, da das Polynom $z^n P\left(\frac{1}{z}\right)$ für jedes z regulär ist,

$$\frac{1}{r_1^n} \text{Max.}_{|z|=r_1} |P(z)| \geq \frac{1}{r_2^n} \text{Max.}_{|z|=r_2} |P(z)| \quad (0 < r_1 < r_2)$$

folgt. Gleichheit tritt hier nur für

$$P(z) = cz^n \quad \text{ein.}$$

9. Zum Schluß will ich zeigen, wie der Satz (13) mit dem sog. Bernsteinschen Satz über trigonometrische Polynome zusammenhängt. Der lautet folgendermaßen:

Ist $\varphi(\theta)$ ein trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung und

$$|\varphi(\theta)| \leq 1 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi),$$

so ist

$$|\varphi'(\theta)| \leq n \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi);$$

das Gleichheitszeichen ist hier nur für

$$\varphi(\theta) = \cos n(\theta - \beta) \quad \text{gültig.}$$

Dieser Satz hat eine ziemlich ausgedehnte Literatur.*) Ich beweise hier mit Hilfe von (13), daß

$$|\varphi'(\theta)| < \frac{2e}{\pi} n \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad \text{ist.}$$

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist das klar. Es sei also $n \geq 2$. Ich setze für $r \leq 1$

$$\varphi(\theta, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta - \alpha, r) \varphi(\alpha) d\alpha.$$

Das ist ein harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, für welches

$$|\varphi(\theta, r)| \leq 1 \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi; r \leq 1)$$

ist. Es gilt ferner für $0 < r < 1$ die Gleichung

$$\varphi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta - \alpha, r) \varphi\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) d\alpha,$$

also

$$\varphi'(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p'(\theta - \alpha, r) \varphi\left(\alpha, \frac{1}{r}\right) d\alpha,$$

wenn ich kurz

$$\frac{\partial p(\theta, r)}{\partial \theta} = p'(\theta, r)$$

schreibe. Hieraus folgt nach (13)

$$|\varphi'(\theta)| \leq \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |p'(\theta - \alpha, r)| d\alpha = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |p'(\alpha, r)| d\alpha$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} \frac{2r(1-r^2)|\sin \alpha|}{(1-2r\cos \alpha + r^2)^2} d\alpha = \frac{2(1-r^2)}{\pi r^{n-1}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{(1-2rx + r^2)^2} = \frac{4}{\pi r^{n-1}(1-r^2)}$$

also

$$|\varphi'(\theta)| \leq \frac{4}{\pi r^{n-1}(1-r^2)}.$$

Nun ist hier r , abgesehen von der Einschränkung $0 < r < 1$, ganz beliebig; ich bekomme die beste Abschätzung, wenn ich

$$r = \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$$

*) S. Bernstein: Sur l'ordre de la meilleurs approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné [Mémoire couronné par la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique, 1912, S. 19–20]; M. Riesz: Formule d'interpolation pour la dérivée d'un polynome trigonométrique [Comptes Rendus, Bd. 158, 1914, S. 1152]; F. Riesz: Sur les polynomes trigonométriques [ebenda, Bd. 158, 1914, S. 1657]; M. Fekete: Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein [Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd. 146, 1916, S. 88–94].

setze. So folgt

$$|\varphi'(\theta)| \leq \frac{2}{\pi} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}}.$$

Es ist aber,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \left(1 + \frac{2}{n-1}\right)^{\frac{n-1}{2}} = e$$

und, wie eine elementare Rechnung bestätigt

$$\frac{1}{n} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(n-1)^{\frac{n-1}{2}}} < e \quad (n \geq 2),$$

also

$$|\varphi'(\theta)| < \frac{2e}{\pi} n, \quad \text{q. e. d.}$$

Wien, im August 1918.

Bemerkung.

Während der Korrektur dieser Arbeit ist es mir gelungen, die Ungleichungen (6) und (7) bedeutend zu verschärfen. Es gilt der Satz:

Ist $\varphi(\theta, r)$ ein nicht konstantes harmonisches Polynom n^{ter} Ordnung, so ist mit Behaltung der Bezeichnungen in Punkt 4

$$(6) \quad M(r) \leq M(1) - \frac{\Omega(1)}{1 + n \frac{1+r}{1-r}} \quad \text{und}$$

$$(7) \quad m(r) \geq m(1) + \frac{\Omega(1)}{1 + n \frac{1+r}{1-r}};$$

das Gleichheitszeichen ist in (6) bzw. (7) dann und nur dann gültig, wenn

$$\varphi(\theta, 1) = \alpha + \beta \frac{1-r}{n+1+r(n-1)} \left| 1 - \frac{z-r}{1-r} \frac{1-(-z)^n}{1+z} \right|^2 \quad [z = e^{i(\theta - \theta_0)}]$$

ist (α und θ_0 ist hier beliebig, $\beta < 0$ bzw. > 0).

Beweis: Es gilt zunächst der folgende Satz:

Ist $\varphi(\theta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches Polynom n^{ter} Ordnung, welches die Bedingung (3) erfüllt, so ist

$$(1) \quad \varphi(\theta) \leq 1 + n \frac{1+r}{1-r}.$$

Das Gleichheitszeichen ist hier dann und nur dann gültig, wenn

$$(5) \quad \varphi(\theta) = \frac{1-r}{n+1+\frac{r}{1-r}} \left| 1 - \frac{z-r}{1-r} \frac{1-(-z)^n}{1+z} \right|^2 \quad (z = e^{i\theta})$$

und $\theta = \pi$ ist.

Die Ungleichung (4) ergibt sich ähnlicherweise, wie die Ungleichung (4). Aus (4) folgt nun mit wörtlicher Wiederholung des Verfahrens in Punkt 4 die gewünschte Ungleichung (6).

Um die Fälle zu ermitteln, wo in (6) bzw. (7) das Gleichheitszeichen gilt, schicke ich den folgenden Hilfssatz voraus:

Die Wurzeln des Polynoms

$$1 - \frac{z-r}{1-r} \frac{1-(-z)^n}{1+z}$$

liegen alle am Rande des Einheitskreises.

Ist nämlich $z = -\xi$ eine von diesen, so ist $\xi \neq 1$ und

$$(1-r)(1-\xi) + (\xi+r)(1-\xi^n) = 0,$$

d. h.
$$\frac{1+r\xi}{\xi+r} = \xi^n.$$

Nun ist bekanntlich für $|\xi| < 1$

$$\left| \frac{1+r\xi}{\xi+r} \right| > 1 > |\xi^n| \quad \text{und für } |\xi| > 1 \quad \left| \frac{1+r\xi}{\xi+r} \right| < 1 < |\xi^n|,$$

woraus die Behauptung folgt. Das Minimum des trigonometrischen Polynoms (5) ist somit gleich 0.

Ist nun in (6) das Gleichheitszeichen gültig, so muß (s. Punkt 4)

$$\frac{M(1) - \varphi(\theta + \theta_0, 1)}{M(1) - M(r)} = \varphi(\theta) \quad \text{und} \quad \theta_1 - \theta_0 = \pi$$

sein, wo $\varphi(\theta)$ das trigonometrische Polynom (5) bezeichnet. D. h.

$$\varphi(\theta, 1) = \alpha + \beta \varphi(\theta - \theta_0) \quad (\beta < 0), \quad \text{q. e. d.}$$

Umgekehrt, wenn $\varphi(\theta, 1)$ diese Form hat, so ist

$$M(1) = \alpha, \quad m(1) = \alpha + \beta \left(1 + n \frac{1+r}{1-r} \right), \quad \Omega(1) = -\beta \left(1 + n \frac{1+r}{1-r} \right)$$

und
$$M(r) \geq \varphi(\theta_0, r)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(\theta, r) \varphi(\theta + \theta_0, 1) d\theta = \alpha + \beta = M(1) - \frac{\Omega(1)}{1 + n \frac{1+r}{1-r}};$$

in (6) gilt also wirklich das Gleichheitszeichen.

Ähnlich behandelt man die Ungleichung (7).

Wien, im Oktober 1918.